и (5.25) обращаются в уравнения классической круговой ограниченной задачи.

Заметим еще, что, вводя в рассмотрение функцию сил Ω формулой

$$\Omega = \bar{r}_1 \left[\frac{1}{2} \bar{\rho}^2 + \frac{\bar{m}_0}{\bar{\rho}} + \frac{\bar{m}_1}{\bar{\Delta}} - m_1 \xi \right], \tag{5.27}$$

мы можем переписать уравнения (5.25) более кратко в виде

$$\left.\begin{aligned} \xi'' - 2\eta' &= \frac{\partial \Omega}{\partial \xi}, \\ \eta'' + 2\xi' &= \frac{\partial \Omega}{\partial \eta}, \\ \zeta'' + \zeta &= \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta}. \end{aligned}\right\} \tag{5.28}$$

§ 2. Интеграл Якоби. Частные решения ограниченной задачи

1. Уравнения общей ограниченной задачи трех тел (материальных точек) (5.11), (5.14) или (5.20) при произвольно заданных законах действующих сил не допускают никакого простого алгебраического или даже выражаемого в квадратурах элементарных функций, первого интеграла.

Даже классическая ограниченная задача, когда все действующие силы являются силами притяжения (или отталкивания), обратно пропорциональными квадрату соответствующего расстояния, в некруговом варианте не имеет никакого первого интеграла.

Только круговая ограниченная задача в классической небесной механике допускает первый интеграл — знаменитый интеграл Якоби, который имеет разнообразные приложения, из которого выводятся разнообразные интересные и полезные результаты и которому с давних пор посвящено множество исследований астрономов и математиков во всех частях земного шара.

Покажем теперь, что общая круговая, ограниченная задача также может обладать в некоторых случаях первым интегралом, аналогичным классическому, и который мы будем продолжать называть *интегралом Якоби*.

В самом деле, производя традиционную операцию, т. е. умножая уравнения круговой задачи (5.15) соответственно на $2\dot{x}$, $2\dot{y}$, $2\dot{z}$ и складывая, мы получим

$$2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y} + 2\dot{z}\ddot{z} - 2n^2(x\dot{x} + y\dot{y}) = 2\dot{x}X + 2\dot{y}Y + 2\dot{z}Z,$$

причем X, Y, Z определяются формулами (5.11′), где $r_1 = a$ и $F_{01} = \text{const}$.

Левая часть есть, очевидно, полная производная по t и, следовательно, мы получим из последнего уравнения первый интеграл только в том случае, когда правая его часть также окажется полной производной по t. Но из формул (5.11′) мы выводим, имея в виду (5.11″),

$$X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z} = -m_0F_{20}\dot{r} - m_1F_{21}\dot{\Delta} - m_1F_{01}\dot{x}.$$

Последнее выражение может быть полной производной только в том случае, когда каждая из двух функций $F_{20}(t;\ r,\ \dot{r},\ \ddot{r})$ и $F_{21}(t;\ \Delta,\ \dot{\Delta},\ \ddot{\Delta})$ такова, что для нее выполняется условие (4.20), т. е. когда существуют такие две новые функции, что мы имеем

$$\left.\begin{aligned} -\dot{r}F_{20}(t;\ r,\ \dot{r},\ \ddot{r}) &= \frac{d}{dt}\Phi_{20}(t;\ r,\ \dot{r}),\\ -\dot{\Delta}F_{21}(t;\ \Delta,\ \dot{\Delta},\ \ddot{\Delta}) &= \frac{d}{dt}\Phi_{21}(t;\ \Delta,\ \dot{\Delta}). \end{aligned}\right\} \tag{5.29}$$

В этом случае соотношение, полученное комбинацией уравнений движения (5.15), может быть проинтегрировано по t, и мы получим интеграл Якоби в следующем виде:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = n^2(x^2 + y^2) + 2\Phi + 2h, \tag{5.30}$$

где h — произвольная постоянная (постоянная Якоби) и функция Φ, играющая роль функции сил, выражается следующей формулой:

$$\Phi = m_0\Phi_{20}(t;\ r,\ \dot{r}) + m_1\Phi_{21}(t;\ \Delta,\ \dot{\Delta}) - m_1F_{01}\cdot x. \tag{5.31}$$

Таким образом, функция Φ зависит явно от времени t и через посредство r, Δ, $\dot{r}$, $\dot{\Delta}$ от x, y, z, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$.

Примером задачи, в которой существует интеграл Якоби, может служить случай, когда законы сил определяются формулами Вебера, т. е. когда

$$F_{20} = \frac{f_{20}}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{\sigma_{20}^2} + \frac{2r\ddot{r}}{\sigma_{20}^2}\right),$$

$$F_{21} = \frac{f_{21}}{\Delta^2}\left(1 - \frac{\dot{\Delta}^2}{\sigma_{21}^2} + \frac{2\Delta\ddot{\Delta}}{\sigma_{21}^2}\right),$$

где f_{20}, f_{21}, σ_{20}, σ_{21} — постоянные.

