

§ 2. Метод Ляпунова решения задачи Хилла

1. Итак, рассмотрим уравнения (6.22), которые прежде всего преобразуем к новой независимой переменной τ при помощи подстановки

$$\tau = n_1(t - t_0), \quad (6.25)$$

где, как уже отмечено, t_0 и n_1 — две произвольные постоянные.

Если мы положим, сверх того,

$$\frac{n}{n_1} = m, \quad \frac{\mu}{n_1^2} = k, \quad (6.25')$$

то преобразованные уравнения примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} - 2m \frac{dy}{d\tau} + k \frac{x}{r^3} &= 3m^2x, \\ \frac{d^2y}{d\tau^2} + 2m \frac{dx}{d\tau} + k \frac{y}{r^3} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.26)$$

В эти уравнения Ляпунов вводит искусственным образом новый параметр λ , заменяя уравнения (6.26) следующими:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} - 2m \frac{dy}{d\tau} - \frac{3}{2}m^2x + k \frac{x}{r^3} &= \frac{3}{2}\lambda x, \\ \frac{d^2y}{d\tau^2} + 2m \frac{dx}{d\tau} - \frac{3}{2}m^2y + k \frac{y}{r^3} &= -\frac{3}{2}\lambda y. \end{aligned} \right\} \quad (6.26')$$

Таким образом, система (6.26) получается из системы (6.26'), если мы положим в последней $\lambda = m^2$.

Уравнения (6.26') мы и будем теперь рассматривать вместо уравнений (6.26), причем будем иметь в виду, что в окончательном результате нужно будет положить $\lambda = m^2$.

Если мы положим в уравнениях (6.26) $\lambda = 0$, то получим уравнения, которым можно удовлетворить, полагая

$$x = a \cos \tau, \quad y = a \sin \tau, \quad (6.27)$$

где a — постоянная, определяемая равенством *)

$$\frac{k}{a^3} = 1 + 2m + \frac{3}{2}m^2. \quad (6.27')$$

Возвращаясь теперь к уравнениям (6.26'), в которых λ будем предполагать не превосходящим по числовой величине некоторого предела, будем искать такое решение этих уравнений,

*) Постоянная a , разумеется, не совпадает с расстоянием между конечными массами в круговой задаче. Впрочем, последнее расстояние не входит в уравнения (6.22), которые выводятся из уравнений круговой задачи при $M_0M_1 = a = \infty$.

в которых x и y были бы периодическими функциями τ с общим периодом 2π , обращающимися при $\lambda = 0$ в (6.27).

Предварительно сделаем еще одно преобразование, вводя вместо x и y комплексные сопряженные переменные u и v подстановкой Хилла

$$u = x + iy, \quad v = x - iy \quad (i = \sqrt{-1}). \quad (6.28)$$

Уравнения, определяющие новые переменные, напишутся в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2u}{d\tau^2} + 2mi \frac{du}{d\tau} - \frac{3}{2} m^2 u + \frac{ku}{(uv)^{\frac{1}{2}}} &= \frac{3}{2} \lambda v, \\ \frac{d^2v}{d\tau^2} - 2mi \frac{dv}{d\tau} - \frac{3}{2} m^2 v + \frac{kv}{(uv)^{\frac{1}{2}}} &= \frac{3}{2} \lambda u \end{aligned} \right\} \quad (6.29)$$

и при $\lambda = 0$ имеют частное решение, соответствующее (6.27), определяемое формулами ($e = 2,7182\dots$)

$$u = ae^{i\tau}, \quad v = ae^{-i\tau} \quad (i = \sqrt{-1}). \quad (6.30)$$

Так как нашей ближайшей целью является нахождение решения системы (6.29), близкого к (6.30), то для большего удобства введем, следуя Ляпунову, новые зависимые переменные p и q подстановкой

$$u = a(1 - p)e^{i\tau}, \quad v = a(1 - q)e^{-i\tau}. \quad (6.31)$$

Тогда, как легко проверить, мы получим для определения функций p и q следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2p}{d\tau^2} + 2(1+m)i \frac{dp}{d\tau} + l(1-p) - l(1-p)^{-\frac{1}{2}}(1-q)^{-\frac{3}{2}} &= \\ &= \frac{3}{2}\lambda(q-1)e^{-2i\tau}, \\ \frac{d^2q}{d\tau^2} - 2(1+m)i \frac{dq}{d\tau} + l(1-q) - l(1-p)^{-\frac{3}{2}}(1-q)^{-\frac{1}{2}} &= \\ &= \frac{3}{2}\lambda(p-1)e^{+2i\tau}, \end{aligned} \right\} \quad (6.32)$$

где положено в добавок для сокращения

$$l = 1 + 2m + \frac{3}{2}m^2. \quad (6.33)$$

Уравнения (6.32) имеют при $\lambda = 0$ решение $p = q = 0$, соответствующее решению (6.30) системы (6.29), а поэтому нашей задачей является нахождение решения системы (6.32) при $\lambda \neq 0$ и обращающегося в нулевое решение, когда λ делается нулем.

