

рядом, который получим из (5.44''):

$$y = \left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + \dots, \quad x = 1 - \left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + \dots \quad (L_2)$$

Наконец, из (5.45) выводим

$$R_3(y, \mu) = y^5 + (3 - \mu)y^4 + (3 - 2\mu)y^3 - \mu y^2 - 2\mu y - \mu = 0, \quad (E_3)$$

откуда заключаем, что в промежутке  $(0, 1)$  это уравнение имеет единственный, положительный корень. Так как при  $\mu = 0$  ( $E_3$ ) имеет тройной корень  $y = 0$ , то для достаточно малых  $\mu$  решение этого уравнения, обращающееся в нуль при  $\mu = 0$ , представляется рядом

$$y = \left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + \dots,$$

откуда выводим

$$x = 1 + \left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + \dots \quad (L_3)$$

Таким образом, в классической ограниченной задаче трех тел имеем три точки либрации, лежащие на прямой  $(M_0M_1)$ . В системе координат с осями неизменного направления каждая из трех этих точек описывает в плоскости движения точки  $M_1$  орбиту, подобную орбите этой точки, т. е. эллипс, параболу или гиперболу. Если орбита точки  $M_1$  есть окружность или прямая линия, то и каждая из трех эйлеровых точек либрации описывает также окружность или движется, оставаясь всегда на прямой  $(M_0M_1)$ .

### § 3. Уравнения возмущенного движения вблизи точек либрации

1. Для аналитического исследования устойчивости какого-либо движения механической системы необходимо иметь аналитическое решение уравнений движения. Такая возможность в задачах небесной механики представляется весьма редко и вообще только в случаях, когда уравнения движения при помощи некоторых преобразований могут быть приведены к уравнениям, допускающим решения, в которых все неизвестные имеют постоянные значения.

В общей ограниченной задаче трех тел (материальных точек) уравнения движения пассивно действующей точки  $M_2$  могут быть преобразованы к виду (5.20), и эти уравнения, как было показано в предыдущем параграфе, могут допускать при из-

вестных условиях решения, в которых координаты Нехвила  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\zeta$  остаются постоянными для всех значений независимой переменной  $v$ , а значит, и при всех значениях  $t$ .

Этим решениям соответствуют лагранжевы и эйлеровы точки либрации, и мы можем поставить вопрос об устойчивости в смысле Ляпунова (см. главу II) этих либрационных решений.

Для этого составим прежде всего уравнения в о з м у щ е н н о г о д в и ж е н и я точек  $M_2$ , т. е. движения, начальные условия которого мало отличаются от начальных условий н е в о з м у щ е н н о г о д в и ж е н и я (движения, соответствующего какой-либо из пяти точек либрации), предполагая, конечно, что соответствующая точка существует.

Итак, предположим, что существует точка либрации ( $L$ ) с постоянными координатами  $\xi = \xi_0$ ,  $\eta = \eta_0$  и  $\zeta = \zeta_0 = 0$ , так как все точки либрации находятся в плоскости ( $O\xi\eta$ ).

Рассмотрим возмущенное движение, близкое к невозмущенному, полагая

$$\xi = \xi_0 + x, \quad \eta = \eta_0 + y, \quad \zeta = z. \quad (5.46)$$

Буквы  $x$ ,  $y$ ,  $z$  обозначают здесь отклонения от  $\xi_0$ ,  $\eta_0$ ,  $\zeta_0 = 0$ , т. е. от нехвиловских координат точек либрации и, разумеется, не совпадают с координатами точки  $M_2$  во вращающихся осях, и мы их будем употреблять теперь исключительно для большей простоты обозначений, так как придумать для возмущений какие-либо другие простые обозначения затруднительно и неудобно.

Делая подстановку (5.46) в уравнения (5.20), мы получим уравнения возмущенного (около рассматриваемой точки либрации) движения точки  $M_2$ , которые напишем в виде

$$\left. \begin{array}{l} x'' - 2y' = X, \\ y'' + 2x' = Y, \\ z'' + z = Z. \end{array} \right\} \quad (5.47)$$

Правые части уравнений (5.47) (которые мы опять обозначили для простоты теми же буквами, как и в уравнениях (5.11)) получаются преобразованием (5.46) правых частей уравнений (5.20) и являются функциями независимой переменной  $v$ , координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , и вообще их первых и вторых производных по  $v$ . Эти правые части обращаются тождественно в нули, когда все переменные и их производные равны нулю, т. е. для невозмущенного движения, соответствующего рассматриваемой точке либрации ( $L$ ).