В этом случае, как мы уже показали в главе IV, будем иметь

$$\Phi_{20} = \frac{f_{20}}{r}\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{\sigma_{20}^2}\right),$$

$$\Phi_{21} = \frac{f_{21}}{\Delta}\left(1 - \frac{\dot{\Delta}^2}{\sigma_{21}^2}\right),$$

так что интеграл Якоби (5.30) приведется к следующей форме:

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-\frac{1}{2}n^2(x^2+y^2)+m_1F_{01}\cdot x=$$
$$=\frac{m_0f_{20}}{r}\left(1-\frac{\dot{r}^2}{\sigma_{20}^2}\right)+\frac{m_1f_{21}}{\Delta}\left(1-\frac{\dot{\Delta}^2}{\sigma_{21}^2}\right)+h.$$

Другим примером может служить случай, когда законы сил зависят только от расстояний, так что

$$F_{20}=f_{20}\cdot F_{20}(r),\quad F_{21}=f_{21}\cdot F_{21}(\Delta).$$

В этом случае

$$\Phi_{20}(r)=-f_{20}\int F_{20}(r)\,dr,\quad \Phi_{21}(\Delta)=-f_{21}\int F_{21}(\Delta)\,d\Delta,$$

и интеграл Якоби будет иметь вид

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-\frac{1}{2}n^2(x^2+y^2)+m_1F_{01}\cdot x=$$
$$=m_0\Phi_{20}(r)+m_1\Phi_{21}(\Delta)+h.$$

Из того и из другого примера в частных случаях получим классический интеграл Якоби в круговой ограниченной задаче трех тел.

Из первого примера мы получим классический интеграл, полагая

$$f_{20}=f_{21}=f,\quad \sigma_{20}=\sigma_{21}=\infty,$$

а из второго — в случае, когда

$$F_{20}=\frac{f}{r^2},\quad F_{21}=\frac{f}{\Delta^2},$$

так что для случая классической ограниченной задачи имеем:

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-\frac{1}{2}n^2(x^2+y^2)+m_1\cdot F_{01}\cdot x=f\left(\frac{m_0}{r}+\frac{m_1}{\Delta}\right)+h.$$

В плоской круговой ограниченной задаче, когда для всякого значения t имеем $z=\dot{z}=0$, мы можем записать этот интеграл в виде

$$V^2=n^2r^2+2U-\frac{fn^2m_1}{a}(a^2-\Delta^2-r^2),$$

где V — скорость движущейся точки M_2, а U есть силовая функция:

$$U=f\left(\frac{m_0}{r}+\frac{m_1}{\Delta}\right).$$

Впрочем, в пространственной круговой задаче интеграл Якоби также можно привести к подобному же виду, заменяя только в последнем равенстве n^2r^2 на $n^2(r^2-z^2)$.

Интеграл Якоби можно, конечно, получить и из уравнений в переменных Нехвила, но только в случае круговой задачи, когда $r_1 = a = \text{const}$.

Классический интеграл Якоби получится также из уравнений (5.28) для круговой задачи в виде ($\bar{r}_1 = \text{const}$)

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 + \zeta^2 = 2\Omega + 2h.$$

Примечание. В общем случае, когда для круговой задачи интеграл Якоби имеет вид (5.30), функция Φ, как показывает формула (5.31), может содержать явно время t. Это обстоятельство может показаться необычным, однако можно привести множество примеров, хотя бы и формально математических, когда мы действительно встретимся с такого рода случаем. В самом деле, пусть, например,

$$F_{20} = f\,[\dot{\varphi}(t)\cdot\dot{r} + 2\varphi(t)\cdot\ddot{r}],$$

где f — постоянная, а $\varphi(t)$ — какая угодно функция от t (непрерывная и дифференцируемая). Тогда, как легко видеть, мы имеем

$$\Phi_{20} = -f\varphi(t)\dot{r}^2.$$

Более общий случай подобного рода мы получим, предполагая, что какая-либо из функций F_{20}, F_{21} (или обе) имеет форму (4.18), не зависит от переменной r и удовлетворяет условию (4.20).

2. Перейдем теперь к рассмотрению частных решений общей ограниченной задачи, что удобнее сделать, исходя из уравнений движения (5.20) в пульсирующих координатах Нехвила. Будем искать установившиеся (стационарные, — в другой терминологии) движения, которым соответствуют постоянные значения переменных Нехвила ξ, η, ζ.

Из уравнений (5.20) непосредственно видно, что при любых постоянных значениях ξ и η левые части двух первых уравнений обращаются в нуль, а третье уравнение полностью удовлетворяется при $\zeta = 0$. Поэтому уравнения (5.20) будут допускать установившиеся решения, соответствующие точкам, лежащим в плоскости $(O\xi\eta)$, если найдутся такие постоянные ξ_0 и η_0, которые обращают в тождественные нули выражения, находящиеся в скобках в правых частях первых двух уравнений, в которых нужно положить предварительно $\zeta = 0$.

Имея в виду значение функции F и формулы (5.21), выпишем полные выражения для упомянутых двух скобок, что дает

$$\left.\begin{aligned} F\xi + \Xi &= (m_0F_{10} + m_1F_{01})\,\xi - \frac{n_0\xi}{\bar{\rho}}F_{20} - \frac{m_1(\xi-1)}{\bar{\Delta}}F_{21} - m_1F_{01}, \\ F\eta + \mathrm{H} &= (m_0F_{10} + m_1F_{01})\,\eta - \frac{m_0\eta}{\bar{\rho}}F_{20} - \frac{m_1\eta}{\bar{\Delta}}F_{21}, \end{aligned}\right\} \quad (5.32)$$

где теперь (так как $\zeta = 0$)

$$\left.\begin{aligned} \bar{\rho}^2 &= \xi^2 + \eta^2, \\ \bar{\Delta}^2 &= (\xi - 1)^2 + \eta^2. \end{aligned}\right\} \tag{5.33}$$

Поэтому для определения постоянных ξ_0 и η_0, удовлетворяющих уравнениям (5.32), мы будем иметь следующие два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \Phi(t;\ \xi,\ \eta) &= F \cdot \xi + \Xi = 0, \\ \Psi(t;\ \xi,\ \eta) &= F \cdot \eta + \mathrm{H} = 0. \end{aligned}\right\}. \tag{5.34}$$

В уравнения (5.34) не будут входить производные от координат Нехвила, равно как и от величин $\bar{\rho}$, $\bar{\Delta}$, так как при постоянных значениях ξ, η, ζ величины $\bar{\rho}$ и $\bar{\Delta}$ также будут некоторыми постоянными, а поэтому все производные от перечисленных величин будут равны нулю.

