Треугольные точки либрации в круговой задаче оказываются неустойчивыми при $\mu > \mu^*$. Поэтому и в эллиптической задаче лагранжевы точки при $\mu > \mu^*$, по крайней мере при достаточно малых значениях e, также будут неустойчивы.

Что касается случаев, когда лагранжевы точки будут устойчивы, мы ограничимся уже приведенными результатами Ляпунова, которые показывают, что при μ, удовлетворяющем одному из неравенств (5.83), и при достаточно малых значениях эксцентриситета e, точки (L_4) и (L_5) оказываются устойчивыми.

§ 5. Периодические решения круговой ограниченной задачи в классическом случае

1. Хотя, как уже неоднократно отмечалось, мы не можем найти общее решение даже круговой ограниченной задачи в классическом случае, т. е. когда в системе царствует закон Ньютона с постоянным коэффициентом пропорциональности, но мы знаем некоторые простые частные решения этой задачи, соответствующие в координатах Нехвила пяти точкам либрации.

Пользуясь методами Ляпунова, мы можем найти при помощи бесконечных рядов бесчисленное множество других частных решений, остающихся близкими, по крайней мере некоторое время, к одному из известных либрационных решений. Из всех этих частных решений, близких к либрационным (т. е. к лагранжевым и эйлеровым), наибольший интерес для приложений представляют периодические решения, которые можно разыскать при помощи метода Ляпунова (см. § 2, главы III).

Перейдем теперь к разысканию этих периодических решений. Рассмотрим уравнения возмущенного движения вблизи какой-либо из пяти точек либрации (L_i) $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ в виде (5.47), выписывая отдельно члены первого порядка

$$\left.\begin{aligned} x'' - 2y' &= p_{11}^{(i)}x + p_{12}^{(i)}y + \tilde{X}^{(i)}, \\ y'' + 2x' &= p_{12}^{(i)}x + p_{22}^{(i)}y + \tilde{Y}^{(i)}, \\ z'' &= p^{(i)}z + \tilde{Z}^{(i)}, \end{aligned}\right\} \tag{5.84}$$

где $\tilde{X}^{(i)}$, $\tilde{Y}^{(i)}$, $\tilde{Z}^{(i)}$ обозначают совокупности членов выше первого порядка относительно x, y и z, а коэффициенты определяются формулами, которые уже приводились выше, но которые все же выпишем еще раз:

$$\left.\begin{aligned} &p_{11}^{(i)} = 1 + 2A_i, \quad p_{12}^{(i)} = 0, \quad p_{22}^{(i)} = 1 - A_i, \\ &p^{(i)} = 1 - A_i, \qquad A_i = \frac{1-\mu}{\rho_i^3} + \frac{\mu}{\Delta_i^3}, \end{aligned}\right\} \tag{5.84'}$$

где $i = 1, 2, 3$, и

$$\left.\begin{aligned} &p_{11}^{(i)} = \frac{3}{4}, \quad p_{12}^{(i)} = B_i, \quad p_{22}^{(i)} = \frac{9}{4}, \\ &p^{(i)} = -1, \quad B_i = (-1)^i \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu), \end{aligned}\right\} \tag{5.84''}$$

где $i = 4, 5$.

Так как в круговой классической задаче существует интеграл Якоби, то уравнения (5.84) также допускают интеграл, который можно записать в виде

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 2\Omega + 2h, \tag{5.85}$$

где Ω — голоморфная функция x, y и z, разложение которой в ряд по степеням этих величин не содержит членов ниже второго порядка и может быть написано в виде

$$\Omega = \sum_{k=2}^{\infty} \Omega_k(x, y, z), \tag{5.85'}$$

где

$$\Omega_2(x, y, z) = \frac{1}{2}\left[p_{11}^{(i)}x^2 + 2p_{12}^{(i)}xy + p_{22}^{(i)}y^2 + p^{(i)}z^2\right], \tag{5.85''}$$

причем коэффициенты этой квадратичной формы определяются формулами (5.84′) и (5.84″), а Ω_k суть целые однородные функции x, y, z k-й степени ($k \geqslant 3$).

