Глава V

ОГРАНИЧЕННАЯ ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ

В предыдущей главе мы рассматривали задачу о движении пассивно действующей материальной точки, находящейся под действием заданных сил, исходящих от неподвижных центров. Мы упомянули также, что представляет интерес рассмотреть еще более общую задачу, предполагая, что пассивная точка движется под действием активных масс, каждая из которых обладает заданным движением. Такие задачи называются в небесной механике — *ограниченными задачами*. Число активно действующих масс вообще может быть каким угодно. Например, при изучении полета космического корабля (искусственного небесного тела!) в пределах Солнечной системы мы, естественно, можем считать, что это искусственное тело не оказывает никакого влияния и воздействия на планеты и их спутники. Движение планет мы можем считать заданным, так как эта задача издавна изучается в небесной механике, и мы знаем и свойства их движения и умеем рассчитывать их положения и скорости при помощи аналитических или хотя бы численных методов. Более того, так как планеты Солнечной системы движутся почти в одной плоскости и почти по круговым орбитам, то мы можем считать (по крайней мере в течение не очень большого промежутка времени), что активные тела в рассматриваемой модельной задаче движутся по окружностям, лежащим в одной плоскости. Такого рода задачи называются *круговыми ограниченными задачами*. Например, можно рассматривать в первом приближении движение Луны под действием притяжения Земли и Солнца, считая, что Луна не оказывает на Солнце и Землю никакого влияния.

Эта задача была поставлена впервые и решалась при помощи рядов еще Эйлером и с тех пор неизменно привлекала к себе внимание многих знаменитых астрономов и математиков. В настоящее время одной из важнейших задач современной небесной механики является задача о движении искусственного тела (искусственного спутника, космического корабля или небесной лаборатории) под действием притяжения Земли и Луны. Поэтому ограниченная задача трех тел играет теперь весьма

важную роль и изучается весьма подробно и численными, и математическими методами.

Рассмотрению некоторых важнейших случаев этой задачи и установлению некоторых главнейших результатов в ее исследовании и посвящена эта глава нашей книги.

Заметим при этом, что классическая задача, т. е. задача о движении пассивного тела под действием ньютоновского притяжения двух активных масс была рассмотрена нами в существенных чертах и в первом издании этой книги и во втором и третьем изданиях нашей книги «Небесная механика. Основные задачи и методы».

Поэтому здесь мы будем рассматривать обобщенную ограниченную задачу в том же смысле, в котором мы рассматривали задачу неподвижных центров в предыдущей главе.

Классический случай ограниченной задачи трех тел мы будем отмечать просто как частный случай более общей задачи.

Наконец, хотя в большей части мы будем рассматривать все тела (как и в классической небесной механике) как материальные точки, но в заключительном параграфе мы дадим также некоторое представление и о том естественном случае, когда тела являются абсолютно твердыми телами, имеющими конечные размеры.

§ 1. Постановка задачи и уравнения движения

Мы предпочитаем трактовать ограниченную задачу трех тел как частный случай общей задачи, а поэтому поставим сначала общую задачу трех материальных точек и выпишем соответствующие уравнения движения.

1. Рассмотрим три материальные точки M_0, M_1, M_2 с постоянными, конечными массами m_0, m_1, m_2 соответственно. Предположим, аналогично тому, как было сделано в предыдущей главе, что на каждую точку M_i $(i = 0, 1, 2)$ действует сила, исходящая от точки M_j $(j \neq i)$, направленная по прямой, соединяющей эти две точки, и пропорциональная произведению их масс и некоторой заданной функции времени, взаимного расстояния Δ_{ij} и его первых двух производных по времени $\dot{\Delta}_{ij}$ и $\ddot{\Delta}_{ij}$. То есть эта функция, определяющая закон силы, действующей на точку M_i, имеет такой же характер, как и функция (4.1), Множители пропорциональности f_{ij} — или вещественные постоянные (положительные или отрицательные), или некоторые вещественные функции времени.

Кроме того, мы будем предполагать, как и раньше, что третья аксиома Ньютона вообще не имеет места, т. е., что