Однако время t входит явно в уравнения (5.34) посредством функции r_1, которая вообще есть функция времени.

Несмотря на это, уравнения (5.34) могут иметь, при выполнении некоторых дополнительных условий, решения, в которых ξ и η имеют постоянные значения.

Если такие решения существуют, то каждое из них определяет на плоскости $(\xi O \eta)$ некоторую постоянную точку, каждую из которых можем назвать, по установившейся традиции, *точкой либрации.*

Известно, что в плоской, круговой классической задаче мы знаем пять точек либрации, три из которых лежат на прямой, проходящей через точки M_0 и M_1, а две остальные являются вершинами равностороннего треугольника, основанием которого служит отрезок $\overline{M_0M_1}$.

В неклассической задаче, которую мы здесь рассматриваем, также могут существовать аналогичные решения, что мы сейчас и покажем. Рассмотрим сначала случай, в котором существуют решения, соответствующие вершинам равностороннего треугольника. Допустим, что такие решения существуют. Тогда уравнения (5.34) должны удовлетворяться тождественно при

$$\xi_0 = \frac{1}{2}, \quad \eta_0 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}; \tag{L}$$

будем иметь

$$\bar{\rho}_0 = \bar{\Delta}_0 = 1,$$

откуда из (5.22) следует также, что в этом случае

$$r = \Delta = r_1,$$

т. е. треугольник $(M_0M_1M_2)$ действительно окажется равносторонним. Та его вершина, которая находится в положительной

части плоскости, имеет координаты $\xi_0 = \frac{1}{2}$, $\eta_0 = +\frac{\sqrt{3}}{2}$, и мы будем обозначать ее (так и в классической задаче) (L_4), а противоположную ей точку с координатами $\xi_0 = -\frac{1}{2}$, $\eta_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ обозначим (L_5). Соответствующие решения системы (5.20) будем называть *лагранжевыми решениями* (или *треугольными*).

Эти лагранжевы решения существуют, как это можно видеть из формул (5.32), только при выполнении следующих условий:

$$\left.\begin{aligned} F_{10}(t;\ r_1,\ \dot{r}_1,\ \ddot{r}_1) &= F_{20}(t;\ r_1,\ \dot{r}_1,\ \ddot{r}_1), \\ F_{01}(t;\ r_1,\ \dot{r}_1,\ \ddot{r}_1) &= F_{21}(t;\ r_1,\ \dot{r}_1,\ \ddot{r}_1). \end{aligned}\right\} \tag{5.35}$$

Эти условия показывают, что точка M_0 действует на точки M_1 и M_2 по одному и тому же закону и что точка M_1 также действует на точки M_0 и M_2 тоже по одному закону, вообще отличному от предыдущего.

Условия (5.35) являются необходимыми и достаточными для существования лагранжевых решений и выполняются, например, всегда, если в рассматриваемой механической системе царствует один единственный закон, т. е. если

$$F_{01} = F_{10} = F_{20} = F_{21} = F,$$

в частности, если

$$F = F(r_1),$$

причем активные массы m_0 и m_1 совершенно произвольны.

Если условие (5.35) не выполняется, то уравнения (5.25) не допускают лагранжева решения в форме равностороннего треугольника, но это не значит, что не существуют решения другого типа.

Например, если $m_0 = m_1$, то при выполнении условий

$$\left.\begin{aligned} F_{10}(t;\ r_1,\ \dot{r}_1,\ \ddot{r}_1) &= F_{01}(t;\ r_1,\ \dot{r}_1,\ \ddot{r}_1), \\ F_{20}(t;\ r,\ \dot{r},\ \ddot{r}) &= F_{21}(t;\ r,\ \dot{r},\ \ddot{r}) \end{aligned}\right\} \tag{5.35'}$$

существует решение в форме равнобедренного треугольника с основанием (M_0M_1) и с вершинами в точках с координатами

$$\xi_0 = \frac{1}{2}, \quad \eta = \pm\eta_0, \tag{L'}$$

причем η_0 остается совершенно произвольной, равной высоте равнобедренного треугольника, а боковые стороны одинаковы, так как из (5.33) следует, что

$$\bar{\rho}_0 = \bar{\Delta}_0 = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4\bar{\eta}_0^2},$$

а значит,

$$r = \Delta = \bar{\rho}_0 \cdot r_1.$$

Действительно, легко проверить, что при перечисленных условиях уравнения (5.25) удовлетворяются тождественно при

$$\xi = \frac{1}{2}, \quad \eta = \eta_0, \quad \zeta = 0.$$

Заметим, что если все законы действующих сил одинаковы, то уравнения (5.25) допускают и решение (L), и решение (L'). В последнем случае будем обозначать вершины равнобедренного треугольника символами (L_4') и (L_5') соответственно.

Решение в форме равностороннего треугольника, в случае равенства активных масс, было известно в классической небесной механике давно. Мы видим теперь, что такое решение может существовать и при других законах действующих сил, лишь бы выполнялось условие (5.33′).

