§ 4. Задача об устойчивости точек либрации

Предполагая, что в общей ограниченной задаче выполняются условия, обеспечивающие существование лагранжевых или эйлеровых решений, представляющихся в координатах Нехвила точками либрации, мы можем теперь поставить задачу об устойчивости этих решений в смысле Ляпунова. Решение этой задачи (когда это возможно) дает представление о характере решений уравнений возмущенного движения (5.47), близких к какому-либо либрационному решению, соответствующему какой-либо из возможных точек либрации, координаты которой обращают в нуль правые части уравнений (5.47) при любом значении независимой переменной v. Однако задача об устойчивости точек либрации, т. е. задача об устойчивости нулевого решения системы (5.47), вообще чрезвычайно сложна и решение ее в самом общем виде, т. е. при любых законах действующих сил, вряд ли может быть выполнено и доведено до конца.

Но в некоторых частных случаях решение задачи об устойчивости точек либрации оказывается возможным хотя бы в первом приближении, и к рассмотрению таких случаев мы теперь и перейдем.

1. Рассмотрим сначала случай, когда уравнения (5.47) допускают интеграл Якоби, что возможно, как было показано выше, только в случае круговой ограниченной задачи (см. § 2, раздел 1) и когда действующие силы удовлетворяют условиям (5.29).

Предположим далее, что функции F_{ij} не зависят явно от времени t и ограничимся случаем плоской задачи, когда переменная z в уравнениях (5.47) равна нулю.

Чтобы получить интеграл уравнений (5.47), нужно в (5.30) положить $z = 0$, затем перейти к переменным Нехвила подстановкой (5.19) и, наконец, подстановкой (5.46) перейти к системе четвертого порядка, определяющей отклонения от точки либрации.

При этом нужно не упускать из вида, что буквы x, y, z и X, Y, Z обозначают в уравнениях (5.11) и (5.47) совершенно разные величины. В уравнениях (5.11) эти буквы обозначают координаты и составляющие сил точки M_2 во вращающихся осях, а в уравнениях (5.47) те же буквы обозначают отклонения от координат точек либрации в системе Нехвила и правые части полученных уравнений возмущенного движения в той же системе.

Пусть имеем случай, когда действующие силы не зависят от производных соответствующих расстояний. Тогда уравнения (5.47) в плоской круговой задаче могут быть написаны в

виде

$$\left.\begin{aligned} x'' - 2y' &= \frac{\partial W}{\partial x}, \\ y'' + 2x' &= \frac{\partial W}{\partial x}, \end{aligned}\right\} \tag{5.61}$$

где функция W определяется формулой

$$W = x^2 + y^2 + 2(1-\mu)\Phi_{20}(a\bar{\rho}) + 2\mu\Phi_{21}(a\bar{\Delta}), \tag{5.62}$$

причем при нулевых значениях отклонений от координат точки либрации правые части уравнений (5.61) обращаются тождественно в нули.

Уравнения (5.61) допускают интеграл Якоби

$$x'^2 + y'^2 = W + \bar{h}, \qquad (\bar{h} = \text{const}),$$

где функция W может быть разложена в ряд, расположенный по степеням x, y, причем этот ряд не содержит, очевидно, членов первого порядка относительно x и y, и если положить для сокращения

$$R(x, y) = 2(1-\mu)\Phi_{20}(a\bar{\rho}) + 2\mu\Phi_{21}(a\bar{\Delta}), \tag{5.62'}$$

то разложение функции W можно написать в виде

$$W = x^2 + y^2 + R_{11}x^2 + 2R_{12}xy + R_{22}y^2 + \ldots, \tag{5.62''}$$

где положено

$$R_{11} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}\right)_0, \quad R_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial x\,\partial y}\right), \quad R_{22} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial y^2}\right)_0 \tag{5.62'''}$$

(индекс «0» внизу указывает, что после дифференцирования нужно положить $x = y = 0$).

Отсюда видно, что если

$$\left.\begin{aligned} &1 + R_{11} < 0, \quad 1 + R_{22} < 0, \\ &R_1^2 - (1 + R_{11})(1 + R_{22}) < 0, \end{aligned}\right\} \tag{5.63}$$

то функция W будет знакоопределенной отрицательной, каковы бы ни были члены высших порядков в (5.62″).

Следовательно, функция V, определенная формулой

$$V = x'^2 + y'^2 - W, \quad V' \equiv 0, \tag{5.63'}$$

будет знакоопределенной функцией Ляпунова относительно переменных x, y, x', y', а поэтому при условиях (5.63) функция V удовлетворяет условиям первой теоремы Ляпунова (см. § 2 главы II), а значит, невозмущенное движение, определяемое точкой либрации, будет заведомо устойчиво.