Так как определитель квадратичной формы Ω_2 не равен нулю, то к системе (5.84) применима теорема Ляпунова и, следовательно, каждой паре чисто мнимых корней $\pm\lambda\sqrt{-1}$ характеристического уравнения, соответствующего системе (5.84), отвечает одно периодическое решение этой системы с двумя произвольными постоянными.

Для каждой из прямолинейных точек либрации определяющее уравнение, как было выяснено выше, имеет две пары чисто мнимых корней $\pm\lambda_1\sqrt{-1}$, $\pm\lambda_2\sqrt{-1}$, причем можно считать $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$.

Таким образом, если ни одно из отношений λ_1/λ_2, λ_2/λ_1 не есть целое число (что и будет в общем случае, т. е. при произвольно заданном μ), то уравнения (5.84) заведомо будут иметь два периодических решения, каждое из которых содержит две произвольные постоянные.

Для треугольных точек либрации определяющее уравнение имеет только одну пару чисто мнимых корней (когда $1 - 27\mu(1 - \mu) < 0$ и эти корни суть $\pm\sqrt{-1}$) или три пары чисто мнимых корней (если $1 - 27\mu(1 - \mu) > 0$). Поэтому в первом случае система (5.84) имеет только одно периодическое решение. Во втором случае система (5.84) будет иметь три

периодических решения, если чисто мнимые корни $\pm\lambda_1\sqrt{-1}$, $\pm\lambda_2\sqrt{-1}$, $\pm\lambda_3\sqrt{-1}$ таковы, что ни одно из отношений λ_i/λ_j $(i, j = 1, 2, 3)$ не есть целое число, что и будет при произвольно заданном μ.

Если $1 - 27\mu(1-\mu) = 0$, то определяющее уравнение имеет двойной нулевой корень и пару чисто мнимых $\pm\sqrt{-i}$, а поэтому в этом случае теорема Ляпунова непосредственно неприменима.

Каждое из упомянутых периодических решений, существование которых установлено при помощи теоремы Ляпунова, может быть фактически найдено в виде бесконечных рядов, расположенных по степеням некоторой произвольной постоянной, абсолютно сходящихся для всякого значения независимой переменной v (а значит, для всякого значения t), пока числовое значение произвольной постоянной не превосходит некоторого отличного от нуля предела.

2. Для нахождения рядов, представляющих периодические решения системы (5.84), близкие к лагранжевым и эйлеровым решениям, т. е. близкие к какой-либо точке либрации в системе Нехвила, мы применим метод Ляпунова непосредственно к уравнениям (5.84), не заботясь о приведении этих уравнений к системе шести уравнений первого порядка, что вовсе и не обязательно.

Пусть $\pm\lambda\sqrt{-1}$ есть какая-либо пара чисто мнимых корней определяющего (характеристического) уравнения, соответствующего системе (5.84).

Положим

$$T = \frac{2\pi}{\lambda}[1 + h_2c^2 + h_3c^3 + \ldots], \tag{5.86}$$

где c обозначает произвольную постоянную, а h_k — неопределенные коэффициенты. Введем вместо v новую независимую переменную τ посредством подстановки

$$\tau = \frac{2\pi(v - v_0)}{T}. \tag{5.86'}$$

Преобразованные уравнения (5.84) напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x}{d\tau^2} - 2\left(\frac{T}{2\pi}\right)\frac{dy}{d\tau} &= \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2\cdot[p_{11}^{(i)}x + p_{12}^{(i)}y + \widetilde{X}^{(i)}],\\
\frac{d^2y}{d\tau^2} + 2\left(\frac{T}{2\pi}\right)\frac{dx}{d\tau} &= \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2\cdot[p_{12}^{(i)}x + p_{22}^{(i)}y + \widetilde{Y}^{(i)}],\\
\frac{d^2z}{d\tau^2} &= \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2\cdot[p^{(i)}z + \widetilde{Z}^{(i)}].
\end{aligned}\right\} \tag{5.87}$$