Если в случае равных масс взять $\eta_0 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, то мы получим равносторонний треугольник, т. е. лагранжево решение. Но тогда будем иметь

$$\bar{\rho} = \bar{\Delta} = 1$$

и

$$r = \Delta = r_1.$$

Поэтому, если выполняются условия (5.35′), то будут также, что нетрудно проверить, выполнены и условия (5.35).

Если теперь перейти обратно от координат Нехвила к координатам x, y, z во вращающейся системе координат, то мы получим лагранжево решение системы (5.11) в виде

$$x = \frac{1}{2} r_1, \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} r_1, \quad z = 0,$$

а переходя к первоначальным координатам с началом в M_0 и с неизменными направлениями осей, мы найдем лагранжево решение уравнений (5.9), которое, имея в виду, что

$$\frac{1}{2} = \cos 60^\circ, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ,$$

напишем следующим образом:

$$x_2 = r_1 \cos(v \pm 60^\circ), \quad y_2 = r_1 \sin(v \pm 60^\circ), \quad z_2 = 0,$$

причем знак «+» соответствует решению (L_4), а знак «—» — решению (L_5). Последние формулы показывают, что в лагранжевом решении точка M_2 описывает в плоскости (xOy) орбиту, подобную орбите точки M_1, причем в решении (L_4) точка M_2 опережает точку M_1 на 60°, а в решении (L_5) — отстает от M_1 на 60°. Треугольник $(M_0M_1M_2)$, непрерывно изменяясь, всегда остается равносторонним.

В круговой задаче $r_1 = a$ и $\dot{v} = n$, а следовательно, в круговой задаче точки M_1 и M_2 будут двигаться по одной и той же окружности с постоянной угловой скоростью.

В случае равнобедренного треугольника решение первоначальных уравнений (5.9) запишется в виде

$$x_2 = \frac{1}{2} r_1 (\cos v - 2\eta_0 \sin v), \quad y_2 = \frac{1}{2} r_1 (\sin v + 2\eta_0 \cos v), \quad z_2 = 0,$$

$$r_2 = \Delta = \frac{1}{2} r_1 \sqrt{1 + 4\eta_0^2}.$$

3. Равенства (5.32) показывают, что уравнения (5.20) будут также удовлетворены при

$$\xi = \xi_0 = \text{const}, \quad \eta = \eta_0 = 0, \quad \zeta = \zeta_0 = 0, \tag{E}$$

причем ξ_0 должна быть корнем уравнения

$$\Phi(t;\ \xi,\ 0) = 0 \tag{5.36}$$

при любом значении t.

Если такое решение существует, то точка M_2 всегда будет находиться на прямой (M_0M_1), образуя вместе с точками M_0 и M_1 неизменную конфигурацию. Такое решение мы будем называть *эйлеровым решением* (или *прямолинейным* решением).

В таком решении точка M_2 может находиться или слева от M_0, и мы будем обозначать ее в этом случае (L_1), или между M_0 и M_1 и тогда мы будем обозначать ее (L_2), или, наконец, точка M_2 может находиться справа от точки M_1 и мы будем обозначать ее тогда (L_3).

Каждый из этих трех возможных случаев удобнее рассматривать по отдельности, причем каждый раз задача будет заключаться сначала в доказательстве существования (или несуществования) корня уравнения (5.36), а затем в нахождении этого корня, что, вообще говоря, приходится выполнять методами приближенного анализа.

Вопрос о существовании корня уравнения (5.36) зависит от структуры законов действующих сил и в самом общем случае разрешен быть не может. Поэтому остается рассматривать различные частные случаи, представляющие механический или математический интерес.

Простейшим случаем задачи будет тот, в котором все действующие силы определяются законом Гука, так что имеем

$$F_{10} = f_{10} \cdot r_1, \quad F_{01} = f_{01} \cdot r_1, \quad F_{20} = f_{20} \cdot r, \quad F_{21} = f_{21} \cdot \Delta,$$

где все множители f_{ij} — вещественные постоянные или представляют каждый произведение одной и той же функции времени на постоянные. Уравнение (5.36) после сокращения

общего множителя, зависящего от t или постоянного, приведется к виду

$$[m_0(f_{10}-f_{20})+m_1(f_{01}-f_{21})]\cdot\xi=f_{01}-f_{21}, \qquad (5.36')$$

откуда видно, что наша задача в этом случае может иметь только одну точку либрации (если $f_{10}\neq f_{20}$) или же будет иметь бесчисленное множество таких точек (все точки оси $O\xi$), если $f_{10}=f_{20}$ и $f_{01}=f_{21}$, что имеет место, например, если все множители f_{ij} одинаковы.

Другим простым и наиболее интересным случаем будет тот, в котором все действующие силы определяются законом, выражающимся одной и той же степенью соответствующего расстояния с одним и тем же множителем пропорциональности, т. е. когда имеем

$$F_{10}=f\cdot r_1^{k+1}=F_{01}, \quad F_{20}=f\cdot r^{k+1}, \quad F_{21}=f\cdot\Delta^{k+1}, \qquad (5.37)$$

где k — какое-либо вещественное число (положительное или отрицательное), а f — вещественная постоянная или вещественная функция времени (непрерывная и однозначная).

Тогда уравнение (5.36) после сокращения на $f\cdot r_1^{k+1}$ приведется к виду

$$\Phi(\xi)=\xi-(1-\mu)\xi\bar{\rho}^k-\mu(\xi-1)\bar{\Delta}^k-\mu=0, \qquad (5.38)$$

где $\mu=m_1$, а за единицу массы принята сумма масс обеих точек, так что $m_0+m_1=1$ и $m_0=1-\mu$.

