Глава VI

ЗАДАЧА ХИЛЛА

В предыдущей главе мы рассмотрели простые частные решения ограниченной задачи трех тел, которые оказываются периодическими для случая эллиптической (а следовательно, и круговой!) задачи. Мы установили также, что круговая ограниченная задача имеет бесчисленное множество периодических решений, близких к либрационным.

Эти решения, представляемые сходящимися периодическими рядами, имеют важное теоретическое значение, но до сих пор не играли большой роли при исследовании движений реальных небесных тел. Однако можно надеяться, что в современной небесной механике, а именно в том ее отделе, который занимается изучением движений искусственных небесных тел, либрационные движения и близкие к ним периодические орбиты найдут надлежащее приложение и будут эффективно использованы *).

Теперь мы перейдем к рассмотрению других периодических решений, представляющих движения пассивной массы, близкие к одной из конечных масс.

Такие решения получил впервые Хилл, рассматривая задачу о движении естественного спутника Земли, т. е. Луны, но та же методика может быть с успехом применена и к изучению движений близких спутников других планет, а также к изучению движений искусственных спутников Земли, Луны или какой-либо другой планеты Солнечной системы.

Соответствующую задачу мы называем для краткости задачей Хилла. Мы изложим здесь вывод основных уравнений задачи Хилла и метод Ляпунова для нахождения периодических решений этой задачи в виде абсолютно сходящихся периодических рядов.

---

*) Первое издание этой книги вышло в 1964 г. С тех пор появилось множество работ и в нашей стране и за рубежом, посвященных приложениям теории, изложенной в главе V, к конкретным задачам теории движения искусственных небесных тел. Основные иследования в этой области будут изложены в следующей нашей книге.

§ 1. Основные уравнения задачи Хилла

1. В своей теории движения Луны Хилл исходил из уравнений движения плоской ограниченной круговой задачи трех тел, для которой, считая расстояние между двумя конечными массами весьма большим, знаменитый астроном вывел удобные приближенные уравнения, частное периодическое решение которых затем и разыскивал.

Но предположение о равенстве нулю эксцентриситета кеплеровой орбиты точки M_1 относительно M_0 не играет никакой роли при выводе основных уравнений задачи Хилла. Поэтому мы предпочитаем вывести эти уравнения в несколько более общей форме, исходя из уравнений любой ограниченной задачи, данных Нехвилом.

Итак, рассмотрим задачу о движении пассивной массы под действием ньютоновского притяжения двух конечных масс, m_0 и m_1, движущихся вокруг общего центра масс O по подобным кеплеровским орбитам. Координаты точки M_2 в системе координат Нехвила, но с началом в центре масс O, обозначим теперь через $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$. Тогда уравнения движения точки M_2 (с пассивной массой) напишутся, как легко видеть, если перейти в (5.28) к системе с началом в O и с прежними направлениями осей, следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\bar{\xi}}{dv^2} - 2\frac{d\bar{\eta}}{dv} &= \frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial\bar{\xi}}, \\ \frac{d^2\bar{\eta}}{dv^2} + 2\frac{d\bar{\xi}}{dv} &= \frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial\bar{\eta}}, \\ \frac{d^2\bar{\zeta}}{dv^2} &= \frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial\bar{\zeta}}, \end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

где силовая функция $\bar{\Omega}$ определяется формулой

$$\bar{\Omega} = \bar{r}\left\{-\frac{1}{2}e\cos v\cdot\bar{\zeta}^2 + \frac{1}{2}(\bar{\xi}^2+\bar{\eta}^2) + \gamma\cdot\bar{W}\right\}, \tag{6.2}$$

в которой

$$\bar{r} = \frac{1}{1+e\cos v}, \quad \gamma = \frac{p^4}{c^2} = \frac{p^3}{f(m_0+m_1)}$$

и

$$\bar{W} = f\left\{\frac{m_0}{\bar{r}_0} + \frac{m_1}{\bar{r}_1}\right\}, \tag{6.3}$$