Теперь согласно общей теории периодических решений Ляпунова будем искать решение системы (5.87) в виде рядов

$$\left.\begin{aligned} x &= x^{(1)}c + x^{(2)}c^2 + \ldots + x^{(k)}c^k + \ldots, \\ y &= y^{(1)}c + y^{(2)}c^2 + \ldots + y^{(k)}c^k + \ldots, \\ z &= z^{(1)}c + z^{(2)}c^2 + \ldots + z^{(k)}c^k + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{5.88}$$

все коэффициенты которых должны быть периодическими функциями переменной τ с общим периодом 2π, представляющимися конечными суммами синусов и косинусов целых кратностей τ.

Так как нам уже известно, что периодические решения такого вида существуют, то ряды (5.88) для каждого значения λ найдутся единственным образом и одновременно определятся однозначно все постоянные h_k.

Для определения коэффициентов рядов (5.88) подставляем их в уравнения (5.87), а затем приравниваем в полученных равенствах коэффициенты при одинаковых степенях c слева и справа. Это даст нам следующие системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x^{(k)}}{d\tau^2} - \frac{2}{\lambda}\frac{dy^{(k)}}{d\tau} &= \frac{1}{\lambda^2}\left[p_{11}^{(i)}x^{(k)} + p_{12}^{(i)}y^{(k)} + \widetilde{X}_k^{(i)}\right], \\ \frac{d^2y^{(k)}}{d\tau^2} + \frac{2}{\lambda}\frac{dx^{(k)}}{d\tau} &= \frac{1}{\lambda^2}\left[p_{12}^{(i)}x^{(k)} + p_{22}^{(i)}y^{(k)} + \widetilde{Y}_k^{(i)}\right], \\ \frac{d^2z}{d\tau^2} &= \frac{1}{\lambda^2}\left[p^{(i)}z^{(k)} + \widetilde{Z}_k^{(i)}\right], \end{aligned}\right\} \tag{5.89}$$

где $\widetilde{X}_1^{(i)}$, $\widetilde{Y}_1^{(i)}$, $\widetilde{Z}_1^{(i)}$ равны нулю, а для $k > 1$ величины $\widetilde{X}_k^{(i)}$, $\widetilde{Y}_k^{(i)}$ $\widetilde{Z}_k^{(i)}$ — целые многочлены относительно тех $x^{(j)}$, $y^{(j)}$, $z^{(j)}$, для которых $j < k$ и которые зависят, кроме того, от постоянных $h_2, \ldots, h_{k-1}$. Поэтому уравнения (5.89) определяют последовательно все коэффициенты рядов (5.88) и одновременно все постоянные h_k, которые выбираются так, чтобы получаемые функции $x^{(k)}$, $y^{(k)}$, $z^{(k)}$ выходили периодическими функциями от τ с общим периодом 2π.

При этом коэффициенты $x^{(1)}$, $y^{(1)}$, $z^{(1)}$, которые определяются из линейных однородных уравнений, будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} x^{(1)} &= a\cos\tau + b\sin\tau, \\ y^{(1)} &= a'\cos\tau + b'\sin\tau, \\ z^{(1)} &= a''\cos\tau + b''\sin\tau, \end{aligned}\right\} \tag{5.90}$$

а для $k > 1$ будем иметь выражения вида

$$\left.\begin{aligned} x^{(k)} &= \sum_{s=0}^{k} [a_{ks} \cos s\tau + b_{ks} \sin s\tau], \\ y^{(k)} &= \sum_{s=0}^{k} [a'_{ks} \cos s\tau + b'_{ks} \sin s\tau], \\ z^{(k)} &= \sum_{s=0}^{k} [a''_{ks} \cos s\tau + b''_{ks} \sin s\tau], \end{aligned}\right\} \tag{5.90'}$$

причем все коэффициенты в формулах (5.90) и (5.90′) — вполне определенные постоянные, зависящие только от коэффициентов разложений правых частей уравнений (5.87).