Для исследования этого уравнения примем за искомую величину расстояние предполагаемой точки либрации от начала координат, т. е. от точки M_0, которое обозначим для упрощения буквой x и рассмотрим прежде случай, когда показатель степени в (5.37) $k>0$ (случай $k=0$ соответствует закону Гука и был уже рассмотрен).

Если существует точка либрации (L_1), то $\xi=-x$, $\bar{\rho}=x\geqslant 0$ и $\bar{\Delta}=1+x$. Уравнение (5.38) для этого случая примет вид

$$\Phi_1(x,\mu)=-x+(1-\mu)x^{k+1}+\mu(1+x)^{k+1}-\mu=0, \qquad (5.39)$$

в точке (L_1) будет соответствовать неотрицательный вещественный корень этого уравнения.

Сразу видно, что $\Phi(0,\mu)=0$, так что одна точка либрации типа (L_1) заведомо существует при всяком положительном k и всегда совпадает с точкой M_0.

Чтобы выяснить вопрос о существовании других точек типа (L_1), отличных от M_0, составим производную по x:

$$\Phi_1'(x,\mu)=-1+(k+1)(1-\mu)x^k+\mu(k+1)(1+x)^k. \qquad (5.39')$$

Отсюда и из (5.39) находим

$$\Phi_1'(0, \mu) > 0 \quad \text{при} \quad (k+1)\mu > 1,$$
$$\Phi_1'(0, \mu) < 0 \quad \text{при} \quad (k+1)\mu < 1,$$
$$\Phi_1(1, \mu) = 2\mu(2^k - 1) > 0,$$
$$\Phi_1'(1, \mu) = (k+1)\mu(2^k - 1) + k > 0.$$

Из этих неравенств следует, что при $\mu(k+1) > 1$ либо нет отличного от нуля корня в промежутке $(0, 1)$, либо найдется четное число таких корней, а если $\mu(k+1) < 1$, то обязательно существует по крайней мере один корень в промежутке $(0, 1)$ или даже нечетное число таких корней. При $x > 1$ производная $\Phi_1'(x, \mu)$ всегда положительна, а поэтому на промежутке $(1, \infty)$ функция $\Phi_1(x, \mu)$ не имеет корней.

Таким образом, на отрезке $(-1, 0)$ оси абсцисс либо вовсе нет других точек либрации (L_1) $(\mu(k+1) > 1)$, либо существует нечетное число таких точек $(\mu(k+1) < 1)$, одна или несколько. На остальной части отрицательной оси абсцисс точек либрации не имеется.

Например, пусть $k = 1$. Тогда уравнение (5.39) — квадратное и имеет два вещественных корня: $x_1 = 0$ и $x_2 = 1 - 2\mu$, т. е. существует вторая точка (L_1), расстояние которой от M_0 равно $\bar{\rho} = 1 - 2\mu < 1$ и которая лежит левее точки M_0.

Переходим к вопросу о существовании точки либрации типа (L_2), т. е. находящейся между точками M_0 и (M_1). В этом случае $\xi = \bar{\rho} = x$, $\bar{\Delta} = 1 - x$ и уравнение (5.38) приводится к виду

$$\Phi_2(x, \mu) = x - (1-\mu)x^{k+1} + \mu(1-x)^{k+1} - \mu = 0. \quad (5.40)$$

Так как непосредственно видно, что $\Phi_2(0, \mu) = \Phi_1(1, \mu) = 0$, то мы всегда имеем две точки либрации типа (L_2), одна из которых совпадает с точкой M_0 и другая — с M_1.

Посмотрим, нет ли других точек (L_2) в промежутке $(0, 1)$, отличных от M_0 и M_1. Составляя опять производную по переменной x, имеем

$$\Phi_2'(x, \mu) = 1 - (k+1)(1-\mu)x^k - \mu(k+1)(1-x)^k. \quad (5.40')$$

Отсюда находим, что при $(k+1)\mu < 1$

$$\Phi_2'(0, \mu) > 0, \quad \Phi_2'(1, \mu) < 0,$$

и при $k > (k+1)\mu > 1$

$$\Phi_2'(0, \mu) < 0, \quad \Phi_2'(1, \mu) < 0.$$

Так как

$$\Phi_2\left(\frac{1}{2},\ \mu\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1-2\mu}{2^k}\right)>0,$$

то в первом случае ($(k+1)\mu<1$) функция Φ_2 либо не имеет корней в промежутке $(0, 1)$, либо имеет четное число корней, а во втором случае ($k>(k+1)\mu>1$) функция Φ_2 обязательно имеет по крайней мере один корень (или нечетное число корней). Примерами могут служить случаи $k=1$ и $k=2$. В первом случае уравнение (5.40) имеет только два корня, $x_1=0$ и $x_2=0$, а поэтому никаких других точек либрации между M_0 и M_1 нет. Во втором случае уравнение (5.40) — кубичное и имеет три вещественных корня $x_1=0$, $x_2=3\mu-1$, $x_3=1$. Таким образом, если $\frac{1}{3}<\mu<\frac{2}{3}$, то корень x_2 положителен и лежит в промежутке $(0, 1)$, соответствуя точке либрации (L_2), находящейся между M_0 и M_1. Если же $3\mu<1$, то корень x_2 отрицателен и точки либрации (L_2) между M_0 и M_1 опять нет.

Остается рассмотреть вопрос о существовании точки либрации (L_3), которая должна лежать справа от точки M_1.