$$F_{ji} \neq F_{ij}. \tag{5.1}$$

Выберем каким-нибудь образом некоторую прямоугольную систему декартовых координат с началом в фиксированной точке O и с неизменными направлениями осей $O\xi$, $O\eta$ и $O\zeta$. Обозначая координаты точки M_i в этой системе буквами ξ_i, η_i, ζ_i, мы можем написать дифференциальные уравнения движения трех точек следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
m_0\ddot{\xi}_0 &= f_{01}m_0m_1F_{01}\frac{\xi_1-\xi_0}{\Delta_{01}} + f_{02}m_0m_2F_{02}\frac{\xi_2-\xi_0}{\Delta_{02}},\\
m_0\ddot{\eta}_0 &= f_{01}m_0m_1F_{01}\frac{\eta_1-\eta_0}{\Delta_{01}} + f_{02}m_0m_2F_{02}\frac{\eta_2-\eta_0}{\Delta_{02}},\\
m_0\ddot{\zeta}_0 &= f_{01}m_0m_1F_{01}\frac{\zeta_1-\zeta_0}{\Delta_{01}} + f_{02}m_0m_2F_{02}\frac{\zeta_2-\zeta_0}{\Delta_{02}},\\
m_1\ddot{\xi}_1 &= f_{10}m_1m_0F_{10}\frac{\xi_0-\xi_1}{\Delta_{10}} + f_{12}m_1m_2F_{12}\frac{\xi_2-\xi_1}{\Delta_{12}},\\
m_1\ddot{\eta}_1 &= f_{10}m_1m_0F_{10}\frac{\eta_0-\eta_1}{\Delta_{10}} + f_{12}m_1m_2F_{12}\frac{\eta_2-\eta_1}{\Delta_{12}},\\
m_1\ddot{\zeta}_1 &= f_{10}m_1m_0F_{10}\frac{\zeta_0-\zeta_1}{\Delta_{10}} + f_{12}m_1m_2F_{12}\frac{\zeta_2-\zeta_1}{\Delta_{12}},\\
m_2\ddot{\xi}_2 &= f_{20}m_2m_0F_{20}\frac{\xi_0-\xi_2}{\Delta_{20}} + f_{21}m_2m_1F_{21}\frac{\xi_1-\xi_2}{\Delta_{21}},\\
m_2\ddot{\eta}_2 &= f_{20}m_2m_0F_{20}\frac{\eta_0-\eta_2}{\Delta_{20}} + f_{21}m_2m_1F_{21}\frac{\eta_1-\eta_2}{\Delta_{21}},\\
m_2\ddot{\zeta}_2 &= f_{20}m_2m_0F_{20}\frac{\zeta_0-\zeta_2}{\Delta_{20}} + f_{21}m_2m_1F_{21}\frac{\zeta_1-\zeta_2}{\Delta_{21}},
\end{aligned}\right\} \qquad (5.2)$$

где

$$f_{ji} \neq f_{ij},$$

$$\Delta_{ij} = \Delta_{ji} = \sqrt{(\xi_i-\xi_j)^2 + (\eta_i-\eta_j)^2 + (\zeta_i-\zeta_j)^2}, \qquad (5.2')$$

$$F_{ij} = F_{ij}(t;\ \Delta_{ij},\ \dot{\Delta}_{ij},\ \ddot{\Delta}_{ij}) \qquad (i,\ j=0,\ 1,\ 2;\ j\neq i).$$

Если в уравнениях (5.2) положить

$$f_{ji} = f_{ij} = f = \text{const}, \quad F_{ji} = F_{ij} = \frac{1}{\Delta_{ij}^3},$$

то мы получим обычные уравнения движения классической задачи трех тел (материальных точек) в абсолютной системе координат.

Законы сил F_{ij} в уравнениях (5.2) мы считаем вообще какими угодно заданными функциями, лишь бы они удовлетворяли тем общим требованиям, которые обеспечивают существование и единственность решения системы (5.2) при произвольно заданных начальных значениях

$$\xi_i^{(0)},\ \eta_i^{(0)},\ \zeta_i^{(0)},\ \dot{\xi}_i^{(0)},\ \dot{\eta}_i^{(0)},\ \dot{\zeta}_i^{(0)} \qquad (i=0,\ 1,\ 2),$$

для которых ни одно из начальных трех взаимных расстояний не равно нулю.

Не рассматривая здесь вопроса о существовании первых интегралов системы (5.2) (что будет предметом общего рассмотрения в третьей части книги), заметим, что всегда возможно перейти от абсолютных координат к относительным, выбирая какую-либо из трех точек за начало новой системы координат.

Примем за начало новой системы координат точку M_0, оставляя новые координатные оси Ox, Oy, Oz, соответственно параллельными абсолютным осям. Обозначая через x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 координаты точек M_1 и M_2 в новой системе, так что

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \xi_1 - \xi_0, \quad y_1 = \eta_1 - \eta_0, \quad z_1 = \zeta_1 - \zeta_0, \\ x_2 &= \xi_2 - \xi_0, \quad y_2 = \eta_2 - \eta_0, \quad z_2 = \zeta_2 - \zeta_0, \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

мы получим новые уравнения движения в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\frac{m_0F_{10} + m_1F_{01}}{r_1}x_1 - m_2F_{02}\frac{x_2}{r_2} + m_2F_{12}\frac{x_2 - x_1}{\Delta}, \\ \ddot{y}_1 &= -\frac{m_0F_{10} + m_1F_{01}}{r_1}y_1 - m_2F_{02}\frac{y_2}{r_2} + m_2F_{12}\frac{y_2 - y_1}{\Delta}, \\ \ddot{z}_1 &= -\frac{m_0F_{10} + m_1F_{01}}{r_1}z_1 - m_2F_{02}\frac{z_2}{r_2} + m_2F_{12}\frac{z_2 - z_1}{\Delta}, \\ \ddot{x}_2 &= -\frac{m_0F_{20} + m_2F_{02}}{r_2}x_2 - m_1F_{01}\frac{x_1}{r_1} + m_1F_{21}\frac{x_1 - x_2}{\Delta}, \\ \ddot{y}_2 &= -\frac{m_0F_{20} + m_2F_{02}}{r_2}y_2 - m_1F_{01}\frac{y_1}{r_1} + m_1F_{21}\frac{y_1 - y_2}{\Delta}, \\ \ddot{z}_2 &= -\frac{m_0F_{20} + m_2F_{02}}{r_2}z_2 - m_1F_{01}\frac{z_1}{r_1} + m_1F_{21}\frac{z_1 - z_2}{\Delta}, \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

где для трех взаимных расстояний введены более удобные теперь обозначения

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \Delta_{01} = \Delta_{10} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \\ r_2 &= \Delta_{02} = \Delta_{20} = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}, \\ \Delta &= \Delta_{12} = \Delta_{21} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{5.4'}$$

Таким образом, F_{01} и F_{10} суть функции t, r_1, $\dot{r}_1$, $\ddot{r}_1$; F_{02} и F_{20} — функции t, r_2 $\dot{r}_2$, $\ddot{r}_2$; наконец, F_{12} и F_{21} — функции t, Δ, $\dot{\Delta}$, $\ddot{\Delta}$.