Мы ограничимся здесь нахождением только первого приближения, т. е. только первых членов рядов (5.88). Более подробное изложение метода Ляпунова мы дадим в главе VII.

Рассмотрим вначале периодические решения, близкие к прямолинейным точкам либрации. Тогда уравнения, определяющие первые коэффициенты рядов (5.88), запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x^{(1)}}{d\tau^2} - \frac{2}{\lambda}\frac{dy^{(1)}}{d\tau} &= \frac{1}{\lambda^2}(1 + 2A_1)\, x^{(1)}, \\ \frac{d^2y^{(1)}}{d\tau^2} + \frac{2}{\lambda}\frac{dx^{(1)}}{d\tau} &= \frac{1}{\lambda^2}(1 - A_i)\, y^{(1)}, \\ \frac{d^2z^{(1)}}{d\tau^2} + \frac{1}{\lambda^2} A_i z^{(1)} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{5.91}$$

где λ может иметь одно из двух значений: λ_1 или λ_2.

Будем считать для определенности, что $\pm\lambda_1\sqrt{-1}$ — корни характеристического уравнения, соответствующего системе двух первых уравнений (5.91), а $\pm\lambda_2\sqrt{-1}$ — корни характеристического уравнения для случая последнего уравнения системы (5.92).

Тогда имеем тождественно

$$\lambda_1^4 - (2 - A_i)\lambda_1^2 + (1 + 2A_i)(1 - A_i) \equiv 0 \tag{5.92}$$

и

$$\lambda_2^2 = A_i. \tag{5.92'}$$

Теперь нужно определить решения уравнений (5.91), имеющие вид (5.90). Легко видеть, что $x^{(1)}$ и $y^{(1)}$ этого вида удовлетворяют двум первым уравнениям (5.91), если $b = 0$, $a' = 0$,

а a и b' удовлетворяют уравнениям

$$\left.\begin{aligned}\left(1+\frac{1+2A_i}{\lambda^2}\right)a+\frac{2}{\lambda}b'=0,\\ \frac{2}{\lambda}a+\left(1+\frac{1-A_i}{\lambda^2}\right)b'=0,\end{aligned}\right\} \tag{5.93}$$

определитель которых вычисляется по формуле

$$D(\lambda)=\frac{1}{\lambda^4}[\lambda^4-(2-A_i)\lambda^2+(1+2A_i)(1-A_i)]. \tag{5.93'}$$

При $\lambda=\lambda_1$ этот определитель в силу тождества (5.92) равен нулю, а поэтому найдутся не равные одновременно нулю значения a и b', удовлетворяющие равенствам (5.93).

Мы можем положить, например,

$$a=-2\lambda_1,\quad b'=\lambda_1^2+1+2A_i. \tag{5.94}$$

Теперь заметим, что при $\lambda=\lambda_1$ третьему из уравнений (5.91) удовлетворяет функция $z^{(1)}$ вида (5.90) только при $a''=b''=0$, так что в этом решении $z^{(1)}=0$.

Но так как каждый член разложения $\tilde{Z}^{(i)}$ содержит множителем z, отсюда следует, что в рассматриваемом периодическом решении мы имеем тождественно $z=0$.

Таким образом, при $\lambda\equiv\lambda_1$ периодическое решение, близкое к прямолинейной точке либрации, определится формулами

$$\left.\begin{aligned}x^{(1)}&=ac\cos\tau+\ \ldots,\\ y^{(1)}&=b'c\sin\tau+\ \ldots,\\ z^{(1)}&=0,\end{aligned}\right\} \tag{5.95}$$

и соответствующая периодическая орбита есть плоская кривая, заведомо замкнутая.

Уравнение этой периодической орбиты в прямоугольных координатах мы получим, исключая τ из равенств (5.95).

В общем виде произвести это исключение затруднительно, но если ограничиться только членами первого порядка относительно произвольной постоянной c, то результат будет очень простым.