В этом случае $\xi=\bar{\rho}=x>1$, $\bar{\Delta}=x-1$ и уравнение (5.38) будет иметь вид

$$\Phi_3(x,\ \mu)=x-(1-\mu)x^{k+1}-\mu(x-1)^{k+1}-\mu=0. \quad (5.41)$$

Так как $\Phi_3(1,\ \mu)\equiv 0$, то одна точка (L_3) во всяком случае существует, совпадая с точкой M_1.

Составим снова производную по τ. Мы имеем:

$$\Phi_3'(x,\ \mu)=1-(k+1)(1-\mu)x^k-(k+1)\mu(x-1)^k. \quad (5.41')$$

Отсюда при $(k+1)(1-\mu)<1$

$$\Phi_3'(1,\ \mu)>0,\quad \Phi_3'(2,\ \mu)<0,$$

а при $(k+1)(1-\mu)>0$

$$\Phi_3'(1,\ \mu)<0,\quad \Phi_3'(2,\ \mu)<0;$$

так как

$$\Phi_3(2,\ \mu)=1-(k+1)[\mu+(1-\mu)\cdot 2^k]<0,$$

то в первом случае функция Φ_3 имеет в промежутке $(1, 2)$ по крайней мере один корень (или нечетное число корней), а во втором случае функция Φ_3 либо не имеет корней в том же промежутке, либо имеет нечетное число корней. Примером опять может служить хотя бы тот же случай, когда $k=1$. В этом

случае уравнение (5.41) имеет два вещественных корня

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2\mu < 1$$

и точка (L_3) (справа от M_1) не существует.

Из (5.41) следует, что на промежутке $(2, \infty)$ функция $\Phi_3(x, \mu)$ не имеет корней, т. е. на части оси абсцисс при $x > 2$ точек либрации (L_3) больше нет.

Фактическое определение корней функции $\Phi(x, \mu)$ в любом из указанных случаев представляет весьма трудную математическую задачу, так как приводит к уравнению высокой степени или даже к иррациональному и трансцендентному уравнению, потому что показатель степени k в (5.37) может быть вообще и иррациональным и трансцендентным числом.

В случае законов сил более сложного вида задача делается еще более трудной. Поэтому мы ограничимся здесь только разобранными примерами.

4. Рассмотрим в заключение наиболее важный для приложений в небесной механике случай, когда показатель k в законах (5.37) есть число отрицательное. Пусть $k = -N$, где $N > 0$. Освобождаясь в (5.38) от знаменателей, мы приведем нашу задачу к рассмотрению следующего уравнения:

$$R(\xi, \mu) = \xi\bar{\rho}^N\bar{\Delta}^N - (1-\mu)\xi\bar{\Delta}^N - \mu(\xi - 1)\bar{\rho}^N - \mu\bar{\rho}^N\bar{\Delta}^N = 0, \quad (5.42)$$

где, так же как и выше, будем считать неизвестной величиной расстояние $\bar{\rho}$, которое всегда есть величина положительная и которую опять будем обозначать буквой x.

Теперь, так же как и в предыдущем разделе, будем поочередно рассматривать три случая.

Допустим, что имеется точка либрации (L_1) слева от точки M_0. Тогда $-\xi = \bar{\rho} = x$, $\bar{\Delta} = 1 + x$, и уравнение (5.42), после сокращения общего множителя, можно написать в виде

$$R_1(x, \mu) = x^N(1+x)^{N-1} - (1-\mu)(1+x)^{N-1} - \mu x^{N-1} + \\ + \mu x^{N-1}(1+x)^{N-1} = 0. \quad (5.43)$$

Вычисляем теперь значения функции R_1 на концах промежутка $(0, 1)$. Мы имеем:

$$R_1(0, \mu) = -(1-\mu) < 0, \quad R_1(1, \mu) = \mu(2^N - 1) > 0,$$

откуда следует (по свойствам непрерывности), что в промежутке $(0, 1)$ функция $R_1(x, \mu)$ имеет по крайней мере один корень. Если этих корней найдется несколько, то их число заведомо нечетное. Таким образом, на отрезке оси абсцисс $(-1, 0)$ существует точка либрации (L_1) (или, может быть, нечетное число этих точек). Но при $\mu = 0$ уравнение (5.43) имеет единственный вещественный корень $x_1 = 1$. Дифференцируя

(5.43) по x, находим

$$\frac{\partial R_1(x, \mu)}{\partial x} = R_1'(x, \mu) = x^{N-1}(1+x)^{N-1} - \\ - (1-\mu)(1+Nx)(1+x)^{N-1} - \mu x[(1-N)x - N], \quad (5.43')$$

откуда

$$R_1'(1, 0) = -N2^{N-1} \neq 0.$$

По теореме о неявных функциях отсюда заключаем, что при $\mu \neq 0$, но достаточно малом, уравнение (5.43) имеет единственный корень, стремящийся к 1 при $\mu \to 0$.

Если N есть целое число, не равное 1, то функция $R_1(x, \mu)$ разложима по степеням x и указанный корень есть функция от μ, разложимая в абсолютно сходящийся ряд, расположенный по степеням μ. Вычисляя первые члены этого ряда, мы найдем

$$x(\mu) = 1 - \frac{4\mu}{3N-2}\left(1 - \frac{1}{2^N}\right) + \ldots \quad (5.43'')$$

Таким образом, при μ, достаточно малом, на отрезке $(-1, 0)$ оси абсцисс существует единственная точка либрации (L_1), приближающаяся к точке -1, когда $\mu \to 0$.