Уравнения (5.4) составляют систему 12-го порядка с шестью неизвестными функциями, определяющую движения точек M_1 и M_2 относительно точки M_0 и неизменных осей.

Однако, в отличие от классической задачи трех тел, уравнения (5.4) не равносильны уравнениям (5.2), так как из девяти

абсолютных координат три остаются неизвестными и для их определения надобно еще проинтегрировать дополнительную систему шестого порядка с тремя неизвестными.

Заметим еще, что для сокращения мы включили множители пропорциональности f_{ij} в функции F_{ij}, так что в уравнениях (5.4) F_{ij} обозначает произведение $f_{ij}F_{ij}$ из уравнений (5.2).

Первые и вторые производные от расстояний (5.4′) определяются формулами

$$\dot{r}_i = \frac{x_i\dot{x}_i + y_i\dot{y}_i + z_i\dot{z}_i}{r_i},$$

$$\ddot{r}_i = \frac{x_i\ddot{x}_i + y_i\ddot{y}_i + z_i\ddot{z}_i + \dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2 - \dot{r}_i^2}{r_i} \qquad (i = 1,\ 2),$$

$$\dot{\Delta} = \frac{(x_2 - x_1)(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + (y_2 - y_1)(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + (z_2 - z_1)(\dot{z}_2 - \dot{z}_1)}{\Delta},$$

$$\Delta\ddot{\Delta} + \dot{\Delta}^2 = (x_2 - x_1)(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) + (y_2 - y_1)(\ddot{y}_2 - \ddot{y}_1) + (z_2 - z_1)(\ddot{z}_2 - \ddot{z}_1) + \\ + (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + (\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2 + (\dot{z}_2 - \dot{z}_1)^2.$$

2. В предыдущем разделе все три массы являются активно действующими и каждая из них действует на две другие с различными, вообще, силами.

Теперь мы переходим к главному предмету этого параграфа — к ограниченной задаче трех тел (материальных точек), предполагая, что одна из трех точек, — пусть это будет точка M_2, — является пассивной и не оказывает никакого действия на точки M_0 и M_1. Тогда

$$F_{02} = F_{12} = 0,$$

и уравнения (5.4) приводятся к виду

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\frac{m_0F_{10} + m_1F_{01}}{r_1}x_1, \\ \ddot{y}_1 &= -\frac{m_0F_{10} + m_1F_{01}}{r_1}y_1, \\ \ddot{z}_1 &= -\frac{m_0F_{10} + m_1F_{01}}{r_1}z_1, \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

что составляет независимую систему трех уравнений с тремя неизвестными, определяющую движение точки M_1 относительно M_0, и

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_2 &= -\frac{m_0F_{20}}{r_2}x_2 - \frac{m_1F_{01}}{r_1}x_1 + \frac{m_1F_{21}}{\Delta}(x_1 - x_2), \\ \ddot{y}_2 &= -\frac{m_0F_{20}}{r_2}y_2 - \frac{m_1F_{01}}{r_1}y_1 + \frac{m_1F_{21}}{\Delta}(y_1 - y_2), \\ \ddot{z}_2 &= -\frac{m_0F_{20}}{r_2}z_2 - \frac{m_1F_{01}}{r_1}z_1 + \frac{m_1F_{21}}{\Delta}(z_1 - z_2). \end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

Эти уравнения, в которых координаты точки M_1 и их производные определяются уравнениями (5.5) и поэтому должны рассматриваться как известные функции времени, и являются уравнениями общей (или обобщенной) ограниченной задачи трех тел (трех материальных точек). Отметим при этом, что масса m_2 пассивной точки M_2 не входит в эти уравнения и может быть какой угодно. Просто эта масса не оказывает никакого действия на две другие массы. Можно считать, так же как это делается часто в математических классических исследованиях, что m_2 равна нулю, и в результате такого предположения мы получим те же самые уравнения (5.6). В астрономических задачах масса m_2 оказывается чрезвычайно малой по сравнению с массами m_0 и m_1. Поэтому действие малой массы по закону Ньютона достаточно мало́ и этим малым действием в ряде случаев можно, оказывается, пренебречь, так что в задаче масса m_2 как бы не существует или как бы не действует. Таким образом, к ограниченной задаче можно подойти двумя путями: или считая, что точка M_2 имеет массу, равную нулю (ее часто так и называют «нулевая масса»!), или считая, как это делаем мы, что масса m_2 не равна нулю, но не действует на две другие, что и отмечается здесь в ее названии — *пассивно действующая*, или просто *пассивная масса*. Математическая задача, т. е. задача об исследовании и решении уравнений (5.6), не зависит от ее астрономической постановки, но, с одной стороны, странно говорить о движении нулевой массы, т. е. о движении чего-то, что в действительности не существует, а, с другой стороны, может показаться нереальным предположение о том, что конечная масса никак себя не обнаруживает, хотя ее движение может быть наблюдаемо (например, движение космической ракеты!). Все дело в том, что и в том, и в другом случае задача является приближенной, и система трех материальных точек, и в случае общей задачи и в случае ограниченной, представляет собой только абстрактную модель действительно существующих в природе систем небесных тел.