причем

$$\left.\begin{aligned} \bar{r}_0^2 &= (\bar{\xi}-\bar{\xi}_0)^2 + \bar{\eta}^2 + \bar{\zeta}^2, \\ \bar{r}_1^2 &= (\bar{\xi}-\bar{\xi}_1)^2 + \bar{\eta}^2 + \bar{\zeta}^2, \end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

а

$$\bar{\xi}_0 = -\frac{pm_1}{m_0+m_1}, \quad \bar{\xi}_1 = \frac{pm_0}{m_0+m_1}, \quad \bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_0 = p.$$

Если во всех этих формулах положить $e=0$, то получим уравнения движения точки M_2 в круговой ограниченной задаче, а если выбрать начальные условия таким образом, чтобы во все время движения было $\bar{\zeta}=0$, то третье из уравнений (6.1) удовлетворится тождественно и оставшиеся первые два уравнения составят уравнения движения в плоской ограниченной задаче.

Функцию $\bar{\Omega}$ можно представить в несколько ином, более удобном виде. Замечая, что из (6.4) мы имеем

$$m_0\bar{r}_0^2+m_1\bar{r}_1^2=(m_0+m_1)(\bar{\xi}^2+\bar{\eta}^2+\bar{\zeta}^2)+\frac{m_0m_1p^2}{m_0+m_1}, \qquad (6.4')$$

мы приведем выражение (6.2) к виду

$$\bar{\Omega}=-\frac{m_0m_1p^2\bar{r}}{2(m_0+m_1)^2}+\tilde{\Omega}, \qquad (6.5)$$

где

$$\tilde{\Omega}=-\frac{1}{2}\bar{\zeta}^2+\frac{f\gamma\bar{r}}{2}\left\{\frac{m_0\bar{r}_0^2}{p^3}+\frac{m_1\bar{r}_1^2}{p^3}+\frac{2m_0}{\bar{r}_0}+\frac{2m_1}{\bar{r}_1}\right\}. \qquad (6.5')$$

Так как член, не зависящий от координат точки M_2, все равно исчезает при дифференцировании, то вместо всей функции $\bar{\Omega}$ мы можем взять функцию $\tilde{\Omega}$.

Функция $\tilde{\Omega}$ имеет еще более простое выражение в случае плоской круговой задачи. В самом деле, тогда $\bar{\zeta}\equiv 0$, $\bar{r}=1$, $p=a$, $\gamma=1/n^2$, и мы получим

$$\tilde{\Omega}=\frac{f}{2n^2}\left\{\frac{m_0\bar{r}_0^2}{a^3}+\frac{m_1\bar{r}_1^2}{a^3}+\frac{2m_0}{\bar{r}_0}+\frac{2m_1}{\bar{r}_1}\right\}. \qquad (6.5'')$$

Возвращаясь пока к общему случаю, рассмотрим задачу о движении «нулевой массы» в непосредственной окрестности точки M_1, считая, как и ранее, что масса m_1 этой точки есть меньшая из двух конечных масс. Чтобы отнести движение точки M_2 к точке M_1 преобразуем уравнения (6.1) подстановкой

$$\bar{\xi}=x+\bar{\xi}_1, \qquad \bar{\eta}=y, \qquad \bar{\zeta}=z. \qquad (6.6)$$

В новых переменных уравнения движения точки M_2 вблизи точки M_1 могут быть написаны в виде

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dv^2}-2\frac{dy}{dv}&=\frac{\partial\tilde{\Omega}}{\partial x},\\ \frac{d^2y}{dv^2}+2\frac{dx}{dv}&=\frac{\partial\tilde{\Omega}}{\partial y},\\ \frac{d^2z}{dv^2}&=\frac{\partial\tilde{\Omega}}{\partial z},\end{aligned}\right\} \qquad (6.7)$$

где функция Ω определится формулой (6.5) с заменой старых координат их выражениями (6.6).