Если N не есть целое число, то условия теоремы существования не выполняются и теорема непосредственно не применима.

Однако ряд (5.43″) можно составить при любом положительном $N \neq 1$, но мы не можем утверждать без дополнительного исследования, что этот ряд всегда будет абсолютно сходящимся. Случай $N = 1$ вообще исключается из рассмотрения, так как тогда $k + 1 = 0$ и задача не имеет смысла.

Переходим к вопросу о существовании точки (L_2). Если такая точка существует, то $\xi = \bar{\rho} = x$, $\bar{\Delta} = 1 - x = y$ и уравнение (5.42) может быть приведено к следующему виду:

$$R_2(y; \mu) = y^{N-1}(1-y)^N - (1-\mu)y^{N-1} + \\ + \mu(1-y)^{N-1} - \mu y^{N-1}(1-y)^{N-1} = 0$$

или к виду

$$R_2(y, \mu) = y^{N-1}[(1-y)^N - 1] + \\ + \mu\left[y^{N-1} + (1-y)^{N-1} - y^{N-1}(1-y)^{N-1}\right] = 0. \quad (5.44)$$

Таким образом, в рассматриваемом теперь случае за искомую величину взято расстояние предполагаемой точки либрации (L_2) от точки M_1.

Уравнение (5.44) показывает, что функция $R_2(y, \mu)$ на концах промежутка $0 < y < 1$ имеет следующие значения:

$$R_2(0, \mu) = \mu > 0, \quad R_2(1, \mu) = \mu - 1 < 0.$$

Таким образом, функция $R_2(y, \mu)$ имеет в промежутке $(0, 1)$ по

крайней мере один корень (или даже нечетное число корней), соответствующий точке либрации (L_2) между M_0 и M_1.

Однако этот корень нельзя представить рядом, расположенным по степеням параметра μ, как в предыдущем случае, даже если N есть целое число. Действительно, при $\mu = 0$ мы получаем из (5.44)

$$R_2(y, 0) = y^{N-1}[(1-y)^N - 1]. \tag{5.44'}$$

Но разлагая $(1-y)^N$ в ряд бинома, что возможно при любом вещественном N, так как искомое y заведомо меньше единицы, мы найдем из (5.44′)

$$R_2(y, 0) = y^N\left[-N + \frac{1}{2}N(N-1)y + \ldots\right],$$

что показывает, что при целом N функция $R_2(y, 0)$ имеет корень $y_1 = 0$ кратности N.

Чтобы обойти это затруднение, мы можем поступить так же, как это делается и в классической задаче, т. е. положим

$$\frac{1}{N}\mu = \chi^N,$$

разрешим затем уравнение (5.44) относительно y^N и извлечем корень N-й степени из обеих частей полученного равенства (все эти операции возможны и при любом N).

В результате мы получим уравнение

$$y(\chi) = \chi\left[\frac{y^{N-1} + (1-y)^{N-1} - y^{N-1}(1-y)^{N-1}}{1 - \frac{1}{2}(N-1)y + \ldots}\right]^{\frac{1}{N}}. \tag{5.44''}$$

Уравнение (5.44′) показывает, что при любом N искомая величина y разложима в ряд, расположенный по целым, положительным степеням χ, а следовательно, по целым, положительным степеням величины $\left(\frac{\mu}{N}\right)^{\frac{1}{N}}$, и мы получим

$$y = \left(\frac{\mu}{N}\right)^{\frac{1}{N}} + \ldots, \quad x = 1 - \left(\frac{\mu}{N}\right)^{\frac{1}{N}} + \ldots \tag{5.44'''}$$

Ряды (5.44‴) сходятся абсолютно, во всяком случае, когда N есть число целое, но эти ряды могут оказаться сходящимися и в других случаях. Точка (L_2), соответствующая рядам (5.44‴), приближается к точке M_1, когда μ стремится к нулю (под μ подразумевается, как обычно, меньшая из двух масс точек M_0 и M_1).

Оставшийся случай, т. е. вопрос о существовании точки (L_3), расположенной справа от M_1, рассматривается совершенно так

же, как и предыдущий. Беря опять за искомую неизвестную расстояние $\bar{\Delta} = y$, имеем $x = 1 + y$ и уравнение (5.42) приведется к следующей форме:

$$R_3(y, \mu) = y^{N-1}[(1+y)^N - 1] + \\ + \mu[y^{N-1} - (1+y)^{N-1} - y^{N-1}(1+y)^{N-1}] = 0. \qquad (5.45)$$

Из этого уравнения находим

$$R_3(0, \mu) = -\mu < 0, \quad R_3(1, \mu) = (1-\mu)(2^N - 1) > 0,$$

откуда заключаем, что функция $R_3(y, \mu)$ имеет в промежутке $0 < y < 1$ один корень (или нечетное число корней).

Этот корень соответствует точке либрации (L_3), лежащей на оси абсцисс между точкой M_1 и точкой, абсцисса которой равна единице.

Этот корень находим так же, как и в предыдущем случае. Действительно, при $\mu = 0$ уравнение (5.45) приводится к виду

$$R_3(y, 0) = y^{N-1}[(1+y)^N - 1] = 0, \qquad (5.45')$$

что опять можно написать следующим образом:

$$R_3(y, 0) = y^N\left[N + \frac{1}{2}N(N-1)y + \ldots\right] = 0.$$

Следовательно, если N — целое число, то уравнение (5.45) имеет корень $y_1 = 0$ кратности N.