После этого методологического отступления вернемся к нашей математической задаче, т. е. к дифференциальным уравнениям (5.5) и (5.6). Заметим сначала, что, полагая для сокращения

$$m_0F_{10}(t;\ r_1,\ \dot{r}_1,\ \ddot{r}_1)+m_1F_{01}(t;\ r_1,\ \dot{r}_1,\ \ddot{r}_1)=F, \tag{5.5'}$$

мы представим уравнения (5.5) в более простой форме

$$\ddot{x}_1=-F\cdot\frac{x_1}{r_1},\quad \ddot{y}_1=-F\cdot\frac{y_1}{r_1},\quad \ddot{z}_1=-F\cdot\frac{z_1}{r_1}. \tag{5.7}$$

Эти уравнения имеют такую же форму, как и уравнения (4.21) § 2 главы IV задачи одного неподвижного центра, если положить в них $f_m = 1$.

Поэтому, прилагая к уравнениям (5.7) уже известные результаты, мы можем заключить, что точка M_1 движется относительно точки M_0 по плоской траектории с сохранением интеграла площадей. Вид, форма и свойства этой траектории зависят, конечно, от функции F, т. е. от законов действующих сил и, конечно, от начальных условий, которые также всегда будем считать заданными.

В классической ограниченной задаче траектория точки M_1 может быть, в зависимости от начальных условий, гиперболой, параболой, эллипсом, окружностью или даже прямой линией.

Но случаи, когда орбита точки M_1 является гиперболой, параболой или прямой линией, насколько нам известно, никогда не рассматривались, и в учебниках о них обычно не упоминается.

Поэтому в классической задаче рассматриваются только два случая, а именно, эллиптическая ограниченная задача и круговая ограниченная задача, причем последняя изучена более детально, чем первая, и полученные в ней результаты многократно применялись (и применяются в настоящее время) в конкретных астрономических задачах.

В общем случае, когда движение точки M_1 описывается уравнениями (5.7), вид траектории может быть самым разнообразным и орбита может быть замкнутой или незамкнутой, расположенной в конечной области пространства или имеющей бесконечные ветви и т. д.

Так как нас будет интересовать только движение точки M_2, то удобно принять за основную координатную плоскость (xOy) плоскость, в которой происходит движение точки M_1 и которая определяется начальным радиусом-вектором и начальным вектором скорости этой точки. Тогда уравнения (5.7) приведутся к системе двух уравнений второго порядка:

$$\ddot{x}_1 = -F\frac{x_1}{r_1}, \quad \ddot{y}_1 = -F\frac{y_1}{r_1}, \tag{5.7'}$$

а если мы перейдем теперь к полярным координатам, полагая

$$x_1 = r_1 \cos v, \quad y_1 = r_1 \sin v, \tag{5,7''}$$

то уравнения движения точки M_1 напишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} \ddot{r}_1 - \frac{c^2}{r_1^3} &= -F(t;\ r_1,\ \dot{r}_1,\ \ddot{r}_1), \\ r_1^2\dot{v} &= c, \end{aligned}\right\} \tag{5.8}$$

где c — произвольная постоянная (обычная постоянная площадей).

Из уравнений (5.8) можно непосредственно вывести только два случая, когда траектория точки M_1 будет заведомо известна. Это будут следующие случаи:

1-й случай, когда начальные условия таковы, что $c = 0$. Тогда из второго уравнения (5.8) имеем для всякого t

$$r_1^2 \dot{v} = 0,$$

откуда или $r_1 \equiv 0$, или $\dot{v} = 0$. Но в первом случае точка M_1 совпадает с точкой M_0, и мы возвращаемся к задаче одного неподвижного центра. Если же $\dot{v} = 0$, то $v = v_0 = \text{const}$ и траектория точки M_1 есть прямая, проходящая через начало координат M_0. Движение точки M_1 определяется тогда уравнением

$$\ddot{r}_1 = -F(t;\ r_1,\ \dot{r}_1,\ \ddot{r}_1),$$

и r_1 будет функцией t, $r_1^{(0)}$, $\dot{r}_1^{(0)}$.

2-й случай, когда начальные условия таковы, что $c \neq 0$, но функция F такова, что при некотором начальном значении $r_1^{(0)} = a$ мы имеем для всякого значения t

$$F(t;\ a,\ 0,\ 0) = \text{const} > 0. \tag{5.8'}$$

В этом случае первое из уравнений (5.8) удовлетворяется тождественно при $r_1 = a$ и, следовательно, орбита точки M_1 есть окружность радиуса a с центром в точке M_0.

Второе из уравнений (5.8) показывает, что при этом

$$\dot{v} = \frac{c}{a^2} = n = \text{const}, \tag{5.8''}$$

т. е. что точка M_1 движется в этом случае по окружности с постоянной угловой скоростью.