Считая, что числовые значения величин p и q остаются всегда меньшими единицы, мы можем разложить функции

$$(1-p)^{-\frac{1}{2}}(1-q)^{-\frac{3}{2}}, \quad (1-p)^{-\frac{3}{2}}(1-q)^{-\frac{1}{2}}$$

в ряды, расположенные по целым положительным степеням p и q . Выполняя эти разложения, мы имеем

$$\left. \begin{aligned} (1-p)^{-\frac{1}{2}}(1-q)^{-\frac{3}{2}} &= 1 + \frac{1}{2}p + \frac{3}{2}q + R_p, \\ (1-p)^{-\frac{3}{2}}(1-q)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{3}{2}p + \frac{1}{2}q + R_q, \end{aligned} \right\} \quad (6.34)$$

где R_p и R_q обозначают совокупности членов выше первого измерения.

При помощи формул (6.34) уравнения (6.32) приведутся к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2p}{d\tau^2} + 2(1+m)i\frac{dp}{d\tau} - \frac{3}{2}l(p+q) &= \frac{3}{2}\lambda(q-1)e^{-2i\tau} + IR_p, \\ \frac{d^2q}{d\tau^2} - 2(1+m)i\frac{dq}{d\tau} - \frac{3}{2}l(p+q) &= \frac{3}{2}\lambda(p-1)e^{+2i\tau} + IR_q. \end{aligned} \right\} \quad (6.35)$$

Для этих уравнений мы будем теперь искать периодическое решение с периодом 2π , исчезающее при $\lambda = 0$, и прежде всего покажем, что при достаточно малом $|\lambda|$ функции p и q в этом решении можно определить рядами, расположенными по степеням λ и содержащими только одну произвольную постоянную.

2. Действительно, пусть

$$p_0, q_0, p'_0, q'_0 \quad (6.35')$$

— начальные значения переменных Ляпунова, соответствующие $\tau = 0$, т. е. $t = t_0$ (штрихи здесь означают дифференцирование по переменной τ).

При $\lambda = 0$ мы имеем решение, для которого все начальные значения (6.35') также нули.

Поэтому, когда модули величин

$$p_0, q_0, p'_0, q'_0, \lambda \quad (6.35'')$$

достаточно малы, на основании общей теоремы Ляпунова — Пуанкаре функции p и q , удовлетворяющие уравнениям (6.35), и их производные p' , q' можно представить рядами, расположенными по целым положительным степеням величин (6.35''), абсолютно сходящимися для всех значений τ , лежащих между нулем и некоторым пределом T , который уменьшением модулей величин (6.35'') может быть сделан как угодно большим.

Допустим, что таким образом мы сделали $T > 2\pi$. Тогда упомянутыми рядами мы можем воспользоваться для вычисления значений функций p, q, p', q' для значения $\tau = 2\pi$. Пусть

$$\bar{p} = p(2\pi), \quad \bar{q} = q(2\pi), \quad \bar{p}' = p'(2\pi), \quad \bar{q}' = q'(2\pi).$$

Составляя тогда уравнения

$$\bar{p} = p_0, \quad \bar{q} = q_0, \quad \bar{p}' = p'_0, \quad \bar{q}' = q'_0, \quad (6.36)$$

мы получим необходимые и достаточные условия того, чтобы функции p и q , определяемые уравнениями (6.35), были периодическими с периодом 2π .

Тогда наша задача приводится к исследованию уравнений (6.36), в которых подлежащими определению неизвестными являются начальные условия (6.35').

Но нетрудно показать, что уравнения (6.36) не все различны и что одно из них есть следствие трех остальных.