Полагая опять $\mu = N\chi^N$ и повторяя те же действия, мы получим уравнение

$$y = \chi\left[\frac{y^{N-1}(1+y)^{N-1} + (1+y)^{N-1} - y^{N-1}}{1 + \frac{1}{2}(N-1)y + \ldots}\right]^{\frac{1}{N}}, \qquad (5.45'')$$

решение которого находим в виде ряда, абсолютно сходящегося при достаточно малом μ, когда N — целое (но такой ряд может оказаться сходящимся и в других случаях, когда N есть дробное, иррациональное или трансцендентное число):

$$y = \left(\frac{\mu}{N}\right)^{\frac{1}{N}} + \ldots, \quad x = 1 + \left(\frac{\mu}{N}\right)^{\frac{1}{N}} + \ldots, \qquad (5.45''')$$

расположенного по целым положительным степеням $\left(\frac{\mu}{N}\right)^{\frac{1}{N}}$.

Ряды (5.45''') определяют положение точки (L_3), которая приближается к точке M_1, когда параметр μ стремится к нулю.

Итак, когда μ уменьшается, приближаясь к нулю, каждая из найденных точек либрации стремится к предельной точке, которой для (L_1) является точка -1, а точки (L_2) и (L_3) обе

стремятся к точке $+1$. Возникает вопрос, как будут изменяться положения точек либрации, когда μ возрастает, приближаясь к своему предельному значению $-\frac{1}{2}$?

Очевидно, что при возрастании μ каждая из точек либрации будет двигаться в противоположном направлении, т. е. точка (L_1) будет перемещаться слева направо, точка (L_2) — справа налево и точка (L_3) — слева направо. Однако определить предельные положения точек либрации весьма затруднительно и это можно сделать только путем численного анализа, полагая в уравнениях (5.43)—(5.45) $\mu = \frac{1}{2}$ и вычисляя для каждого из полученных уравнений вещественный корень, численно меньший единицы.

Примечание. Все результаты разделов 2 и 4 этого параграфа остаются справедливыми, конечно, и для классической задачи, т. е. для случая, когда все действующие силы определяются законом Ньютона. Для этого нужно только в разделе 2 положить

$$F_{01} = F_{10} = \frac{f}{r_1^2}, \quad F_{20} = \frac{f}{r^2}, \quad F_{21} = \frac{f}{\Delta^2},$$

а в разделе 4 просто положить $N = 3$.

Для этого случая уравнения, определяющие положения точек либрации, являются уравнениями 5-й степени, которые называются *уравнениями Эйлера* и имеют следующий вид:

$$R_1(x, \mu) = x^5 + (1+\mu)x^4 + (1+2\mu)x^3 - (1-\mu)x^2 - \\ - 2(1-\mu)x - (1-\mu) = 0. \qquad (E_1)$$

Это уравнение имеет только одну перемену знаков, а поэтому, по теореме Декарта, имеет единственный положительный корень, который в общем случае, как мы уже знаем, лежит в промежутке (0, 1). Для достаточно малых значений μ этот корень определяется абсолютно сходящимся рядом, который получаем из (5.43″) в виде

$$x(\mu) = 1 - \frac{1}{2}\mu + \ldots \qquad (L_1)$$

Далее, из (5.44) имеем

$$R_2(y, \mu) = y^5 - (3-\mu)y^4 - (3-2\mu)y^3 - \mu y^2 - 2\mu y - \mu = 0. \qquad (E_2)$$

Это уравнение также имеет только одну перемену знаков и, следовательно, имеет в промежутке (0, 1) единственный положительный корень. При $\mu = 0$ это уравнение имеет тройной корень $y = 0$, который для малых значений μ определяется

рядом, который получим из (5.44'''):

$$y = \left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + \ldots, \quad x = 1 - \left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + \ldots. \qquad (L_2)$$

Наконец, из (5.45) выводим

$$R_3(y, \mu) = y^5 + (3 - \mu) y^4 + (3 - 2\mu) y^3 - \mu y^2 - 2\mu y - \mu = 0, \quad (E_3)$$

откуда заключаем, что в промежутке (0, 1) это уравнение имеет единственный, положительный корень. Так как при $\mu = 0$ (E_3) имеет тройной корень $y = 0$, то для достаточно малых μ решение этого уравнения, обращающееся в нуль при $\mu = 0$, представляется рядом

$$y = \left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + \ldots,$$

откуда выводим

$$x = 1 + \left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + \ldots. \qquad (L_3)$$

Таким образом, в классической ограниченной задаче трех тел имеем три точки либрации, лежащие на прямой (M_0M_1). В системе координат с осями неизменного направления каждая из трех этих точек описывает в плоскости движения точки M_1 орбиту, подобную орбите этой точки, т. е. эллипс, параболу или гиперболу. Если орбита точки M_1 есть окружность или прямая линия, то и каждая из трех эйлеровых точек либрации описывает также окружность или движется, оставаясь всегда на прямой (M_0M_1).

§ 3. Уравнения возмущенного движения вблизи точек либрации

1. Для аналитического исследования устойчивости какого-либо движения механической системы необходимо иметь аналитическое решение уравнений движения. Такая возможность в задачах небесной механики представляется весьма редко и вообще только в случаях, когда уравнения движения при помощи некоторых преобразований могут быть приведены к уравнениям, допускающим решения, в которых все неизвестные имеют постоянные значения.

В общей ограниченной задаче трех тел (материальных точек) уравнения движения пассивно действующей точки M_2 могут быть преобразованы к виду (5.20), и эти уравнения, как было показано в предыдущем параграфе, могут допускать при из-