Разлагая теперь правые части (5.47) в ряды по степеням  $x, y, z$  и их производных, мы получим

$$\left. \begin{aligned} x'' - 2y' &= p_{11}x + p_{12}y + q_{11}x' + q_{12}y' + r_{11}x'' + r_{12}y'' + \dots, \\ y'' + 2x' &= p_{21}x + p_{22}y + q_{21}x' + q_{22}y' + r_{21}x'' + r_{22}y'' + \dots, \\ z'' + z &= pz + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (5.48)$$

где все коэффициенты — известные функции  $v$  или известные вещественные постоянные.

Последний случай будем иметь, например, для круговой ограниченной задачи ( $r_1 = \text{const}$ ), когда все действующие силы не зависят от времени.

Заметим, что выписанные в (5.48) линейные члены в первых двух уравнениях не содержат величин  $z, z', z''$ , а в третье уравнение не входят члены с  $x, y$  и их производными. Это объясняется тем, что  $z, z'$  и  $z''$  входят в первые два уравнения только через посредство  $\rho, \bar{\Delta}$  и их производных, а правая часть третьего уравнения содержит  $z$  множителем, который будет входить и во все остальные производные от  $Z$  по  $x$  и  $y$ . Но члены высших порядков относительно возмущений и их производных первого и второго порядков вообще входят в разложения величин  $X, Y, Z$ .

2. Если в уравнениях (5.48) отбросить все члены порядка выше первого, то получим уравнения первого приближения (уравнения в вариациях, по терминологии Пуанкаре), которые распадаются, как непосредственно видно, на систему двух уравнений с неизвестными  $x, y$  и одно, независимое от первой системы, уравнение с неизвестной  $z$ .

Теперь выпишем формулы для определения коэффициентов уравнений в вариациях системы (5.48) отдельно для случая лагранжевых точек либрации и отдельно для эйлеровых.

Для лагранжевых точек либрации ( $L_4$ ) и ( $L_5$ ) мы имеем

$$\xi_0 = \frac{1}{2}, \quad \eta_0 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad r = \Delta = r_1, \quad \bar{\rho} = \bar{\Delta} = 1. \quad (5.49)$$

Положим теперь для сокращения

$$\left. \begin{aligned} F &= (1 - \mu)F_{10} + \mu F_{01}, \quad \Phi = (1 - \mu)F_{10} - \mu F_{01}, \\ F^* &= (1 - \mu)F_{20}^* + \mu F_{21}^*, \quad \Phi^* = (1 - \mu)F_{20}^* - \mu F_{21}^*, \\ F_{20}^* &= \frac{\partial F_{20}}{\partial r_1} \cdot r_1 + \frac{\partial F_{20}}{\partial \dot{r}_1} \cdot \dot{r}_1 + \frac{\partial F_{20}}{\partial \ddot{r}_1} \cdot \ddot{r}_1, \\ F_{21}^* &= \frac{\partial F_{21}}{\partial r_1} \cdot r_1 + \frac{\partial F_{21}}{\partial \dot{r}_1} \cdot \dot{r}_1 + \frac{\partial F_{21}}{\partial \ddot{r}_1} \cdot \ddot{r}_1, \end{aligned} \right\} \quad (5.50)$$

где вследствие (5.49) функции  $F_{20}$  и  $F_{21}$  зависят только от  $v, r_1, \dot{r}_1, \ddot{r}_1$  и, следовательно, являются известными функциями от  $v$

или известными постоянными. (Напомним, в самом деле, что движение точки  $M_1$  в плоскости  $(x_1 M_0 y_1)$  предполагается известным, так что  $r_1$  и ее производные — известные функции  $v$ , если же  $r_1 = \text{const}$ , то  $\dot{r}_1 = 0, \ddot{r}_1 = 0$ .)