Действительно, уравнения (6.35) получились после ряда преобразований из системы (6.22), которая имеет один первый интеграл (6.23). Проделывая с этим интегралом те же преобразования, мы выведем также некоторый первый интеграл системы (6.35). Этот интеграл можно представить в виде

$$2(1+m)(p+q) - i(p' - q') + \\ + \frac{3}{4}\lambda[(1-p)^2 e^{2i\pi} + (1-q)^2 e^{-2i\pi}] + \dots = \text{const}, \quad (6.37)$$

где не выписаны члены выше второго порядка относительно переменных Ляпунова.

Подставляя сюда вместо переменных Ляпунова их выражения в виде рядов, расположенных по степеням величин (6.35'') и полагая затем $\tau = 2\pi$, мы получим следующее тождество:

$$2(1+m)(\bar{p} + \bar{q}) - i(\bar{p}' - \bar{q}') + \frac{3}{4}\lambda[(1-\bar{p})^2 + (1-\bar{q})^2] + \dots = \\ = 2(1+m)(p_0 + q_0) - i(p'_0 - q'_0) + \\ + \frac{3}{4}\lambda[(1-p_0)^2 + (1-q_0)^2] + \dots \quad (6.37')$$

относительно величин (6.35').

Отсюда ясно, что если мы удовлетворим каким-либо трем из уравнений (6.36), то четвертое удовлетворится само собой.

Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением трех следующих уравнений:

$$\bar{p} = p_0, \quad \bar{p}' = p'_0, \quad \bar{q}' = q'_0. \quad (6.38)$$

Посмотрим, что могут дать эти уравнения. Обращаясь к уравнениям (6.35), мы замечаем, что если в них отбросить все

члены выше первого порядка относительно p и q , а также члены, зависящие от λ , то эти уравнения превратятся в линейные с постоянными коэффициентами, общее решение которых определяется формулами

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{3}{2} l C_1 e^{+\kappa i \tau} - \left[\kappa^2 + 2(1+m) \kappa + \frac{3}{2} l \right] C_2 e^{-\kappa i \tau} + C_3 \tau + C', \\ q &= \frac{3}{2} l C_2 e^{-\kappa i \tau} - \left[\kappa^2 + 2(1+m) \kappa + \frac{3}{2} l \right] C_1 e^{+\kappa i \tau} - C_3 \tau + C'', \end{aligned} \right\} \quad (6.39)$$

где

$$\kappa = \sqrt{1 + 2m - \frac{1}{2} m^2}, \quad (6.39')$$

а C_1, C_2, C_3, C', C'' — произвольные постоянные, связанные соотношением

$$C' + C'' = \frac{4}{3} \frac{m+1}{l} i C_3. \quad (6.39'')$$

Выражая эти постоянные через начальные значения (6.35'), мы представим их в виде линейных комбинаций величин p_0, q_0, p'_0, q'_0 , причем C_1, C_2 и C_3 выражаются только через три следующие постоянные:

$$p_0 + q_0, \quad p'_0, \quad q'_0, \quad (6.40)$$

относительно которых они будут независимыми линейными формами.

Подразумевая теперь под

$$C_1, C_2, C_3 \quad \text{и} \quad C = C' - C'' \quad (6.40')$$

определяемые таким путем линейные формы величин

$$p_0 + q_0, \quad p'_0, \quad q'_0 \quad \text{и} \quad p_0 - q_0,$$

мы введем эти формы в качестве произвольных постоянных и в общее решение точных уравнений (6.35), которое представляется, таким образом, рядами, расположенными по целым положительным степеням величин

$$C_1, C_2, C_3, C \quad \text{и} \quad \lambda. \quad (6.40'')$$

Мы получим при этом для p и q выражения, которые будут отличаться от только что рассмотренных лишь членами выше первого порядка относительно величин (6.40) и членами, зависящими от λ .

Вследствие этого составляя уравнения (6.38) и выписывая в них только члены, не зависящие от λ и притом линейные

относительно величин (6.40), мы получим

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \frac{3}{2} l(\rho - 1) C_1 - \left[\kappa^2 + 2(1+m)\kappa + \frac{3}{2} l \right] \left(\frac{1}{\rho} - 1 \right) C_2 + \\ &\quad + 2\pi C_3 + \dots = 0, \\ F_2 &= \frac{3}{2} l(\rho - 1) C_1 + \\ &\quad + \left[\kappa^2 + 2(1+m)\kappa + \frac{3}{2} l \right] \left(\frac{1}{\rho} - 1 \right) C_2 + \dots = 0, \\ F_3 &= \left[\kappa^2 + 2(1+m)\kappa + \frac{3}{2} l \right] (\rho - 1) C_1 + \\ &\quad + \frac{3}{2} l \left(\frac{1}{\rho} - 1 \right) C_2 + \dots = 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.41)$$

где $\rho = e^{2\kappa\pi i}$.