Такого рода случай мы будем иметь, если функции F_{20} и F_{21} определяются формулами

$$F_{20} = f_{20} \cdot r^{k_1+1}, \quad F_{21} = f_{21} \cdot \Delta^{k_2+1},$$

где f_{20}, f_{21}, k_1, k_2 — какие угодно неотрицательные постоянные. Тогда, полагая для простоты расстояние между точками M_0 и M_1 (которое есть величина постоянная в координатах Нехвила) $r_1 = a = 1$, мы получим для функции $R(x, y)$ следующее выражение:

$$R(x, y) = -2\left\{\frac{f_{20}(1-\mu)}{k_1+2}(x^2+y^2)^{k_1+2} + \frac{\mu f_{21}}{k_2+2}(x^2+y^2)^{k_2+2}\right\}.$$

Очевидно, что функция $R(x, y)$ есть знакоопределенная, отрицательная функция, и устойчивость точки либрации обеспечена.

Если функция $R(x, y)$ не окажется знакоопределенной отрицательной, то теорема Ляпунова неприменима и вопрос об устойчивости останется открытым.

Таков, например, случай классической задачи, где

$$f_{20} = f_{21} = f > 0, \qquad k_1 = k_2 = -3,$$

и функция R, хотя и будет знакоопределенной, но положительной. В таких случаях исследование оказывается весьма трудным и вопрос об устойчивости может быть разрешен иногда только в первом приближении, когда уравнения возмущенного движения приводятся к виду (5.52), т. е. оказываются линейными уравнениями.

Примечание. Уравнения (5.47) имеют интеграл и для пространственной круговой задачи, притом и в более общем случае, лишь бы законы сил удовлетворяли условиям (5.29). Тогда, как было показано выше, уравнения движения во вращающихся осях допускают интеграл (5.30). Переходя затем к координатам Нехвила, мы получим интеграл уравнений (5.20), где $r_1 = a$ можно принять за единицу расстояний, а F, так же как и F_{01}, является постоянной. Полученный таким образом интеграл преобразуем затем подстановкой (5.46), что и даст нам в результате интеграл возмущенного движения вблизи какой-либо из точек либрации. Этот интеграл, в соответствии с формулой (5.31), напишется следующим образом:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + 2R(x, y, z, x', y', z') + 2h_1, \quad (5.64)$$

где

$$R = (1-\mu)\Phi_{20}(\bar{\rho}, \bar{\rho}') + \mu\Phi_{21}(\bar{\Delta}, \bar{\Delta}') \qquad (5.64')$$

(x, y, z здесь опять обозначают возмущения).

Для уравнений первого приближения, которые для каждой точки либрации распадаются на систему двух уравнений и одно

независимое от них, последнее дает интеграл

$$z'^2 = (p-1)z^2 + h_2, \tag{5.64''}$$

с помощью которого можно исключить z'^2 из (5.64), что дает

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2 + (1-p)z^2 + 2R(x, y, z, x', y') + \text{const}.$$

2. Рассмотрим уравнения в вариациях (5.52) для треугольных точек либрации (L_4), (L_5) и уравнения (5.55) для прямолинейных точек (L_1), (L_2), (L_3).

Предположим при этом, что задача круговая и что действующие силы не содержат явно время t, а значит, и переменную v, которая для круговой задачи просто пропорциональна времени $(v = nt)$.

Тогда все коэффициенты уравнений в вариациях являются вещественными постоянными, и вопрос об устойчивости сводится к рассмотрению характеристического (или, что то же, определяющего) уравнения, соответствующего уравнениям с постоянными коэффициентами, и установлению природы его корней.

Возьмем сначала более простую систему (5.55). Характеристическое уравнение этой системы распадается на квадратное уравнение

$$\lambda^2 = p_{22}^{(i)} - 1 \tag{5.65}$$

и на уравнение четвертой степени, которое имеет вид

$$\left(1 - r_{11}^{(i)}\right)\lambda^4 - q_{11}^{(i)}\lambda^3 + \left(4 - p_{11}^{(i)} - p_{22}^{(i)} + r_{11}^{(i)}p_{22}^{(i)}\right)\lambda^2 + \\ + q_{11}^{(i)}p_{22}^{(i)}\lambda + p_{11}^{(i)}p_{22}^{(i)} = 0. \tag{5.66}$$

Отсюда видно, что при $p_{22}^{(i)} > 1$ уравнение (5.65) имеет два вещественных корня, из которых один отрицателен, а другой положителен. Следовательно, по теоремам Ляпунова (§ 3 главы II) отсюда сразу следует, что нулевое решение уравнений (5.55) неустойчиво, а поэтому и нулевое решение полной системы (5.47) или (5.48) в случае постоянных коэффициентов линейных членов также неустойчиво, каковы бы ни были члены высших порядков.