Выполняя затем все необходимые для нахождения коэффициентов уравнений первого приближения дифференцирования и упрощения полученных формул, мы найдем следующие выражения для этих коэффициентов для лагранжевых точек либрации ( $L_4$ ) и ( $L_5$ ) (заметим при этом, что когда в формуле стоит двойной знак, то знак «+» соответствует точке ( $L_4$ ), лежащей в верхнем правом квадранте плоскости ( $\xi M_0 \eta$ ), а знак «—» относится к точке ( $L_5$ ), лежащей в нижнем правом квадранте той же плоскости):

$$\left. \begin{aligned} p_{11} &= \frac{1}{4} \cdot \frac{r_1^3}{c^2} (F - F^*), \\ p_{12} &= -\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{r_1^3}{c^2} (\Phi - \Phi^*), \\ p_{21} &= \pm \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{r_1^3}{c^2} (\Phi - \Phi^*), \\ p_{22} &= \frac{3}{4} \cdot \frac{r_1^3}{c^2} (F - F^*), \end{aligned} \right\} \quad (5.51)$$

$$\left. \begin{aligned} q_{11} &= -\frac{r_1^2}{4c} \cdot \frac{\partial F}{\partial \dot{r}_1}, \\ -q_{12} &= \pm \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{r_1^2}{c} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{r}_1}, \\ -q_{21} &= \pm \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{r_1^2}{c} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{r}_1}, \\ q_{22} &= -\frac{3}{4} \cdot \frac{r_1^2}{c} \cdot \frac{\partial F}{\partial \dot{r}_1}, \end{aligned} \right\} \quad (5.51')$$

$$\left. \begin{aligned} r_{11} &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{\partial F}{\partial \ddot{r}}, \\ -r_{12} &= \pm \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \ddot{r}}, \\ -r_{21} &= \pm \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \ddot{r}}, \\ r_{22} &= -\frac{3}{4} \cdot \frac{\partial F}{\partial \ddot{r}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.51'')$$

<sup>\*)</sup> Предполагается, конечно, что все функции  $F_2$ , дифференцируемые любое число раз по каждой из входящих в них переменных.

Наконец,

$$p = 0. \quad (5.51'')$$

Из этих формул следует, что в самом общем случае мы имеем всегда

$$p_{22} = 3p_{11}, \quad p_{21} = p_{12}; \quad q_{22} = 3q_{11}, \quad q_{21} = q_{12}, \quad r_{22} = 3r_{11}, \quad r_{21} = r_{12},$$

и уравнения в вариациях для треугольных точек либрации примут вид

$$\left. \begin{aligned} x'' - 2y' &= p_{11}x + p_{12}y + q_{11}x' + q_{12}y' + r_{11}x'' + r_{12}y'', \\ y'' + 2x' &= p_{12}x + 3p_{11}y + q_{12}x' + 3q_{11}y' + r_{12}x'' + 3r_{11}y'', \\ z'' + z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.52)$$

и для составления этих уравнений потребуется вычислить только шесть величин:  $p_{11}$ ,  $p_{12}$ ,  $q_{11}$ ,  $q_{12}$ ,  $r_{11}$ ,  $r_{12}$ .

Для эйлеровых решений, т. е. для точек либрации ( $L_i$ ) ( $i = 1, 2, 3$ ), введем сначала для сокращения формул следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} F_{20}^* &= \frac{\partial F_{20}}{\partial r} \cdot r + \frac{\partial F_{20}}{\partial \dot{r}} \dot{r} + \frac{\partial F_{20}}{\partial \ddot{r}} \ddot{r}, \\ F_{21}^* &= \frac{\partial F_{21}}{\partial \Delta} \cdot \Delta + \frac{\partial F_{21}}{\partial \dot{\Delta}} \dot{\Delta} + \frac{\partial F_{21}}{\partial \ddot{\Delta}} \ddot{\Delta}, \end{aligned} \right\} \quad (5.53)$$