Положим для упрощения

$$r = \bar{r}_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \tag{6.8}$$

где r — радиус-вектор точки M_2 относительно M_1, и обозначим через R расстояние от точки M_2 до большей массы M_0, т. е. положим

$$R = \bar{r}_0 = \sqrt{(x+p)^2 + y^2 + z^2}. \tag{6.8'}$$

Тогда выражение для функции $\tilde{\Omega}$ напишется в виде

$$\tilde{\Omega} = -\frac{1}{2}z^2 + \frac{f\gamma\bar{r}}{2}\left\{\frac{m_0R^2}{p^3} + \frac{m_1r^2}{p^3} + \frac{2m_0}{R} + \frac{2m_1}{r}\right\} \tag{6.9}$$

и соответственно для случая круговой плоской задачи

$$\tilde{\Omega} = \frac{f}{2n^2}\left\{\frac{m_0R^2}{a^3} + \frac{m_1r^2}{a^3} + \frac{2m_0}{R} + \frac{2m_1}{r}\right\}. \tag{6.9'}$$

Напомним, что n обозначает здесь постоянную угловую скорость точки M_1 относительно M_0, а a есть радиус круговой орбиты точки M_1.

2. Ставя своей целью изучение движения точки M_2 в непосредственной окрестности точки M_1, будем теперь считать, что радиус-вектор r движущейся точки всегда остается меньше расстояния p (в системе координат Нехвила!) между двумя конечными массами.

Тогда обратное расстояние R^{-1} точки M_2 до большей массы M_0 можно разложить в ряд многочленов Лежандра.

В самом деле, мы можем написать

$$R^2 = r^2 + 2px + p^2, \tag{6.10}$$

откуда

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{p}\left[1 + 2\frac{x}{r}\cdot\frac{r}{p} + \left(\frac{r}{p}\right)^2\right]. \tag{6.10'}$$

Так как всегда $|x| \leqslant r$ и, как предположено, $r < p$, то по свойствам производящей функции многочленов Лежандра мы имеем

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{p}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\left(\frac{r}{p}\right)^s P_s\left(\frac{x}{r}\right), \tag{6.11}$$

где P_s обозначает s-й многочлен Лежандра.

Рассмотрим в выражении (6.9) члены, имеющие множителем массу m_0. Заменяя R^2 его выражением (6.10), подставим вместо R^{-1} разложение (6.11), выделив в последнем члены нулевого, первого и второго порядков.

Так как

$$P_0\left(\frac{x}{r}\right)=1,\quad P_1\left(\frac{x}{r}\right)=\frac{x}{r},\quad P_2\left(\frac{x}{r}\right)=\frac{3}{2}\left(\frac{x}{r}\right)^2-\frac{1}{2},$$

то мы получим после упрощений и приведений

$$\frac{R^2}{p^3}+\frac{2}{R}=\frac{3}{p}+\frac{3x^2}{p^3}+\frac{2}{p}\sum_{s=3}^{\infty}(-1)^s\left(\frac{r}{p}\right)^s P_s\left(\frac{x}{r}\right).$$

Подставим полученное выражение в формулу (6.9), отбросив притом постоянный член $3/p$, который все равно исчезнет при дифференцировании функции $\tilde{\Omega}$.

Мы получим

$$\tilde{\Omega}=-\frac{1}{2}z^2+\frac{f\gamma\bar{r}}{2}\left\{\frac{3m_0x^2}{p^3}+\frac{m_1(x^2+y^2+z^2)}{p^3}+\right.$$
$$\left.+\frac{2m_1}{r}+\frac{2m_0}{p}\sum_{s=3}^{\infty}(-1)^s\left(\frac{r}{p}\right)^s P_s\left(\frac{x}{r}\right)\right\}.$$

Последнее выражение можно также представить в следующем виде:

$$\tilde{\Omega}=\frac{f\gamma\bar{r}}{2}\left\{\frac{3(m_0+m_1)x^2}{p^3}-\frac{2m_1x^2}{p^3}+\frac{m_1(y^2+z^2)}{p^3}+\frac{2m_1}{r}\right\}-$$
$$-\frac{1}{2}z^2+f\gamma\Omega^*,\qquad(6.12)$$