Это заключение остается верным и в том случае, когда коэффициенты членов высших порядков будут функциями v, лишь бы они оставались непрерывными и ограниченными функциями при всех значениях v.

Если $p_{22}^{(i)} \leqslant 1$, то оба корня уравнения (5.65) чисто мнимые или оба равны нулю. Следовательно, теперь необходимо рассматривать уравнение (5.66). Если это уравнение имеет корни с положительной вещественной частью, то нулевое решение

(5.55) неустойчиво и таковым же будет нулевое решение полной системы (5.47). В противном случае мы будем иметь особенный случай задачи об устойчивости, который требует дополнительного, всегда очень трудного, исследования с учетом членов высших порядков в (5.48).

Заметим прежде всего, что если функции F_{20}, F_{21} не зависят от первых производных от соответствующих расстояний или производные от этих функций содержат множителями некоторые положительные степени $\dot{r}$ и $\dot{\Delta}$ соответственно, то, так как для точек либрации в системе Нехвила в круговой задаче расстояния r и Δ постоянны, в этих случаях величина $q_{11}^{(i)}=0$ и уравнение (5.66) становится биквадратным:

$$\left(1-r_{11}^{(i)}\right)\lambda^4+\left(4-p_{11}^{(i)}-p_{22}^{(i)}+r_{11}^{(i)}p_{22}^{(i)}\right)\lambda^2+p_{11}^{(i)}p_{22}^{(i)}=0. \quad (5.66')$$

Случай такого рода мы будем иметь тогда, когда функции F_{20} и F_{21} зависят только от расстояний r и Δ соответственно, в частности, для случая закона Ньютона, а также закона Вебера, когда в функции F_{20}, F_{21} входят квадраты производных $\dot{r}$ и $\dot{\Delta}$.

Рассмотрим тогда уравнение (5.66′) как квадратное относительно λ^2. Если оно имеет хотя бы один вещественный положительный корень или два комплексных сопряженных, то уравнение (5.66) относительно λ будет иметь корни с положительными вещественными частями и нулевое решение системы (5.55) будет неустойчиво. Следовательно, и нулевое решение системы (5.48) также будет неустойчивым, каковы бы ни были члены высших порядков в этих уравнениях.

Поэтому для устойчивости нулевого решения системы (5.55) необходимо (но недостаточно), чтобы оба корня уравнения (5.66′), рассматриваемого как квадратное, были вещественными и отрицательными. Тогда все корни уравнения (5.66′), относительно λ, будут чисто мнимыми, попарно сопряженными и задача об устойчивости будет представлять особенный случай теоремы Ляпунова.

Напишем, для краткости, уравнение (5.66′) в виде

$$\lambda^4+p_i\lambda^2+q_i=0, \quad (5.66'')$$

где

$$p_i=\frac{4-p_{11}^{(i)}-p_{22}^{(i)}+r_{11}^{(i)}p_{22}^{(i)}}{1-r_{11}^{(i)}}, \quad q_i=\frac{p_{11}^{(i)}p_{22}^{(i)}}{1-r_{11}^{(i)}}.$$

Тогда условия, при которых все корни этого уравнения будут чисто мнимыми, попарно сопряженными, напишутся в виде

$$-p_i\leqslant 0, \quad -q_i<0, \quad p_i^2-4q_i\geqslant 0. \quad (5.67)$$

Отсюда вытекает, что устойчивость нулевого решения системы (5.55) возможна только в том случае, когда $q_{11}^{(i)} \neq 0$. Если при этом уравнение (5.66) может иметь все корни с отрицательными вещественными частями, то нулевое решение системы (5.55) будет асимптотически устойчивым, а поэтому и нулевое решение системы (5.48) также будет асимптотически устойчивым, каковы бы ни были члены высших порядков в этих уравнениях, лишь бы они были ограниченными, непрерывными функциями от v.

В качестве полезного примера рассмотрим вопрос об устойчивости прямолинейных точек либрации, когда в системе царствует закон Вебера с постоянными f и σ. Ньютоновский случай получится, как уже отмечалось выше, при $\sigma = \infty$.