где, как и прежде,

$$r = r_1 \bar{r}, \quad \Delta = r_1 \bar{\Delta}.$$

Теперь для коэффициентов уравнений в вариациях для точек ( $L_i$ ) имеем следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} p_{11}^{(i)} &= \frac{r_1^3}{c^2} \left[ F(M_1) - \frac{1-\mu}{\bar{r}_i} F_{20}^*(L_i) - \frac{\mu}{\bar{\Delta}_i} F_{21}^*(L_i) \right], \\ p_{12}^{(i)} &= p_{21}^{(i)} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.54)$$

$$\left. \begin{aligned} p_{22}^{(i)} &= \frac{r_1^3}{c^2} \left[ F(M_1) - \frac{1-\mu}{\bar{r}_i} F_{20}(L_i) - \frac{\mu}{\bar{\Delta}_i} F_{21}(L_i) \right], \\ q_{11}^{(i)} &= -\frac{r^2}{c} \left[ (1-\mu) \left( \frac{\partial F_{20}}{\partial \dot{r}} \right)_i + \mu \left( \frac{\partial F_{21}}{\partial \dot{\Delta}} \right)_i \right], \\ q_{12}^{(i)} &= q_{21}^{(i)} = q_{22}^{(i)} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.54')$$

$$\left. \begin{aligned} r_{11}^{(i)} &= -(1-\mu) \left( \frac{\partial F_{20}}{\partial \ddot{r}} \right)_i - \mu \left( \frac{\partial F_{21}}{\partial \ddot{\Delta}} \right), \\ r_{12}^{(i)} &= r_{21}^{(i)} = r_{22}^{(i)} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.54'')$$

Наконец,

$$p^{(i)} = p_{22}^{(i)}. \quad (5.54''')$$

Значок «*i*» во всех этих формулах указывает, что всюду вместо  $\bar{\rho}$  и  $\bar{\Delta}$  нужно поставить  $\rho_i$  и  $\Delta_i$ , соответствующие точке  $(L_i)$ .

Уравнения в вариациях для точки  $(L_i)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) напишутся теперь следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} x'' - 2y' = p_{11}^{(i)}x + q_{11}^{(i)}x' + r_{11}^{(i)}x'', \\ y'' + 2x' = p_{22}^{(i)}y, \\ z'' + z = p_{22}^{(i)}z. \end{array} \right\} \quad (5.55)$$

3. В некоторых случаях, которые полезно отметить, выражения для коэффициентов уравнений в вариациях несколько упрощаются.

Пусть, например, все действующие силы подчиняются одному и тому же закону, т. е.

$$F_{01} = F_{10} = F_{20} = F_{21} = F.$$

Тогда в формулах (5.50)

$$\begin{aligned} F &= F(v, r_1, \dot{r}_1, \ddot{r}_1), & \Phi &= (1 - 2\mu) F(v, r_1, \dot{r}_1, \ddot{r}_1), \\ F^* &= F^*(v, r_1, \dot{r}_1, \ddot{r}_1), & \Phi^* &= (1 - 2\mu) F^*(v, r_1, \dot{r}_1, \ddot{r}_1), \\ F^* &= \frac{\partial F}{\partial r_1} \cdot r_1 + \frac{\partial F}{\partial \dot{r}_1} \dot{r}_2 + \frac{\partial F}{\partial \ddot{r}_1} \ddot{r}_1, \end{aligned}$$

а в формулах (5.53)

$$F_{20} = F(v, r, \dot{r}, \ddot{r}), \quad F_{21} = F(v, \Delta, \dot{\Delta}, \ddot{\Delta}).$$

Вернемся к общему случаю, но допустим, что функции  $F_{ij}$  не содержат вторых производных от соответствующих расстояний. Тогда, как видно из (5.51''), коэффициенты  $r_{11}$ ,  $r_{12}$ ,  $r_{21}$ ,  $r_{22}$  в уравнениях (5.52) все равны нулю и система (5.52) примет вид

$$\left. \begin{array}{l} x'' - 2y' = p_{11}x + p_{12}y + q_{11}x' + q_{12}y', \\ y'' + 2x' = p_{12}x + 3p_{11}y + q_{12}x' + 3q_{11}y', \\ z'' + z = 0, \end{array} \right\} \quad (5.52')$$

а система (5.54) в этом случае имеет вид

$$\left. \begin{array}{l} x'' - 2y' = p_{11}^{(i)}x + q_{11}^{(i)}x', \\ y'' + 2x' = p_{22}^{(i)}y, \\ z'' + z = p_{22}^{(i)}z. \end{array} \right\} \quad (5.55')$$