В таком случае мы будем называть нашу задачу *круговой ограниченной задачей*.

В первом случае задачу можно назвать *прямолинейной ограниченной задачей*.

Заметим еще, что круговая задача всегда будет возможна, если функция F не зависит от времени t и при всех или по крайней мере при некоторых значениях переменных сохраняет положительные значения.

В этом же случае (т. е. когда F не зависит от времени) и когда задача не является ни прямолинейной, ни круговой, радиус-вектор точки M_1, как было отмечено выше (§ 2 главы IV), может быть выражен в функции полярного угла v.

3. Займемся теперь рассмотрением уравнений (5.6). Предполагая, что за плоскость (xOy) взята плоскость движения

точки M_1 и имея в виду, что в этом случае

$$x_1 = r_1 \cos v, \quad y_1 = r_1 \sin v, \quad z_1 = 0,$$

мы можем написать

$$\Delta = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 (x_2 \cos v + y_2 \sin v)},$$

и уравнения (5.6) примут следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_2 &= -\frac{m_0 F_{20}}{r_2} \cdot x_2 - m_1 F_{01} \cos v + \frac{m_1 F_{21}}{\Delta} (r_1 \cos v - x_2), \\ \ddot{y}_2 &= -\frac{m_0 F_{20}}{r_2} \cdot y_2 - m_1 F_{01} \sin v + \frac{m_1 F_{21}}{\Delta} (r_1 \sin v - y_2), \\ \ddot{z}_2 &= -\frac{m_0 F_{20}}{r_2} \cdot z_2 - \frac{m_1 F_{21}}{\Delta} z_2, \end{aligned}\right\} \quad (5.9)$$

где

$$\left.\begin{aligned} F_{01} &= F_{01}(t;\ r_1,\ \dot{r}_1,\ \ddot{r}_1), \\ F_{20} &= F_{20}(t;\ r_2,\ \dot{r}_2,\ \ddot{r}_2), \\ F_{21} &= F_{21}(t;\ \Delta,\ \dot{\Delta},\ \ddot{\Delta}). \end{aligned}\right\} \quad (5.9')$$

В частности, если

$$F_{01} = \frac{f}{r_1^2}, \quad F_{20} = \frac{f}{r_2^2}, \quad F_{21} = \frac{f}{\Delta^2},$$

то уравнения (5.9) превращаются в классические уравнения ограниченной задачи с началом координат в точке M_0.

Из уравнений (5.9) видно также, что при произвольно заданных функциях (5.9′) третье из уравнений удовлетворяется при $z_2 \equiv 0$. Тогда задача сводится к рассмотрению двух первых уравнений (5.9), показывающих, что пассивная точка в этом случае движется в плоскости (xOy). Такая задача называется *плоской ограниченной задачей*, а в частных случаях, когда траектория точки M_1 есть прямая линия или окружность, — *плоской прямолинейной ограниченной задачей* и *плоской круговой ограниченной задачей*.

В классической ограниченной задаче, когда все законы действующих сил оказываются законами притяжения Ньютона, имеем соответственно случаи плоской гиперболической, параболической и эллиптической задачи.

Исследование уравнений движения в ограниченной задаче трех тел делается более удобным, если перейти от системы осей неизменного направления к вращающейся системе координат, совершенно так же, как это и производится всегда в классическом случае.

Итак, перейдем к системе прямоугольных координат, основная плоскость которой (xOy) совпадает с плоскостью движения

точки M_1 и положительное направление оси абсцисс совпадает с направлением от M_0 к M_1.

Иначе говоря, преобразуем систему (5.9) подстановкой

$$x_2 = x\cos v - y\sin v, \quad y_2 = x\sin v + y\cos v, \quad z_2 = z, \tag{5.10}$$

вследствие чего получим следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{v}\dot{y} - \dot{v}^2 x - \ddot{v}y &= X, \\ \ddot{y} + 2\dot{v}\dot{x} - \dot{v}^2 y + \ddot{v}x &= Y, \\ \ddot{z} &= Z, \end{aligned}\right\} \tag{5.11}$$

его правые части определяются следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} X &= -m_0 F_{20}\cdot\frac{x}{r} - m_1 F_{21}\cdot\frac{x-r_1}{\Delta} - m_1 F_{01}, \\ Y &= -m_0 F_{20}\cdot\frac{y}{r} - m_1 F_{21}\cdot\frac{y}{\Delta}, \\ Z &= -m_0 F_{20}\cdot\frac{z}{r} - m_1 F_{21}\cdot\frac{z}{\Delta}, \end{aligned}\right\} \tag{5.11'}$$

где

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \Delta &= \sqrt{r^2 - 2r_1 x + r_1^2}. \end{aligned}\right\} \tag{5.11''}$$

Так как третье из уравнений (5.11′) удовлетворяется тождественно при $z = 0$, то рассматриваемая ограниченная задача допускает частное решение

$$z = 0,$$

и мы получим дифференциальные уравнения плоской ограниченной задачи

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{v}\dot{y} - \dot{v}^2 x - \ddot{v}y &= X, \\ \ddot{y} + 2\dot{v}\dot{x} - \dot{v}^2 y + \ddot{v}x &= Y, \end{aligned}\right\} \tag{5.12}$$

где

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} = \rho, \\ \Delta &= \sqrt{r^2 - 2r_1 x + r_1^2}, \end{aligned}\right\} \tag{5.12'}$$

а правые части определяются двумя первыми из формул (5.11′).