Вычисляя функциональный определитель левых частей этих уравнений и полагая затем все величины (6.40'') равными нулю, мы найдем

$$D = \left[\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(C_1, C_2, C_3)} \right]_0 = -16\pi(1+m)\kappa[\kappa + 2(1+m)]^2 \sin^2 \pi\kappa, \quad (6.41')$$

и если этот определитель не есть нуль, что мы и будем предполагать *), то по теореме о существовании неявных функций уравнения (6.41) будут разрешимы относительно C_1, C_2, C_3 . При условии, что эти последние величины уничтожаются при $C = \lambda = 0$, уравнения (6.41) дадут для них вполне определенные выражения в виде рядов, расположенных по степеням C, λ , абсолютно сходящихся пока модули C и λ достаточно малы.

Так как в получаемых таким образом выражениях C_1, C_2 и C_3 постоянная C будет входить только в члены выше первого порядка относительно C и λ , то выражения эти позволят определить величины (6.40) в виде рядов, расположенных по целым положительным степеням величин $p_0 - q_0$ и λ .

Таким образом, начальные значения p_0, q_0, p'_0, q'_0 , а следовательно, и самые функции p, q, p', q' , соответствующие исключому периодическому решению, представляются рядами, расположеннымми по целым положительным степеням величин $p_0 - q_0$ и λ , и будут содержать, следовательно, одну произвольную постоянную $p_0 - q_0$.

Мы будем далее рассматривать это периодическое решение в предположении

$$p_0 = q_0, \quad (6.42)$$

равносильном допущению, что при $\tau = 0$ имеем $y = 0$.

*) А. М. Ляпунов замечает, что определитель (6.41') заведомо не равен нулю для случая теории движения Луны. Но этот определитель может быть отличен от нуля и в других случаях.

Так как τ уже содержит произвольную постоянную t_0 , то допущение (6.42) не внесет никакого существенного ограничения нашей задачи и послужит только к определению того, что мы устанавливаемся понимать под t_0 .

Из сказанного ясно, что t_0 есть тот момент времени, в который точка «нулевой массы» находится на прямой M_0M_1 , проходящей через обе конечные массы.

3. Установив существование периодического решения уравнений (6.35), переходим к фактическому нахождению этого решения в виде рядов, расположенных по целым положительным степеням параметра λ , коэффициенты которых были бы все периодическими функциями τ с общим периодом, равным 2π .

Итак, положим

$$p = \sum_{j=1}^{\infty} p_j \lambda^j, \quad q = \sum_{j=1}^{\infty} q_j \lambda^j, \quad (6.43)$$

где p_j, q_j — не зависящие от λ периодические функции τ , которые, согласно условию (6.42), будем определять в предположении, что

$$p_j(0) = q_j(0) \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (6.43')$$

Для того чтобы получить уравнения, которым должны удовлетворять неопределенные коэффициенты p_j, q_j , мы должны подставить ряды (6.43) вместо p и q в уравнения (6.35) и затем приравнять в левых и правых частях получившихся равенств коэффициенты при одинаковых степенях параметра λ . Для этого нужно прежде всего подставить (6.43) в разложения функций R_p, R_q и результаты подстановки расположить по степеням параметра λ , что дает разложения вида

$$R_p = \sum_{j=2}^{\infty} P_j \lambda^j, \quad R_q = \sum_{j=2}^{\infty} Q_j \lambda^j, \quad (6.44)$$

в которых величины P_j и Q_j зависят, очевидно, только от тех $p_{j'}, q_{j'}$, для которых $j' < j$.

Для получения нужных уравнений можно поступить и иначе и вывести эти уравнения другим способом, не требующим подстановок рядов в ряды, что всегда приводит к громоздким выкладкам. В самом деле, так как ряды (6.43) тождественны рядам Тэйлора, то мы должны иметь

$$p_j = \frac{1}{j!} \left(\frac{d^j p}{d\lambda^j} \right)_{\lambda=0}, \quad q_j = \frac{1}{j!} \left(\frac{d^j q}{d\lambda^j} \right)_{\lambda=0}. \quad (6.45)$$

Поэтому нужные уравнения мы получим, дифференцируя уравнения (6.35) последовательно по параметру λ и полагая после каждого такого дифференцирования $\lambda = 0$.