где положено еще

$$\Omega^*=\frac{m_0\bar{r}}{p}\sum_{s=3}^{\infty}(-1)^s\left(\frac{r}{p}\right)^s P_s\left(\frac{x}{r}\right).\qquad(6.12')$$

Заменяя теперь в членах, имеющих делителем p^3, постоянную γ ее выражением, мы можем еще написать формулу (6.12) следующим образом:

$$\tilde{\Omega}=\frac{\bar{r}}{2}\left\{3x^2-\frac{2m_1}{m_0+m_1}x^2+\frac{m_1}{m_0+m_1}(y^2+z^2)+\frac{2f\gamma m_1}{r}\right\}-$$
$$-\frac{1}{2}z^2+f\gamma\Omega^*.\qquad(6.13)$$

Формула (6.12) или (6.13) представляет функцию $\tilde{\Omega}$ в виде суммы двух частей — главной и дополнительной. Главная часть представляет собой сумму однородного многочлена второй степени относительно координат x, y, z и неголоморфного члена $2f\gamma m_1/r$, имеющего разрыв второго рода в начале координат.

Дополнительная часть, т. е. функция $f\gamma\Omega^*$, представляет собой ряд, расположенный по степеням параметра $\alpha=\frac{1}{p}$, коэф-

фициентами которого являются целые многочлены относительно координат x, y, z.

Действительно, разложение функции Ω^* можно написать в виде

$$\Omega^* = \frac{m_0 \bar{r}}{2} \sum_{s=3}^{\infty} (-1)^s \alpha^{s+1} P_s^*(x, y, z), \tag{6.14}$$

где

$$P_s^*(x, y, z) = r^s P_s\left(\frac{x}{r}\right). \tag{6.14'}$$

Но многочлен Лежандра определяется формулой

$$P_s\left(\frac{x}{r}\right) = \sum_{\sigma=0}^{E(s/2)} P_{s\sigma} \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^{s-2\sigma},$$

где $P_{s\sigma}$ — числовые коэффициенты. Поэтому

$$P_s^*(x, y, z) = \sum_{\sigma=0}^{E(s/2)} P_{s\sigma} \cdot x^{s-2\sigma} (x^2 + y^2 + z^2)^\sigma$$

и, стало быть, есть однородный многочлен степени s относительно координат точки M_2.

Заменяя теперь в уравнениях (6.7) функцию $\tilde{\Omega}$ ее выражением (6.13), мы представим уравнения, определяющие движение «нулевой массы» вблизи точки M_1 в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dv^2} - 2\frac{dy}{dv} + \bar{r}\left[\frac{f\gamma m_1}{r^3} - 3 + \frac{2m_1}{m_0 + m_1}\right]x &= f\gamma \frac{\partial \Omega^*}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dv^2} + 2\frac{dx}{dv} + \bar{r}\left[\frac{f\gamma m_1}{r^3} - \frac{m_1}{m_0 + m_1}\right]y &= f\gamma \frac{\partial \Omega^*}{\partial y}, \\ \frac{d^2z}{dv^2} + \bar{r}\left[\frac{f\gamma m_1}{r^3} + \frac{1}{\bar{r}} - \frac{m_1}{m_0 + m_1}\right]z &= f\gamma \frac{\partial \Omega^*}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{6.15}$$

Согласно сказанному выше, правые части этих уравнений — бесконечные ряды, расположенные по степеням параметра α, коэффициентами которых служат целые однородные многочлены относительно координат движущейся точки.

Эти ряды можно рассматривать как начинающиеся с четвертой степени параметра α (если считать γ фиксированной постоянной) либо как начинающиеся с первой степени α, если учесть зависимость γ от α и положить $f\gamma = (m_0 + m_1)^{-1} \cdot \alpha^{-3}$.