Если ввести теперь вместо прямоугольных координат во вращающейся системе $(Oxyz)$ цилиндрические координаты, полагая

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z, \tag{5.13}$$

то уравнения (5.11′) преобразуются к следующему виду:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\rho} - 2\dot{v}\dot{\varphi}\dot{\rho} - \rho(\dot{\varphi}^2 + \dot{v}^2) &= \mathrm{P}, \\ \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}(\dot{\varphi} + \dot{v}) + \rho\ddot{v} &= \Phi, \\ \ddot{z} &= Z, \end{aligned}\right\} \tag{5.14}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{P} &= X\cos\varphi + Y\sin\varphi = \\ &= -\left(m_0F_{20} + m_1F_{21}\frac{\rho}{\Delta}\right)(\cos\varphi + \sin\varphi) + \\ &\qquad + m_1\left(F_{21}\frac{r_1}{\Delta} - F_{01}\right)\cos\varphi, \\ \Phi &= -X\sin\varphi + Y\cos\varphi = \\ &= \left(m_0F_{20} - m_1F_{21}\frac{\rho}{\Delta}\right)(\cos\varphi - \sin\varphi) - \\ &\qquad - m_1\left(F_{21}\frac{r_1}{\Delta} - F_{01}\right)\sin\varphi \end{aligned}\right\} \tag{5.14′}$$

и

$$\left.\begin{aligned} r_2 &= \sqrt{\rho^2 + z^2} = r, \\ \Delta &= \sqrt{r^2 - 2r_1r\cos\varphi + r_1^2}. \end{aligned}\right\} \tag{5.14″}$$

Заметим, что функция F_{20} не зависит от угла φ, а только от ρ, z и вообще от их производных первого и второго порядка. Функция F_{21} зависит от ρ, z, φ и их производных, а величина F_{01} есть известная функция времени.

4. В частном случае круговой ограниченной задачи, когда

$$r_1 = a = \mathrm{const}, \quad \dot{r}_1 = \ddot{r}_1 = 0, \quad \dot{v} = n = \mathrm{const}, \quad \ddot{v} = 0,$$

уравнения движения во вращающихся осях напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x &= X, \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y &= Y, \\ \ddot{z} &= Z, \end{aligned}\right\} \tag{5.15}$$

где правые части определяются теми же формулами (5.11′), в которых нужно только заменить r_1 на a, и где величина $F_{01} = F_{01}(t;\ 0,\ 0,\ 0)$ и в случае независимости сил, действующих на точки M_0 и M_1, есть просто некоторая постоянная.

Уравнения движения в цилиндрических координатах (5.14) также примут более простой вид:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\rho} - 2n\dot{\varphi}\dot{\rho} - \rho(\dot{\varphi}^2 + n^2) &= \mathrm{P}, \\ \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}(\dot{\varphi} + n) &= \Phi, \\ \ddot{z} &= Z, \end{aligned}\right\} \tag{5.16}$$

где правые части также определяются прежними формулами (5.14′), в которых нужно положить $r_1 = a$ и $r_2 = \rho$,

$$\Delta = \sqrt{\rho^2 - 2a\rho\cos\varphi + a^2}.$$

Уравнения движения в плоской круговой ограниченной задаче получатся непосредственно из (5.15) и (5.16) отбрасыванием уравнений для $\ddot{z}$.

В другом простом частном случае — в прямолинейной ограниченной задаче будем иметь $\dot{v} = 0$, и уравнения (5.11) примут вид

$$\ddot{x} = X, \quad \ddot{y} = Y, \quad \ddot{z} = Z, \tag{5.17}$$

а уравнения (5.14) приводятся к виду

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 = \mathrm{P}, \quad \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} = \Phi, \quad \ddot{z} = Z. \tag{5.18}$$

Формулы (5.11′) и (5.14′) не изменяются.

Уравнения плоской ограниченной задачи, когда точка M_2 движется в некоторой (произвольно выбранной) плоскости, проходящей через прямую (M_0M_1), мы опять получим отбрасыванием третьего уравнения из (5.17) или (5.18).

5. Возвратимся теперь к пространственной задаче во вращающихся осях и применим к уравнениям (5.11) преобразование к безразмерным («пульсирующим»!) переменным, наиболее часто называемое *преобразованием Нехвила*.

Это преобразование выполняется здесь совершенно таким же образом, как это мы показывали в предыдущем издании этой книги, а также во втором и третьем изданиях книги «Небесная механика. Основные задачи и методы». Поэтому мы не будем приводить здесь все необходимые промежуточные выкладки и приведем только окончательные результаты.