Действительно, производя исключение τ из равенств (5.95) при этом условии, мы найдем

$$\frac{(x^{(1)})^2}{(ac)^2}+\frac{(y^{(1)})^2}{(b'c)^2}=1. \tag{5.95'}$$

Отсюда следует, что периодическая орбита вблизи всякой прямолинейной точки либрации при $\lambda=\lambda_1$ близка к эллипсу, центр которого совпадает с точкой либрации, одна ось совпадает с осью абсцисс (прямая, проходящая через точки M_0 и M_1), а другая перпендикулярна к этой оси.

Из (5.94) следует, что для всякой точки либрации L_i ($i = 1, 2, 3$) мы имеем $|a| < b'$, так что большая ось каждого из этих эллипсов перпендикулярна к оси абсцисс.

Заметим, что, изменяя c (оставляя его достаточно малым), мы получим около каждой эйлеровой точки (L_i) бесчисленное множество эллипсов (5.95′). Эксцентриситеты всех этих эллипсов, принадлежащих одному и тому же семейству, одинаковы. Точно так же одинаковы и периоды всех орбит, принадлежащих к одному и тому же семейству, так как из (5.86), пренебрегая членами, порядок которых выше первого относительно c, мы имеем

$$T \cong \frac{2\pi}{\lambda_1}. \tag{5.95''}$$

Перейдем к рассмотрению второго периодического решения, близкого к прямолинейной точке либрации, для чего положим в уравнениях (5.91) $\lambda = \lambda_2$.

Тогда в силу (5.92) сразу видим, что выражение вида (5.90) для функции $z^{(1)}$ будет удовлетворять третьему уравнению системы (5.91) при любых вещественных значениях a'' и b''. Так как нам нужно найти только какое-нибудь частное решение системы (5.91), то мы можем выбрать постоянные a'' и b'' совершенно произвольно, например, можем положить $a'' = 1$ и $b'' = 0$.

Но определитель (5.93) имеет при $\lambda = \lambda_2$ значение

$$D(\lambda_2) = \frac{1 - A_i}{A_i^2} \neq 0,$$

а поэтому функции $x^{(1)}$ и $y^{(1)}$ вида (5.90) удовлетворяют уравнениям (5.91) только при $a = b = a' = b' = 0$.

Поэтому периодическое решение, близкое к прямолинейной точке либрации, при $\lambda = \lambda_2$ представится в виде

$$\left.\begin{aligned} x &= 0 + \ldots, \\ y &= 0 + \ldots, \\ z &= c\cos\tau + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{5.96}$$

где невыписанные члены выше первого порядка относительно постоянной c.

Соответствующая пространственная периодическая орбита близка, очевидно, к отрезку прямой $(-c, +c)$, проходящей через точку (L_i) перпендикулярно к плоскости (xOy).

Периоды этих решений для всех орбит одного и того же семейства одинаковы, и мы имеем

$$T = \frac{2\pi}{\lambda_2} + \ldots \tag{5.96'}$$

с точностью до членов первого порядка включительно.

3. Перейдем теперь к рассмотрению периодических решений, близких к треугольным точкам либрации (L_4) и (L_5).

Уравнения, определяющие первые коэффициенты рядов (5.88), напишутся теперь следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2x^{(1)}}{d\tau^2}-\frac{2}{\lambda}\frac{dy^{(1)}}{d\tau}=\frac{1}{\lambda^2}\left[\frac{3}{4}x^{(1)}+B_iy^{(1)}\right],\\ &\frac{d^2y^{(1)}}{d\tau^2}+\frac{2}{\lambda}\frac{dx^{(1)}}{d\tau}=\frac{1}{\lambda^2}\left[B_ix^{(1)}+\frac{9}{4}y^{(1)}\right],\\ &\frac{d^2z^{(1)}}{d\tau^2}+\frac{1}{\lambda^2}z^{(1)}=0 \qquad (i=4,5). \end{aligned}\right\} \tag{5.97}$$