Предполагая расстояние между конечными массами достаточно большим, т. е. считая параметр α достаточно малым, мы можем искать решение уравнений (6.15) в виде рядов,

расположенных по степеням этого параметра, т. е. в виде

$$x=\sum_{s=0}^{\infty}\alpha^s x^{(s)},\quad y=\sum_{s=0}^{\infty}\alpha^s y^{(s)},\quad z=\sum_{s=0}^{\infty}\alpha^s z^{(s)}. \tag{6.16}$$

Очевидно, что свободные члены этих рядов, составляющие первое приближение задачи, определятся уравнениями, которые выведем из (6.15), отбрасывая в последних все члены, содержащие параметр α, т. е. заменяя правые части этих уравнений нулями.

3. Уравнения первого приближения, дающие вместе с тем некоторое приближенное решение задачи Хилла, имеют вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dv^2}-2\frac{dy}{dv}+\bar{r}\left[\frac{f\gamma m_1}{r^3}-3+\frac{2m_1}{m_0+m_1}\right]x=0,\\ \frac{d^2y}{dv^2}+2\frac{dx}{dv}+\bar{r}\left[\frac{f\gamma m_1}{r^3}-\frac{m_1}{m_0+m_1}\right]y=0,\\ \frac{d^2z}{dv^2}+\bar{r}\left[\frac{f\gamma m_1}{r^3}+\frac{1}{\bar{r}}-\frac{m_1}{m_0+m_1}\right]z=0.\end{aligned}\right\} \tag{6.17}$$

Эти уравнения в свою очередь содержат параметр, а именно эксцентриситет e орбиты точки M_1.

Для приложений к конкретным задачам астрономии особенно интересны те случаи, в которых орбита точки M_1 есть эллипс, эксцентриситет которого не очень велик.

Тогда коэффициенты при x, y, z в уравнениях (6.17) можно рассматривать как ряды, расположенные по степеням эксцентриситета e, абсолютно сходящиеся, пока e не превышает предела Лапласа.

Чтобы получить первое приближение в этой (уже приближенной!) задаче, нужно положить в уравнениях (6.17) e равным нулю, т. е. рассмотреть первое приближение уравнений круговой задачи.

Эти уравнения первого приближения напишутся в виде

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dv^2}-2\frac{dy}{dv}+\left[\frac{f\gamma m_1}{r^3}-3+\frac{2m_1}{m_0+m_1}\right]x=0,\\ \frac{d^2y}{dv^2}+2\frac{dx}{dv}+\left[\frac{f\gamma m_1}{r^3}-\frac{m_1}{m_0+m_1}\right]y=0,\\ \frac{d^2z}{dv^2}+\left[\frac{f\gamma m_1}{r^3}+\frac{m_0}{m_0+m_1}\right]z=0.\end{aligned}\right\} \tag{6.17'}$$

Так как эти уравнения можно рассматривать, как только что замечено, как первое приближение круговой задачи, то мы можем получить один первый интеграл этих уравнений.

Действительно, если в уравнениях (6.7) положить e равным нулю, то эти уравнения, как не содержащие явно независимой

переменной, имеют интеграл Якоби

$$V^2 = \left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dv}\right)^2 = 2\tilde{\Omega} + 2h. \qquad (6.18)$$

Заменяя в равенстве (6.18) функцию $\tilde{\Omega}$ ее главной частью, мы и получим интеграл системы (6.17′), который, следовательно, напишется в виде

$$V^2 = \left\{3x^2 - \frac{2m_1}{m_0+m_1}x^2 + \frac{m_1(y^2+z^2)}{m_0+m_1} + \frac{2f\gamma m_1}{r}\right\} - z^2 + 2h. \qquad (6.18')$$

Предположим теперь, что масса m_1 точки M_1 весьма мала по сравнению с массой m_0 точки M_0.