Преобразование Нехвила заключается в замене координат пассивной точки x, y, z новыми переменными посредством формул

$$x = r_1\xi, \quad y = r_1\eta, \quad z = r_1\zeta, \tag{5.19}$$

где радиус-вектор r_1 точки M_1 есть известная функция времени, и в замене независимой переменной t новой независимой переменной — полярным углом v — посредством интеграла площадей

$$c\,dt = r_1^2\,dv. \tag{5.19′}$$

Как нетрудно проверить непосредственно или при помощи указанных выше книг, преобразованные уравнения напишутся

следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dv^2} - 2\frac{d\eta}{dv} &= \frac{r_1^3}{c^2}[F\cdot\xi + \Xi], \\ \frac{d^2\eta}{dv^2} + 2\frac{d\xi}{dv} &= \frac{r_1^3}{c^2}[F\cdot\eta + \mathrm{H}], \\ \frac{d^2\zeta}{dv^2} + \zeta &= \frac{r_1^3}{c^2}[F\cdot\zeta + \mathrm{Z}]. \end{aligned}\right\} \tag{5.20}$$

Отметим, что так как t и v связаны дифференциальным соотношением (5.19′), где r_1 рассматривается как известная функция t, то всегда можно предполагать, что уравнение (5.19′) разрешено относительно t, которое подставлено затем в функцию r_1. Таким образом, мы будем предполагать, что в уравнениях (5.20) правые части являются функциями новой переменной v и где величины Ξ, H, Z определяются следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} \Xi &= -m_0F_{20}\frac{\xi}{\bar\rho} - m_1F_{21}\frac{\xi-1}{\bar\Delta} - m_1F_{01}, \\ \mathrm{H} &= -m_0F_{20}\frac{\eta}{\bar\rho} - m_1F_{21}\frac{\eta}{\bar\Delta}, \\ \mathrm{Z} &= -m_0F_{20}\frac{\zeta}{\bar\rho} - m_1F_{21}\frac{\zeta}{\bar\Delta}, \end{aligned}\right\} \tag{5.21}$$

где F дается формулой (5.5′), величины F_{01}, F_{20}, F_{21} — формулами (5.9′), а $\bar\rho$ и $\bar\Delta$ (которые можно считать безразмерными расстояниями) имеют следующие значения:

$$\left.\begin{aligned} \bar\rho^2 &= \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \\ \bar\Delta^2 &= (\xi-1)^2 + \eta^2 + \zeta^2, \end{aligned}\right\} \tag{5.22}$$

так что истинные расстояния будут

$$r = r_1\bar\rho, \quad \Delta = r_1\bar\Delta. \tag{5.22′}$$

В величины (5.5′) и (5.9′) входят расстояния r_1, r и Δ, а также, вообще, их производные по времени t. Радиус-вектор r_1 точки M_1 есть, как уже было сказано, известная функция времени, так же как и ее производные $\dot r_1$ и $\ddot r_1$. Все эти три функции можно выразить через новую независимую переменную v.

Таким образом, F и F_{01} можно рассматривать как заданные функции от v (в частности, как заданные постоянные).

В величинах F_{20} и F_{21} расстояния r и Δ даются формулами (5.22′), но их производные по t нужно еще выразить через производные по новой переменной v. Это можно сделать

следующим образом. Положим, как и раньше,

$$u = \frac{c}{r_1}, \tag{5.23}$$

так что u есть известная функция v, так же как и ее производные u' и u'' (производные по v обозначаем для краткости штрихами).

Тогда мы можем написать:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{r}_1 = -u', && \ddot{r}_1 = -\frac{1}{c}u^2u'', \\ &\dot{r} = u\bar{\rho}' - \bar{\rho}u', && \ddot{r} = \frac{1}{c}u^2(u\bar{\rho}'' - \bar{\rho}u''), \\ &\dot{\Delta} = u\bar{\Delta}' - \bar{\Delta}u', && \ddot{\Delta} = \frac{1}{c}u^2(u\bar{\Delta}'' - \bar{\Delta}u''). \end{aligned}\right\} \tag{5.23'}$$

Наконец, производные от $\bar{\rho}$ и $\bar{\Delta}$ выражаются через пульсирующие координаты и их производные по v посредством формул

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\rho}\bar{\rho}' = \xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta', \\ &\bar{\Delta}\bar{\Delta}' = (\xi - 1)\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = \bar{\rho}\bar{\rho}' - \xi', \\ &\bar{\rho}\bar{\rho}'' = \xi\xi'' + \eta\eta'' + \zeta\zeta'' + \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 - \rho'^2, \\ &\bar{\Delta}\bar{\Delta}'' = \bar{\rho}\bar{\rho}'' + \bar{\rho}'^2 - \bar{\Delta}'^2 - \xi''. \end{aligned}\right\} \tag{5.23''}$$

Уравнения (5.20) определяют движение пассивно действующей точки M_2 (обладающей конечной массой m_2) в переменных Нехвила и при произвольно заданных законах действующих сил являются уравнениями весьма сложного вида, причем вообще даже нелинейными относительно вторых и первых производных от координат.

Только при законах сил типа (4.18), когда функции F_{20} и F_{21} линейны относительно $\ddot{r}$ и $\ddot{\Delta}$ соответственно, правые части уравнений (5.20) в силу (5.23′) и (5.23″) окажутся линейными относительно $\ddot{\xi}$, $\ddot{\eta}$, $\ddot{\zeta}$ и могут быть легко разрешены относительно этих величин. Следует заметить при этом, что функции F_{01} и F_{10} не обязательно должны обладать свойством линейности относительно $\ddot{r}_1$, так как определение функции r_1 составляет независимую задачу, определяемую уравнениями (5.8).

Примером случая, в котором уравнения (5.20) могут быть разрешены относительно вторых производных, является тот случай, в котором функции F_{20} и F_{21} даются законом Вебера вида (4.5).