Подставляя в первые два уравнения вместо $x^{(1)}$ и $y^{(1)}$ их выражения из (5.90), мы найдем, что коэффициенты этих выражений должны удовлетворять условиям

$$\left.\begin{aligned} &\left(1+\frac{3}{4\lambda^2}\right)a+\frac{B_i}{\lambda^2}a'+\frac{2}{\lambda}b'=0,\\ &\left(1+\frac{3}{4\lambda^2}\right)b-\frac{2}{\lambda}a'+\frac{B_i}{\lambda^2}b'=0,\\ &\frac{B_i}{\lambda^2}a-\frac{2}{\lambda}b+\left(1+\frac{9}{4\lambda^2}\right)a'=0,\\ &\frac{2}{\lambda}a+\frac{B_i}{\lambda^2}b+\left(1+\frac{9}{4\lambda^2}\right)b'=0 \end{aligned}\right\} \quad (i=4,\ 5). \tag{5.98}$$

Если теперь $1-27\mu(1-\mu)<0$, то существует только одно периодическое решение, так как определяющее уравнение имеет только одну пару чисто мнимых корней $\pm\sqrt{-1}$. В этом случае $\lambda=1$ и это периодическое решение определяется из третьего уравнения системы (5.97), причем, так как нам нужно иметь только частное решение, то можно взять $z^{(1)}=\cos\tau$, а все коэффициенты системы первых двух уравнений (5.90) нужно положить равными нулю. Тогда уравнения (5.98) удовлетворяются. Периодическое решение системы (5.97) будет иметь вид такой же, как и (5.96), но только вблизи точек либрации (L_4) и (L_5). Периодическая орбита, соответствующая этому периодическому решению, будет близка к отрезку $(-c,\ +c)$ прямой, параллельной оси OZ, с центром в (L_4) или в (L_5).

Если $1-27\mu(1-\mu)>0$, то определяющее уравнение имеет три пары чисто мнимых корней:

$$\pm\lambda_1\sqrt{-1},\quad \pm\lambda_2\sqrt{-1},\quad \pm\lambda_3\sqrt{-1}.$$

Будем считать, для определенности, что третья пара корней соответствует третьему уравнению (5.97). Тогда $\lambda_3=1$ и для этого уравнения опять можно взять $z^{(1)}=\cos\tau$. Но определитель системы (5.98), как нетрудно проверить, не равен нулю при

$\lambda = 1$ и, следовательно, эта система имеет только нулевое решение. Поэтому периодическое решение опять имеет вид (5.96) и может отличаться от него только членами порядка выше первого относительно c.

Для двух других пар корней $\pm\lambda_1\sqrt{-1}$ и $\pm\lambda_2\sqrt{-1}$, следовательно, частное решение третьего из уравнений (5.97) есть $z^{(1)} = 0$. Но тогда (так же как и в соответствующем случае для прямолинейных точек либрации) координата z равна нулю тождественно, и орбиты каждого из двух семейств периодических решений, соответствующих $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$, суть плоские кривые, лежащие в плоскости (xOy). Чтобы найти в первом приближении уравнения этих кривых, нужно определить постоянные a, b, a', b' из уравнений (5.98), причем одну из этих величин можно выбрать произвольно и найти остальные три из трех каких-либо из уравнений (5.98).

Таким образом, периодические решения, соответствующие $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$, определятся тогда следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} x &= c(a\cos\tau + b\sin\tau) + \ldots, \\ y &= c(a'\cos\tau + b'\sin\tau) + \ldots, \\ z &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{5.99}$$

и все орбиты одного и того же семейства имеют одинаковый период, равный (с точностью до членов первого порядка)

$$\frac{2\pi}{\lambda_1}, \quad \frac{2\pi}{\lambda_2}.$$

Приближенное уравнение орбиты получим исключением τ из равенств (5.99), отбрасывая в них все члены порядка выше первого относительно параметра c, что дает

$$\frac{(b'x - by)^2 + (a'x - ay)^2}{c^2(ab' - a'b)^2} = 1. \tag{5.100}$$

Очевидно, что все эти орбиты являются эллипсами с центром в треугольной точке либрации (L_4) или (L_5).

Легко видеть, что все эллипсы одного и того же семейства имеют общий эксцентриситет и общие главные оси.