Тогда уравнения в вариациях примут вид (5.59), где A_i определяется формулой (5.56) и есть величина всегда положительная. Поэтому уравнение (5.65) для каждой из точек (L_i) $(i = 1, 2, 3)$ имеет два сопряженных чисто мнимых корня.

Рассмотрим теперь уравнение (5.66). В ньютоновском случае $\sigma = \infty$ и $r_{11}^{(i)} = 0$. Обозначая коэффициенты уравнения (5.66) в этом случае верхним индексом «0», имеем

$$p_i^{(0)} = 2 - A_i, \quad q_i^{(0)} = (1 - A_i)(1 + 2A_i). \tag{5.68}$$

Нетрудно показать, используя формулы (5.56″) и уравнение (5.38), где нужно положить $N = -3$, что $A_i > 1$.

Отсюда следует, что уравнение (5.66), рассматриваемое относительно λ^2, имеет вещественные корни, причем из (5.68) следует, что один корень положителен, а другой отрицателен.

Следовательно, в ньютоновском случае уравнение (5.66″) имеет пару сопряженных чисто мнимых корней и два вещественных, из которых один отрицателен, а другой — положителен. Это показывает, что в ньютоновском случае каждая из прямолинейных точек либрации неустойчива, т. е. каждое из трех эйлеровых решений также неустойчиво. В случае закона Вебера скорость распространения действия должна быть достаточно велика (порядка скорости света), а поэтому каждая из величин $r_{11}^{(i)}$ численно весьма мала.

Поэтому для каждой прямолинейной точки либрации уравнение (5.66″) будет иметь один корень, весьма мало отличающийся от положительного корня в ньютоновском случае. Следовательно, и в случае закона Вебера каждая из трех прямолинейных точек либрации тоже неустойчива.

Рассмотрим последний пример, когда каждая из действующих сил обратно пропорциональна N-й степени соответствующего расстояния. Тогда, при соответствующем выборе

основных единиц, уравнения в вариациях напишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} x'' - 2y' &= [1 + (N-1)\tilde{A}_i]x, \\ y'' + 2x' &= (1 - \tilde{A}_i)\,y, \\ z'' + \tilde{A}_i z &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{5.69}$$

где

$$\tilde{A}_i = \frac{1-\mu}{\tilde{\rho}_i^N} + \frac{\mu}{\tilde{\Delta}_i^N} > 0. \tag{5.69'}$$

Характеристическое уравнение, соответствующее системе (5.69), имеет такой же вид, как и характеристическое уравнение для случая $N = 3$, только с заменой A_i на $\tilde{A}_i$.

Исследуя это характеристическое уравнение, что опять сводится к рассмотрению квадратных уравнений, можем убедиться, что при любом $N > 1$ это уравнение всегда имеет либо вещественный положительный корень либо комплексные корни с положительными вещественными частями. Поэтому и в этом случае каждая из прямолинейных точек либрации также неустойчива.

3. Перейдем к точкам либрации (L_4) и (L_5), т. е. к уравнениям (5.52), опять-таки в предположении, что коэффициенты этих уравнений являются вещественными постоянными.

Характеристическое уравнение этой системы также распадается на два уравнения, одно четвертой степени, а другое — простейшее квадратное:

$$\lambda^2 + 1 = 0, \tag{5.70}$$

корни которого $\sqrt{-1}$ и $-\sqrt{-1}$.

Уравнение четвертой степени, соответствующее системе, состоящей из первых двух уравнений (5.52), после всех упрощений приводится к виду ($i = 4, 5$):

$$p_0^{(i)}\lambda^4 + p_1^{(i)}\lambda^3 + p_2^{(i)}\lambda^2 + p_3^{(i)}\lambda + p_4 = 0, \tag{5.71}$$

где коэффициенты определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} p_0^{(i)} &= (1 - r_{11}^{(i)})(1 - 3r_{11}^{(i)}) - (r_{12}^{(i)})^2, \\ p_1^{(i)} &= -2q_{11}^{(i)}(2 - 3r_{11}^{(i)}) - 2q_{12}^{(i)}r_{12}^{(i)}, \\ p_2^{(i)} &= 4(1 - p_{11}^{(i)}) - (q_{12}^{(i)})^2 - 3(q_{11}^{(i)})^2 + 6p_{11}^{(i)}r_{11}^{(i)} - 2p_{12}^{(i)}r_{12}^{(i)}, \\ p_3^{(i)} &= 6p_{11}^{(i)}q_{11}^{(i)} - 2p_{12}^{(i)}q_{12}^{(i)}, \\ p_4^{(i)} &= 3(p_{11}^{(i)})^2 - (p_{12}^{(i)})^2. \end{aligned}\right\} \tag{5.71'}$$

Мы всегда будем иметь в нашей задаче особенный случай теории устойчивости по Ляпунову, если все корни уравнения

(5.71) имеют отрицательные вещественные части, так как два корня определяющего уравнения системы (5.52) чисто мнимые.