Так или иначе, мы получим в результате следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 p_1}{d\tau^2} + 2(1+m)i \frac{dp_1}{d\tau} - \frac{3}{2}l(p_1 + q_1) &= -\frac{3}{2}e^{-2i\tau}, \\ \frac{d^2 q_1}{d\tau^2} - 2(1+m)i \frac{dq_1}{d\tau} - \frac{3}{2}l(p_1 + q_1) &= -\frac{3}{2}e^{+2i\tau} \end{aligned} \right\} \quad (6.46)$$

и для $j > 1$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 p_j}{d\tau^2} + 2(1+m)i \frac{dp_j}{d\tau} - \frac{3}{2}l(p_j + q_j) &= \frac{3}{2}q_{j-1}e^{-2i\tau} + lP_j, \\ \frac{d^2 q_j}{d\tau^2} - 2(1+m)i \frac{dq_j}{d\tau} - \frac{3}{2}l(p_j + q_j) &= \frac{3}{2}p_{j-1}e^{+2i\tau} + lQ_j. \end{aligned} \right\} \quad (6.46')$$

Из системы (6.46) мы определим p_1 и q_1 , а затем из (6.46') последовательно найдем p_2, q_2, p_3, q_3 и т. д.

Покажем теперь, что при условии периодичности и при условии (6.43') функции p_j и q_j , удовлетворяющие вышенаписанным уравнениям, определяются вполне и, как нетрудно убедиться, будут вида

$$\left. \begin{aligned} p_j &= \sum_{s=0}^{s=j} a_{j, j-2s} e^{2(j-2s)i\tau}, \\ q_j &= \sum_{s=0}^{s=j} a_{j, j-2s} e^{-2(j-2s)i\tau}, \end{aligned} \right\} \quad (6.47)$$

где $a_{j,s}$ — некоторые постоянные.

Действительно, составляя характеристическое уравнение системы (6.46), мы немедленно убедимся, что $\pm 2i$ не являются его корнями. Поэтому неоднородная система (6.46) обязательно имеет решение, в котором p_1 и q_1 суть линейные комбинации с постоянными коэффициентами функций $e^{+2i\tau}$ и $e^{-2i\tau}$. Требуя, чтобы для этого решения, очевидно периодического, выполнялось условие $p_1(0) = q_1(0)$, мы найдем, что его можно представить в виде

$$p_1 = a_{1,1}e^{2i\tau} + a_{1,-1}e^{-2i\tau}, \quad q_1 = a_{1,1}e^{-2i\tau} + a_{1,-1}e^{2i\tau}, \quad (6.47')$$

где

$$a_{1,1} = -\frac{9}{16} \frac{2+4m+3m^2}{6-4m+m^2}, \quad a_{1,-1} = \frac{3}{16} \frac{38+28m+9m^2}{6-4m+m^2}. \quad (6.47'')$$

Очевидно, что решение (6.47') имеет вид (6.47), а поэтому выражения (6.47) справедливы для $j = 1$.

Предположим, что формулы (6.47) справедливы для всех $j < r$, и докажем, что тогда они будут также справедливы и для $j = r$.

Напишем уравнения (6.46') для $j = r$. Так как P_r и Q_r зависят только от тех p_j, q_j , для которых $j < r$, то правые части

уравнений (6.46') (для $j = r$) будут представлять собой многочлены степени r относительно величин $e^{\pm 2i\tau}$ той же структуры, что и p_j, q_j . Следовательно, мы можем написать

$$\left. \begin{aligned} \frac{3}{2} q_{r-1} e^{-2i\tau} + lP_r &= \sum_{s=0}^r A_{r, r-2s} e^{+2(r-2s)i\tau}, \\ \frac{3}{2} p_{r-1} e^{+2i\tau} + lQ_r &= \sum_{s=0}^r A_{r, r-2s} e^{-2(r-2s)i\tau}, \end{aligned} \right\} \quad (6.48)$$

где $A_{r, r-2s}$ суть постоянные, известным образом зависящие от постоянных a_j, σ , соответствующих $j < r$.

Эти постоянные $A_{r, r-2s}$ являются, как нетрудно проверить, многочленами с положительными коэффициентами относительно постоянных a_j, σ , для которых $j < r$.