Тогда мы можем пренебречь в уравнениях (6.17) членами, содержащими отношение m_1 к сумме масс, а в последнем из этих уравнений заменить второе слагаемое в скобках единицей. Тогда уравнения еще более упростятся, и мы получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dv^2} - 2\frac{dy}{dv} + \left[\frac{f\gamma m_1}{r^3} - 3\right]x = 0, \\ \frac{d^2y}{dv^2} + 2\frac{dx}{dv} + \frac{f\gamma m_1}{r^3}y = 0, \\ \frac{d^2z}{dv^2} + \left[\frac{f\gamma m_1}{r^3} + 1\right]z = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (6.17'')$$

а интеграл (6.18′) примет вид

$$\left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dv}\right)^2 = 3x^2 - z^2 + \frac{2f\gamma m_1}{r} + 2h. \qquad (6.18'')$$

В уравнениях (6.17) и (6.18) независимая переменная $v = nt$, где n — угловая скорость движения точки M_1 по круговой орбите, причем

$$n^2 = \frac{f(m_0+m_1)}{a^3}. \qquad (6.19)$$

С другой стороны, при $e = 0$ мы имеем

$$\gamma = \frac{1}{n^2}. \qquad (6.19')$$

Имея в виду эти соотношения и переходя в уравнениях движения к времени t как независимой переменной, мы приведем эти уравнения к следующему виду:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2n\frac{dy}{dt} + \frac{\mu x}{r^3} = 3n^2x, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + \frac{\mu y}{r^3} = 0, \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\mu z}{r^3} = -n^2z, \end{aligned}\right\} \qquad (6.20)$$

где положено еще для краткости $\mu = fm_1$.

Интеграл (6.18″) напишется тогда в виде

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=3n^2x^2-n^2z^2+\frac{2\mu}{r}+2h. \qquad (6.21)$$

Рассматривая, наконец, плоскую задачу, мы будем считать, что $z\equiv 0$, вследствие чего система (6.20) приведется к классическому виду системы Хилла

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}-2n\frac{dy}{dt}+\frac{\mu x}{(x^2+y^2)^{3/2}}&=3n^2x,\\ \frac{d^2y}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}+\frac{\mu y}{(x^2+y^2)^{3/2}}&=0\end{aligned}\right\} \qquad (6.22)$$

с первым интегралом

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=3n^2x^2+\frac{2\mu}{\sqrt{x^2+y^2}}+2h. \qquad (6.23)$$

Уравнения (6.22) определяют некоторое промежуточное движение точки M_2 и кладутся Хиллом в основу построенной им теории движения Луны.

Однако Хилл ищет не общее решение этих уравнений, а некоторое частное, содержащее две произвольные постоянные и удовлетворяющее условиям периодичности.

Такое периодическое решение системы (6.22) Хилл ищет в виде бесконечных тригонометрических рядов вида

$$\left.\begin{aligned}x&=A_0\cos n_1(t-t_0)+A_1\cos 3n_1(t-t_0)+A_2\cos 5n_1(t-t_0)+\ldots,\\ y&=B_0\sin n_1(t-t_0)+B_1\sin 3n_1(t-t_0)+B_2\sin 5n_1(t-t_0)+\ldots,\end{aligned}\right\} \qquad (6.24)$$

где t_0 и n_1 — произвольные постоянные, а A_s и B_s — постоянные коэффициенты, определяемые как функции n и n_1 из условия задачи.

Хилл дает оригинальный метод для определения коэффициентов рядов (6.24), рассматривая бесконечную систему уравнений, которыми эти коэффициенты определяются. Однако Хилл вовсе не касается вопроса о сходимости полученных им рядов, которые определяют промежуточную орбиту Луны, называемую в астрономии *вариационной кривой*.

Впервые доказательство сходимости рядов Хилла дал А. М. Ляпунов, который вместе с тем применил свой собственный метод построения рядов Хилла.

Так как метод Хилла уже неоднократно излагался в учебниках, а мемуар А. М. Ляпунова до сих пор мало известен, то мы изложим здесь только результаты А. М. Ляпунова с некоторыми дополнениями, которые сделал Г. А. Мерман.