Для того чтобы все четыре корня уравнения (5.71) имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы все четыре определителя Гурвица были положительными (см., например, А. Г. Курош. Курс высшей алгебры). Если мы положим для сокращения

$$\bar{p}_j^{(i)} = \frac{p_j^{(i)}}{p_0^{(i)}} \qquad (j = 1, 2, 3, 4),$$

то условия Гурвица выражаются следующими неравенствами:

$$\left.\begin{aligned} &\bar{p}_1^{(i)} > 0; \quad \bar{p}_1^{(i)}\bar{p}_2^{(i)} - p_3^{(i)} > 0, \quad \bar{p}_4^{(i)} > 0, \\ &\bar{p}_1^{(i)}\left(\bar{p}_2^{(i)}\bar{p}_3^{(i)} - \bar{p}_1^{(i)}\bar{p}_4^{(i)}\right) > \bar{p}_2^{(i)}\bar{p}_3^{(i)} - \bar{p}_1^{(i)}\bar{p}_3^{(i)}. \end{aligned}\right\} \tag{5.72}$$

Из формул (5.71) видно, что условия (5.72) могут осуществляться только в том случае, когда по крайней мере одна из величин $q_{11}^{(i)}$ и $q_{12}^{(i)}$ отлична от нуля.

Если же $q_{11}^{(i)} = q_{12}^{(i)} = 0$, то также, очевидно, что и $\bar{p}_1^{(i)} = \bar{p}_3^{(i)} = 0$ и неравенства (5.72) не выполняются. Поэтому в последнем случае, т. е. когда уравнение (5.71) приводится к виду

$$p_0\lambda^4 + p_2\lambda^2 + p_4 = 0, \tag{5.73}$$

все корни этого уравнения заведомо не могут иметь отрицательные вещественные части и задача может быть разрешена только в том случае, когда уравнение (5.73) имеет корни с положительными вещественными частями и когда, следовательно, треугольные точки либрации окажутся неустойчивыми, каковы бы ни были члены высших порядков в уравнениях возмущенного движения (5.48).

Этот случай будем иметь, когда дискриминант уравнения (5.73) есть величина отрицательная, т. е. когда

$$p_2^2 - 4p_0p_4 < 0. \tag{5.73'}$$

Тогда уравнение (5.73), рассматриваемое как квадратное относительно λ^2, имеет два сопряженных комплексных корня, а следовательно, все корни уравнения (5.73) комплексные и два из них имеют положительные вещественные части.

Если, наоборот,

$$p_2^2 - 4p_0p_4 > 0, \tag{5.74}$$

то оба корня уравнения (5.72), рассматриваемого как квадратное, действительны.

При

$$\frac{p_2}{p_0} < 0, \quad \frac{p_4}{p_0} > 0$$

оба корня положительны и уравнение (5.73) имеет два положительных корня. При

$$\frac{p_2}{p_0} < 0, \quad \frac{p_4}{p_0} < 0$$

один корень относительно λ^2 положителен, а другой отрицателен. Следовательно, уравнение (5.73) имеет один положительный корень и мы опять имеем случай неустойчивости. Следовательно, для устойчивости необходимо, чтобы выполнялись условия

$$\frac{p_2}{p_0} > 0, \quad \frac{p_4}{p_0} > 0, \quad p_2^2 - 4p_0p_4 > 0. \tag{5.75}$$

Тогда, все корни уравнения в вариациях будут чисто мнимыми и если среди этих корней нет одинаковых (т. е. три пары чисто мнимых корней все различны), то точки либрации (L_4) и (L_5) будут устойчивы в первом приближении. Сохранится ли эта устойчивость для точных уравнений (5.47) или нет, неизвестно, и этот вопрос требует дополнительного, тщательного исследования, которое может быть иногда проведено только в частных случаях.

4. Перейдем к рассмотрению некоторых частных случаев. Пусть опять имеем случай, когда все силы подчиняются закону Вебера и, в частности, закону Ньютона. Тогда уравнения в вариациях имеют вид (5.60) и характеристическое уравнение (5.72) напишется следующим образом:

$$(1 + 2\varkappa)\lambda^4 + \left(1 - \frac{9}{2}\mu\varkappa\right)\lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1 - \mu) = 0. \tag{5.76}$$

Это уравнение одинаково и для (L_4) и для (L_5), а при $\varkappa = 0$ превращается в уравнение, соответствующее случаю закона Ньютона. Так как $\varkappa$ очень мало́, то первые два из неравенств (5.75) выполняются при любом μ.