Таким образом, если все p_j, q_j , для которых $j < r$, представляются формулами (6.47), то уравнения (6.46') для $j = r$ примут вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 p_r}{d\tau^2} + 2(1+m)i \frac{dp_r}{d\tau} - \frac{3}{2} l(p_r + q_r) &= \sum_{s=0}^r A_{r, r-2s} e^{2(r-2s)i\tau}, \\ \frac{d^2 q_r}{d\tau^2} - 2(1+m)i \frac{dq_r}{d\tau} - \frac{3}{2} l(p_r + q_r) &= \sum_{s=0}^r A_{r, r-2s} e^{-2(r-2s)i\tau}. \end{aligned} \right\} \quad (6.48')$$

Так как определяющее уравнение линейной системы, соответствующей (6.48'), то же самое, что и для системы (6.46), и не имеет корней вида $\pm 2ki$ ($k = 1, 2, \dots, r$) *), то система (6.48') обязательно имеет решение, в котором p_r и q_r — линейные комбинации с постоянными коэффициентами функций $e^{\pm 2ki\tau}$ ($k = 1, 2, \dots, r$).

Требуя, чтобы для этого решения (очевидно, периодического) выполнялось условие $p_r(0) = q_r(0)$, мы получим для p_r и q_r выражения вида (6.47), причем коэффициенты a_r, σ определяются

*) В сущности, заключение, что характеристическое уравнение линейной системы, соответствующей (6.48'), не имеет корней вида $\pm 2ki$, где k — целое число, является только предположением, или ограничением, накладываемым на параметр m . Действительно, корни упомянутого характеристического уравнения определяются формулой

$$\lambda = \pm \sqrt{-\frac{3}{2} l \pm \sqrt{\frac{9}{4} l^2 - 4(1+m)^2}}$$

и при некоторых m могут быть вида $\pm 2ki$.

уравнениями вида

$$\left. \begin{aligned} & \left[4\sigma^2 + 4(1+m)\sigma + \frac{3}{2}l \right] a_{r,\sigma} + \frac{3}{2}la_{r,-\sigma} = -A_{r,\sigma} \\ & (\sigma = -r, -r+2, \dots, r-2, r), \end{aligned} \right\} \quad (6.49)$$

из которых найдем

$$a_{r,\sigma} = \frac{\frac{3}{2}l A_{r,-\sigma} - \left[4\sigma^2 - 4(1+m)\sigma + \frac{3}{2}l \right] A_{r,\sigma}}{2\sigma^2 [2(4\sigma^2 - 1) - 4m + m^2]}, \quad (6.49')$$

если σ не нуль, и

$$a_{r,0} = -\frac{1}{3l} A_{r,0} \quad (6.49'')$$

для четного r .

Таким образом, зная, что p_1 и q_1 определяются выражениями вида (6.47), мы можем быть уверены, что того же вида выражения получатся и для всех остальных p_j и q_j . При этом, зная $a_{1,1}$ и $a_{1,-1}$, мы можем вычислять все остальные коэффициенты по формулам (6.49') и (6.49''), которые дают все $a_{r,\sigma}$, соответствующие какому-либо r , когда известны все $a_{j,s}$, для которых $j < r$.

Таким образом, убеждаемся, что искомые функции представляются рядами

$$\left. \begin{aligned} p &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=0}^j a_{j,j-2s} \lambda^j e^{2(j-2s)i\tau}, \\ q &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=0}^j a_{j,j-2s} \lambda^j e^{-2(j-2s)i\tau}, \end{aligned} \right\} \quad (6.50)$$

периодическими относительно τ с периодом 2π и выполняющими условие (6.42).

Возвращаясь теперь от переменных p и q к переменным u и v , а затем к переменным x и y , мы найдем также периодические ряды, расположенные по степеням параметра λ , удовлетворяющие уравнениям (6.26'), а полагая, наконец, $\lambda = m^2$, получим нужное нам решение уравнений Хилла (6.26).

Все эти ряды будут сходящимися, если сходятся ряды (6.50), а поэтому главной нашей задачей будет теперь доказательство сходимости этих последних рядов.

§ 3. Доказательство сходимости рядов Ляпунова

1. Доказательство сходимости рядов (6.50), представляющих периодическое решение системы (6.35), А. М. Ляпунов проводит при помощи построения ряда, который является усиливающим (мажорантой) для обоих рядов (6.50), которые можно рассматривать как расположенные по степеням λ и $e^{2i\tau}$.