Если функции  $F_{ij}$  не содержат также первых производных, то все коэффициенты при  $x'$  и  $y'$  в (5.52') и (5.55') также равны нулю и уравнения (5.52') и (5.55') еще более упростятся и напишутся соответственно следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} x'' - 2y' = p_{11}x + p_{12}y, \\ y'' + 2x' = p_{12}x + 3p_{11}y, \\ z'' + z = 0, \end{array} \right\} \quad (5.52'')$$

$$\left. \begin{array}{l} x'' - 2y' = p_{11}^{(i)}x, \\ y'' + 2x' = p_{22}^{(i)}y, \\ z'' + z = p_{22}^{(i)}z. \end{array} \right\} \quad (5.55'')$$

Пусть все законы сил одинаковы и притом не зависят явно от независимой переменной. Уравнения (5.52'') и (5.55'') сохраняют свой вид, а их коэффициенты имеют в этом случае следующие значения:

$$\left. \begin{array}{l} p_{11} = \frac{1}{4} \cdot \frac{r_1^3}{c^2} \left[ F(r_1) - r_1 \frac{dF(r_1)}{dr_1} \right], \\ p_{12} = \pm \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{r_1^3}{c^2} (1 - 2\mu) \left[ F(r_1) - r_1 \frac{dF(r_1)}{dr_1} \right], \\ p_{22} = 3p_{11}, \\ p_{11}^{(i)} = \frac{r_1^3}{c^2} \left[ F(r_1) - (1 - \mu) r_1 \frac{dF(r_i)}{dr_i} - \mu r_1 \frac{dF(\Delta_i)}{d\Delta_i} \right], \\ p_{22}^{(i)} = \frac{r_1^3}{c^2} \left[ F(r_1) - \frac{1 - \mu}{\bar{\rho}_i} F(r_i) - \frac{\mu}{\bar{\Delta}_i} F(\Delta_i) \right]. \end{array} \right\} \quad (5.56)$$

В частности, для случая степенного закона (5.37) из (5.56) находим

$$\left. \begin{array}{l} p_{11} = -\frac{fk}{4c^2} r_1^{k+4}, \quad -p_{12} = \pm \frac{fk(1-2\mu)\sqrt{3}}{4c^2} r_1^{k+4}, \quad p_{22} = 3p_{11}, \\ p_{11}^{(i)} = \frac{fr_1^{k+4}}{c^2} \{1 - (k+1)[(1-\mu)\bar{\rho}_i^k + \mu\bar{\Delta}_i^k]\}, \\ p_{22}^{(i)} = \frac{fr_1^{k+4}}{c^2} \{1 - [(1-\mu)\bar{\rho}_i^k + \mu\bar{\Delta}_i^k]\}. \end{array} \right\} \quad (5.56')$$

Для закона Ньютона  $k = -3$ ,

$$r_1 = \frac{p}{1 + e \cos v} = p\bar{r}_1, \quad p = \frac{c^2}{f(m_0 + m_1)} = \frac{c^2}{f},$$

так как сумма масс двух активных точек взята за единицу. Поэтому формулы (5.56') дают для этого случая

$$\left. \begin{aligned} p_{11} &= \frac{3}{4} \bar{r}_1, & p_{12} &= \pm \frac{3\sqrt{3}}{4} (1 - 2\mu) \bar{r}_1, & p_{22} &= \frac{9}{4} \bar{r}_1, \\ p_{11}^{(i)} &= \bar{r}_1 (1 + 2A_i), & p_{22}^{(i)} &= \bar{r}_1 (1 - A_i), \\ \bar{r}_1 &= (1 + e \cos v)^{-1}, \\ A_i &= \frac{1 - \mu}{\hat{\rho}_i^3} + \frac{\mu}{\Delta_i^3} > 0. \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} (5.56') \\ (5.56'') \end{aligned}$$

Уравнения в вариациях для ньютоновской ограниченной задачи имеют, следовательно, следующий вид:  
для  $(L_i)$  ( $i = 1, 2, 3$ )

$$\left. \begin{aligned} x'' - 2y' &= \bar{r}_1 (1 + 2A_i) x, \\ y'' + 2x' &= \bar{r}_1 (1 - A_i) y, \\ z'' + z &= \bar{r}_1 (1 - A_i) z \end{aligned} \right\} \quad (5.57)$$

и для  $(L_i)$  ( $i = 4, 5$ )

$$\left. \begin{aligned} x'' - 2y' &= \bar{r} \left[ \frac{3}{4} x + B_i y \right], \\ y'' + 2x' &= \bar{r} \left[ B_i x + \frac{9}{4} y \right], \\ z'' + z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.58)$$

где

$$B_i = (-1)^i \frac{3\sqrt{3}}{4} (1 - 2\mu). \quad (5.58')$$

Для ньютоновской круговой ограниченной задачи

$$e = 0, \quad \bar{r}_1 = 1,$$

и уравнения (5.57) и (5.58) являются линейными уравнениями с постоянными коэффициентами.