Последнее из неравенств (5.75) принимает вид

$$1 - 27\mu(1 - \mu) + \left[\frac{81}{4}\mu^2\varkappa^2 - 63\mu\varkappa - 54\varkappa\mu^2\right] > 0. \tag{5.77}$$

Если теперь

$$1 - 27\mu(1 - \mu) < 0, \tag{5.78}$$

то неравенство (5.77) не выполняется и точки (L_4) и (L_5) оказываются неустойчивыми.

Если

$$1 - 27\mu(1-\mu) > 0, \tag{5.79}$$

то при $\varkappa = 0$ условие (5.78) выполняется и, следовательно, все корни уравнения в вариациях для системы (5.47) в этом случае чисто мнимые:

$$\pm\sqrt{-1}\,; \quad \pm\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-27\mu(1-\mu)}}\,;$$

$$\pm\sqrt{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-27\mu(1-\mu)}}\,.$$

Следовательно, этот случай является особенным и заключать отсюда об устойчивости нулевого решения полной системы (5.47) для круговой задачи с законом Ньютона нельзя без дополнительного исследования.

Решая квадратное неравенство относительно μ, мы получим, что оно выполняется при значениях μ, заключенных в промежутке

$$0 < \mu < \mu^* = 0{,}0385208. \tag{5.80}$$

Для $\mu < \mu^*$ точки либрации (L_4) и (L_5) являются устойчивыми в первом приближении. Если $\mu > \mu^*$, то точки либрации неустойчивы в полном смысле. Наконец, если $\mu = \mu^*$, т. е. если $1-27\mu(1-\mu) = 0$, то корни уравнений в вариациях будут

$$\pm\sqrt{-1}, \quad \pm\sqrt{-\frac{1}{2}}, \quad \pm\sqrt{-\frac{1}{2}}, \tag{5.81}$$

и мы опять имеем особенный случай, когда вопрос об устойчивости не может быть решен рассмотрением только уравнений первого приближения.

Исследование устойчивости точек либрации (L_4) и (L_5) проводилось неоднократно многими советскими и зарубежными учеными.

Эти исследования математически весьма сложны и длинны и в нашей книге изложены быть не могут. Окончательные результаты в этой области принадлежат А. П. Маркееву, который показал в ряде работ, что нулевые решения системы (5.47), соответствующие точкам либрации (L_4) и (L_5) в круговой задаче с законом Ньютона устойчивы для почти всех начальных значений и при всех значениях μ в промежутке (5.80), кроме двух значений,

$$\mu_1 = 0{,}0242938, \quad \mu_2 = 0{,}0135160,$$

при которых точки (L_4) и (L_5) неустойчивы в строгом смысле.

Возвращаясь теперь к случаю закона Вебера, т. е. к неравенству (5.77), и имея в виду, что $\varkappa = (1-\mu)\gamma$, где $\gamma = \sigma^{-2}$,

мы получим следующее неравенство, при выполнении которого треугольные точки будут устойчивыми в первом приближении:

$$\frac{81}{4}\gamma^2\mu^4 - 54\gamma\mu^3 - (27 + 63\gamma)\mu^2 + (27 - 63\gamma)\mu - 1 > 0. \quad (5.82)$$

Чтобы получить критическое значение μ, соответствующее (5.80), нужно заменить в (5.82) неравенство равенством и найти наибольший положительный корень полученного уравнения четвертой степени относительно μ. Для этого заметим, что при $\gamma = 0$ (5.82) превращается в (5.79) и критическое значение μ есть μ^*, приведенное в (5.80). Поэтому возможно получить корень уравнения четвертой степени в виде ряда, расположенного по степеням параметра γ и обращающегося в μ^* при $\gamma = 0$. Этот ряд имеет вид

$$\bar{\mu}^* = \mu^* + \gamma\bar{\mu}_1^* + \ldots \quad (5.82')$$

Вычисляя $\bar{\mu}_1^*$, получим

$$\bar{\mu}_1^* = -54(\mu^*)^3 - 63(\mu^*)^2 - 63. \quad (5.82'')$$

Для приближенной оценки второго члена в (5.82) примем $\mu^* = 0{,}04$, что дает $\bar{\mu}_1^* = -64$, и из (5.82) получим

$$\bar{\mu}^* = \mu^* - 64\gamma + \ldots \quad (5.83)$$

Но параметр $\gamma = \sigma^{-2}$, где σ есть скорость распространения действия, т. е. величина порядка скорости света. Возьмем для σ даже несколько меньшую величину, например, $\sigma = 10^5$ *км/сек*. Это значение нужно пересчитать в принятых нами единицах, где расстояние между M_0 и M_1 $a = 1$, а единицей времени служит время полного оборота точки M_1 вокруг точки M_0 по круговой орбите. Для Луны $\mu \approx 0{,}01$, а период обращения Луны приблизительно составляет $9 \cdot 10^5$ секунд.