В случае, когда F_{20} и F_{21} не зависят от производных, правые части уравнений (5.20) зависят только от координат и поэтому значительно упрощаются. Таков, например, случай, когда

$$F_{20} = f_{20} \cdot r^{k_0}, \quad F_{21} = f_{21} \cdot \Delta^{k_1}, \tag{5.24}$$

где k_0 и k_1 — какие угодно вещественные числа, а f_{20} и f_{21} — или вещественные постоянные, или вещественные функции времени, а значит, и угла v.

Классический случай ограниченной задачи мы получим также как частный случай общей задачи, в котором законы F_{20} и F_{21} определяются формулами (5.24) с

$$k_0 = k_1 = -2, \quad f_{20} = f_{21} = f = \text{const},$$

и, кроме того,

$$F_{10} = F_{01} = \frac{f}{r_1^2},$$

откуда, следовательно, полагая $\mu = f(m_0 + m_1)$, имеем

$$F = m_0 F_{10} + m_1 F_{01} = \frac{\mu}{r_1^2}.$$

Далее, используя формулы (5.22′), имеем

$$F_{20} = \frac{f}{r_1^2 \bar{\rho}^2}, \quad F_{21} = \frac{f}{r_1^2 \bar{\Delta}^2},$$

после чего из (5.20) и (5.21) находим уравнения классической ограниченной задачи в переменных Нехвила

$$\left.\begin{aligned} \xi'' - 2\eta' &= \bar{r}_1 \left[\xi - \frac{\bar{m}_0 \xi}{\bar{\rho}^3} - \frac{\bar{m}_1 (\xi - 1)}{\bar{\Delta}^3} - \bar{m}_1 \right], \\ \eta'' + 2\xi &= \bar{r}_1 \eta \left[1 - \frac{\bar{m}_0}{\bar{\rho}^3} - \frac{\bar{m}_1}{\bar{\Delta}^3} \right], \\ \zeta'' + \zeta &= \bar{r}_1 \zeta \left[1 - \frac{m_0}{\bar{\rho}^3} - \frac{m_1}{\bar{\Delta}^3} \right], \end{aligned}\right\} \tag{5.25}$$

где

$$\bar{m}_0 = \frac{m_0}{m_0 + m_1}, \quad \bar{m}_1 = \frac{m_1}{m_0 + m_1}, \tag{5.25′}$$

$$\bar{m}_0 + \bar{m}_1 = 1,$$

и

$$r_1 = \frac{p}{1 + e \cos v} \tag{5.26}$$

есть обычное уравнение кеплеровской орбиты точки M_1 с фокусом в M_0, причем p есть параметр орбиты и e — ее эксцентриситет. Наконец,

$$\bar{r}_1 = \frac{r_1}{p} = \frac{1}{1 + e \cos v}, \tag{5.26′}$$

Независимой переменной в уравнениях (5.25) является истинная аномалия точки M_1 в ее орбите (5.26).

Если $e = 0$, то

$$\bar{r}_1 = 1, \quad r_1 = a, \quad v = nt,$$

и (5.25) обращаются в уравнения классической круговой ограниченной задачи.

Заметим еще, что, вводя в рассмотрение функцию сил Ω формулой

$$\Omega = \bar{r}_1 \left[\frac{1}{2} \bar{\rho}^2 + \frac{\bar{m}_0}{\bar{\rho}} + \frac{\bar{m}_1}{\bar{\Delta}} - m_1 \xi \right], \tag{5.27}$$

мы можем переписать уравнения (5.25) более кратко в виде

$$\left.\begin{aligned} \xi'' - 2\eta' &= \frac{\partial \Omega}{\partial \xi}, \\ \eta'' + 2\xi' &= \frac{\partial \Omega}{\partial \eta}, \\ \zeta'' + \zeta &= \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta}. \end{aligned}\right\} \tag{5.28}$$

§ 2. Интеграл Якоби. Частные решения ограниченной задачи

1. Уравнения общей ограниченной задачи трех тел (материальных точек) (5.11), (5.14) или (5.20) при произвольно заданных законах действующих сил не допускают никакого простого алгебраического или даже выражаемого в квадратурах элементарных функций, первого интеграла.

Даже классическая ограниченная задача, когда все действующие силы являются силами притяжения (или отталкивания), обратно пропорциональными квадрату соответствующего расстояния, в некруговом варианте не имеет никакого первого интеграла.

Только круговая ограниченная задача в классической небесной механике допускает первый интеграл — знаменитый интеграл Якоби, который имеет разнообразные приложения, из которого выводятся разнообразные интересные и полезные результаты и которому с давних пор посвящено множество исследований астрономов и математиков во всех частях земного шара.

Покажем теперь, что общая круговая, ограниченная задача также может обладать в некоторых случаях первым интегралом, аналогичным классическому, и который мы будем продолжать называть *интегралом Якоби*.

В самом деле, производя традиционную операцию, т. е. умножая уравнения круговой задачи (5.15) соответственно на $2\dot{x}$, $2\dot{y}$, $2\dot{z}$ и складывая, мы получим

$$2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y} + 2\dot{z}\ddot{z} - 2n^2(x\dot{x} + y\dot{y}) = 2\dot{x}X + 2\dot{y}Y + 2\dot{z}Z,$$

причем X, Y, Z определяются формулами (5.11′), где $r_1 = a$ и $F_{01} = \text{const}$.