Точно так же при любом законе сил, зависящем только от расстояния, в случае круговой ограниченной задачи уравнения в вариациях также обладают постоянными коэффициентами.

В заключение этого параграфа рассмотрим случай, когда все действующие силы определяются законом Вебера с общими для всех законов постоянными значениями величин  $f$  и  $\sigma$ . Тогда уравнения движения точки  $M_1$  допускают, как мы видели выше, решение  $r_1 = a = \text{const}$  и  $\dot{\vartheta} = n = \text{const}$ , т. е. для точки  $M_2$  мы имеем круговую ограниченную задачу.

Легко видеть, что в рассматриваемом случае условия (5.35') выполняются (как и в каждом случае, когда в системе царствует один общий закон) и, следовательно, в задаче

существуют треугольные лагранжевы решения, в которых точка  $M_2$  является вершиной равностороннего треугольника.

Нетрудно также проверить, что в этой задаче существуют также три эйлеровых решения, соответствующие точкам либрации ( $L_i$ ) ( $i = 1, 2, 3$ ), положения которых определяются теми же самыми уравнениями Эйлера ( $E_1$ ), ( $E_2$ ), ( $E_3$ ) раздела 4 § 3.

Используя теперь общие формулы (5.51) и (5.54), без труда получим следующие значения для коэффициентов уравнений (5.52) для  $i = 1, 2, 3$ :

$$\begin{aligned} p_{11}^{(i)} &= 1 + 2A_i, \quad p_{12}^{(i)} = 0, \quad p_{22}^{(i)} = 1 - A_i, \\ q_{11}^{(i)} &= 0, \quad q_{12}^{(i)} = 0, \quad q_{22}^{(i)} = 0, \\ r_{11}^{(i)} &= -\frac{2(1-\mu)}{\bar{\rho}_i \cdot \sigma^2}, \quad r_{12}^{(i)} = 0, \quad r_{22}^{(i)} = 0, \\ p^{(i)} &= 1 - A_i, \end{aligned}$$

причем  $A_i$  определяется той же формулой, что и в (5.56''). Пологая еще для краткости

$$C_i = \frac{2(1-\mu)}{\bar{\rho}_i \cdot \sigma^2} > 0,$$

мы получим уравнения в вариациях для эйлеровых точек в виде

$$\left. \begin{aligned} x'' - 2y' &= (1 + 2A_i)x - C_i x'', \\ y'' + 2x' &= (1 - A_i)y, \\ z'' + A_i z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.59)$$

Для лагранжевых точек ( $L_i$ ) ( $i = 4, 5$ ) имеем следующие значения для коэффициентов:

$$\begin{aligned} p_{11} &= \frac{3}{4}, \quad p_{12} = (-1)^i \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu), \quad p_{22} = \frac{9}{4}, \\ q_{11} &= q_{12} = q_{22} = 0, \\ r_{11} &= -\frac{1}{2}\kappa, \quad r_{12} = (-1)^{i-1} \frac{\sqrt{3}}{2}\kappa, \quad r_{22} = -\frac{3}{2}\kappa, \end{aligned}$$

где положено  $\kappa = \frac{1-\mu}{\sigma^2}$  и  $\kappa_i = (-1)^{i-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \kappa$ . Тогда уравнения в вариациях для лагранжевых точек имеют вид

$$\left. \begin{aligned} x'' - 2y' &= \frac{3}{4}x + B_i y - \frac{1}{2}\kappa \cdot x'' + \kappa_i y'', \\ y'' + 2x' &= B_i x + \frac{9}{4}y + \kappa_i \cdot x'' - \frac{3}{2}\kappa \cdot y'', \\ z'' + z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.60)$$