Тогда получим для случая Луны $\gamma \approx 10^{-11}$.

Следовательно, для случая Луны будем иметь

$$\bar{\mu}^* = \mu^* - O(10^{-9}) + \ldots,$$

что не отличается от (5.80) даже в последней значащей цифре.

Поэтому можно быть уверенным, что при законе Вебера точки либрации (L_4) и (L_5) будут также устойчивы в первом приближении, так как для Луны μ есть величина порядка 10^{-2} и, значит, заведомо лежит в промежутке $(0, \mu^*)$.

Так как γ чрезвычайно мало́ для Луны, то можно не сомневаться, что результаты А. П. Маркеева останутся справедливыми и в случае закона Вебера. Поэтому можно считать, что точки либрации (L_4) и (L_5) также будут устойчивы в строгом смысле, когда в системе Земля — Луна — спутник действует вместо закона Ньютона закон Вебера.

5. В предыдущих разделах мы рассматривали устойчивость точек либрации только в случае круговой ограниченной задачи трех тел. Для случая некруговой задачи правые части уравнений возмущенного движения зависят явно от независимой переменной v, а поэтому и все коэффициенты разложений величин X, Y, Z в уравнениях (5.47) будут функциями v. В частности, коэффициенты уравнений первого приближения также являются функциями v, вид и структура которых зависят от (некругового) движения точки M_1, вследствие чего задача становится чрезвычайно сложной, даже в первом приближении.

Однако хотя многие авторы занимались задачей об устойчивости точек либрации, но только для случая, когда в системе действует закон Ньютона и когда орбита точки M_1 есть эллипс с фокусом в точке M_0. Такая задача называется, как уже отмечалось выше, *эллиптической ограниченной задачей трех тел* (конечно, трех материальных точек, из которых одна — пассивно гравитирующая).

Большинство исследований посвящено при этом плоской ограниченной задаче, рассмотрением которой мы здесь и ограничимся.

Этой задачей впервые занимался А. М. Ляпунов в 1889 г. (Ляпунов А. М., Собр. соч., т. I, Изд-во АН СССР, 1954) для случая лагранжевых решений неограниченной задачи трех тел.

Для случая ограниченной задачи из исследований Ляпунова можно вывести следующее: 1) для достаточно малых значений μ точки (L_4) и (L_5) в плоской эллиптической задаче устойчивы в первом приближении и 2) при достаточно малых значениях эксцентриситета e кеплеровской орбиты точки M_1 (L_4) и (L_5) устойчивы, если выполняется одно из неравенств:

$$\left.\begin{aligned} 0 < \mu(1-\mu) < \frac{1}{36} - f_1(e), \\ \frac{1}{36} + f_2(e) < \mu(1-\mu) < \frac{1}{27} + f_3(e), \end{aligned}\right\} \qquad (5.83')$$

где $f_1(e)$, $f_2(e)$, $f_3(e)$ обозначают некоторые положительные функции от e, обращающиеся в нули при $e = 0$.

Во второй половине нашего века задачей об устойчивости точек либрации занимались многие авторы и в нашей стране и за рубежом. Из советских ученых можно назвать Е. А. Гребеникова, А. П. Маркеева, Л. Г. Лукьянова, Н. А. Артемьева и отчасти Г. Н. Дубошина.

Все авторы посвящали свое внимание только плоской эллиптической задаче. Только один А. П. Маркеев рассматривал также и пространственную задачу в нелинейной постановке, но

с учетом только членов до четвертого порядка в разложениях правых частей уравнений (5.47).

Рассмотрим уравнения в вариациях (5.57) для эйлеровых точек (L_1), (L_2), (L_3) и уравнения (5.58) для лагранжевых точек (L_4), (L_5). В этих уравнениях зависимость коэффициентов от независимой переменной v осуществляется только наличием множителя $\bar{r}$, который, как уже было сказано, определяется формулой

$$\bar{r} = \frac{1}{1 + e \cos v}.$$

Таким образом, коэффициенты уравнений в вариациях являются аналитическими, голоморфными функциями от параметра e и периодическими функциями от v с периодом 2π.

По теореме Ляпунова, приведенной в разделе 3 § 3 главы I, отсюда следует, что коэффициенты характеристического уравнения, соответствующего каждой из систем (5.57) и (5.58), также являются аналитическими, голоморфными функциями от параметра, которым в нашей задаче является эксцентриситет e.

С. Н. Шиманов доказал в 1954 г., что характеристические показатели системы линейных уравнений с периодическими коэффициентами также являются голоморфными функциями от параметра, входящего в коэффициенты такой системы.

В рассматриваемой задаче таким параметром является e, и задача сводится к исследованию рядов, расположенных по степеням e и представляющим характеристические показатели систем (5.57) и (5.58). Такие ряды можно составить и провести их исследование аналитическим или численным путем. Эти процедуры довольно сложны и длинны и мы их приводить не будем, отсылая интересующегося этими вопросами читателя к работам упомянутых авторов.

Однако можно заметить, что при $e = 0$ характеристические показатели должны совпадать с корнями характеристических уравнений, соответствующими случаю $e = 0$. Поэтому в тех случаях, когда характеристическое уравнение имеет корни с положительными вещественными частями (т. е. когда в круговой задаче точки либрации неустойчивы), при $e \neq 0$, но достаточно малом, характеристические показатели также будут иметь корни с положительными вещественными частями, вследствие чего точки либрации будут неустойчивыми также и в эллиптической задаче.

В круговой задаче прямолинейные точки, как было показано, неустойчивы. Поэтому и в эллиптической задаче, по крайней мере при достаточно малых значениях e, прямолинейные точки также все будут неустойчивы.

Треугольные точки либрации в круговой задаче оказываются неустойчивыми при $\mu > \mu^*$. Поэтому и в эллиптической задаче лагранжевы точки при $\mu > \mu^*$, по крайней мере при достаточно малых значениях e, также будут неустойчивы.

Что касается случаев, когда лагранжевы точки будут устойчивы, мы ограничимся уже приведенными результатами Ляпунова, которые показывают, что при μ, удовлетворяющем одному из неравенств (5.83), и при достаточно малых значениях эксцентриситета e, точки (L_4) и (L_5) оказываются устойчивыми.

§ 5. Периодические решения круговой ограниченной задачи в классическом случае

1. Хотя, как уже неоднократно отмечалось, мы не можем найти общее решение даже круговой ограниченной задачи в классическом случае, т. е. когда в системе царствует закон Ньютона с постоянным коэффициентом пропорциональности, но мы знаем некоторые простые частные решения этой задачи, соответствующие в координатах Нехвила пяти точкам либрации.

Пользуясь методами Ляпунова, мы можем найти при помощи бесконечных рядов бесчисленное множество других частных решений, остающихся близкими, по крайней мере некоторое время, к одному из известных либрационных решений. Из всех этих частных решений, близких к либрационным (т. е. к лагранжевым и эйлеровым), наибольший интерес для приложений представляют периодические решения, которые можно разыскать при помощи метода Ляпунова (см. § 2, главы III).

Перейдем теперь к разысканию этих периодических решений. Рассмотрим уравнения возмущенного движения вблизи какой-либо из пяти точек либрации (L_i) $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ в виде (5.47), выписывая отдельно члены первого порядка

$$\left.\begin{aligned} x'' - 2y' &= p_{11}^{(i)}x + p_{12}^{(i)}y + \tilde{X}^{(i)}, \\ y'' + 2x' &= p_{12}^{(i)}x + p_{22}^{(i)}y + \tilde{Y}^{(i)}, \\ z'' &= p^{(i)}z + \tilde{Z}^{(i)}, \end{aligned}\right\} \tag{5.84}$$

где $\tilde{X}^{(i)}$, $\tilde{Y}^{(i)}$, $\tilde{Z}^{(i)}$ обозначают совокупности членов выше первого порядка относительно x, y и z, а коэффициенты определяются формулами, которые уже приводились выше, но которые все же выпишем еще раз:

$$\left.\begin{aligned} &p_{11}^{(i)} = 1 + 2A_i, \quad p_{12}^{(i)} = 0, \quad p_{22}^{(i)} = 1 - A_i, \\ &p^{(i)} = 1 - A_i, \qquad A_i = \frac{1-\mu}{\rho_i^3} + \frac{\mu}{\Delta_i^3}, \end{aligned}\right\} \tag{5.84'}$$