уравнениями вида

$$\left.\begin{aligned}&\left[4\sigma^2+4(1+m)\sigma+\frac{3}{2}l\right]a_{r,\sigma}+\frac{3}{2}la_{r,-\sigma}=-A_{r,\sigma}\\&(\sigma=-r,\ -r+2,\ \ldots,\ r-2,\ r),\end{aligned}\right\}\qquad(6.49)$$

из которых найдем

$$a_{r,\sigma}=\frac{\frac{3}{2}lA_{r,-\sigma}-\left[4\sigma^2-4(1+m)\sigma+\frac{3}{2}l\right]A_{r,\sigma}}{2\sigma^2\left[2(4\sigma^2-1)-4m+m^2\right]},\qquad(6.49')$$

если $\sigma$ не нуль, и

$$a_{r,0}=-\frac{1}{3l}A_{r,0}\qquad(6.49'')$$

для четного $r$.

Таким образом, зная, что $p_1$ и $q_1$ определяются выражениями вида (6.47), мы можем быть уверены, что того же вида выражения получатся и для всех остальных $p_j$ и $q_j$. При этом, зная $a_{1,1}$ и $a_{1,-1}$, мы можем вычислять все остальные коэффициенты по формулам (6.49′) и (6.49″), которые дают все $a_{r,\sigma}$, соответствующие какому-либо $r$, когда известны все $a_{j,s}$, для которых $j<r$.

Таким образом, убеждаемся, что искомые функции представятся рядами

$$\left.\begin{aligned}p&=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{j}a_{j,j-2s}\lambda^j e^{2(j-2s)i\tau},\\q&=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{j}a_{j,j-2s}\lambda^j e^{-2(j-2s)i\tau},\end{aligned}\right\}\qquad(6.50)$$

периодическими относительно $\tau$ с периодом $2\pi$ и выполняющими условие (6.42).

Возвращаясь теперь от переменных $p$ и $q$ к переменным $u$ и $v$, а затем к переменным $x$ и $y$, мы найдем также периодические ряды, расположенные по степеням параметра $\lambda$, удовлетворяющие уравнениям (6.26′), а полагая, наконец, $\lambda=m^2$, получим нужное нам решение уравнений Хилла (6.26).

Все эти ряды будут сходящимися, если сходятся ряды (6.50), а поэтому главной нашей задачей будет теперь доказательство сходимости этих последних рядов.

## § 3. Доказательство сходимости рядов Ляпунова

**1.** Доказательство сходимости рядов (6.50), представляющих периодическое решение системы (6.35), А. М. Ляпунов проводит при помощи построения ряда, который является усиливающим (мажорантой) для обоих рядов (6.50), которые можно рассматривать как расположенные по степеням $\lambda$ и $e^{2i\tau}$.

Рассмотрим сначала некоторые вспомогательные предложения, которые будут использованы далее при построении усиливающего ряда. Сначала докажем следующую лемму.

Лемма. *Если $a$, $b$, $c$ — положительные числа, удовлетворяющие неравенству $ac-b^2>0$, а $M>0$ и не превосходит меньшего корня уравнения*

$$\frac{x^2}{a}-2\frac{x}{b}+\frac{1}{c}=0, \tag{6.51}$$

*то нижней границей модуля функции*

$$f(x)=a-2bx+cx^2 \tag{6.51'}$$

*при величинах $x$, для которых $|x|\leqslant M$, будет*

$$f(M)=a-2bM+cM^2.$$

Представим комплексное число $x$ в виде

$$x=\rho e^{i\varphi},$$

где $\rho=|x|$ — его модуль, а $\varphi$ — аргумент.

Тогда мы имеем

$$f(x)=a-2b\rho e^{i\varphi}+c\rho^2e^{2i\varphi},\quad f(\bar{x})=a-2b\rho e^{-i\varphi}+c\rho^2e^{-2i\varphi}$$

($\bar{x}$ обозначает, как обычно, число, сопряженное с $x$).

Далее находим

$$|f(x)|^2=f(x)\cdot\overline{f(x)}=f(x)f(\bar{x})=$$
$$=a^2+4b^2\rho^2+c^2\rho^4-4b\rho(a+c\rho^2)\cos\varphi+2ac\rho^2\cos 2\varphi$$

и

$$[f(\rho)]^2=a^2+4b^2\rho^2+c^2\rho^4-4b\rho(a+c\rho^2)+2ac\rho^2,$$

откуда

$$|f(x)|^2-[f(\rho)]^2=4b\rho(a+c\rho^2)(1-\cos\varphi)-2ac\rho^2(1-\cos 2\varphi)=$$
$$=8b\rho(a+c\rho^2)\sin^2\frac{\varphi}{2}-4ac\rho^2\sin^2\varphi=$$
$$=8abc\rho\left\{\frac{\rho^2}{a}+\frac{1}{c}-2\frac{\rho}{b}\cos^2\frac{\varphi}{2}\right\}\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Но по условию $\rho\leqslant M$ и, следовательно, не превосходит меньшего (положительного) корня уравнения (6.51), т. е.

$$\frac{\rho^2}{a}+\frac{1}{c}-2\frac{\rho}{b}\geqslant 0.$$

Поэтому из предыдущего неравенства выводим

$$|f(x)|^2-[f(\rho)]^2\geqslant 8abc\rho\left(2\frac{\rho}{b}-2\frac{\rho}{b}\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)\sin^2\frac{\varphi}{2}=$$
$$=16ac\rho^2\sin^4\frac{\varphi}{2}\geqslant 0$$

и, стало быть,

$$|f(x)| \geqslant |f(\rho)| = f(\rho),$$

так как (в силу неравенства $ac - b^2 > 0$) при всяком $\rho$ будем иметь $f(\rho) > 0$.

Далее имеем

$$f(\rho) - f(M) = 2(b - cM)(M - \rho) + c(M - \rho)^2.$$

Так как по условию $M$ не превосходит меньшего корня уравнения (6.51), то

$$M \leqslant \frac{a}{b} - \frac{1}{bc}\sqrt{ac(ac - b^2)} < \frac{a}{b} - \frac{1}{bc}\sqrt{(ac - b^2)(ac - b^2)} = \frac{b}{c},$$

откуда $b - cM > 0$, и мы находим

$$f(\rho) - f(M) \geqslant 0,$$

что и доказывает лемму Ляпунова.

Применим эту лемму к выражению, стоящему в квадратных скобках знаменателя формулы (6.49′), т. е. к функции от параметра $m$:

$$f(m) = 2(4\sigma^2 - 1) - 4m + m^2.$$

Тогда уравнение (6.51) напишется в виде

$$\frac{m^2}{2(4\sigma^2 - 1)} - 2\frac{m}{2} + 1 = 0$$

и меньший его корень определится, как легко видеть, формулой

$$m_1 = \frac{2\sqrt{4\sigma^2 - 1}}{\sqrt{4\sigma^2 - 1} + \sqrt{4\sigma^2 - 3}}. \tag{6.52}$$

Поэтому при $|m| \leqslant M \leqslant m_1$ будем иметь неравенство

$$|2(4\sigma^2 - 1) - 4m + m^2| \geqslant 2(4\sigma^2 - 1) - 4M + M^2.$$

Правую часть этого неравенства можно сделать не зависящей от $\sigma$. Действительно, для любого $\sigma$ мы имеем $m_1 > 1$, но притом $\lim\limits_{\sigma \to \infty} m_1 = 1$.

Поэтому мы должны предположить $M \leqslant 1$. Тогда можно написать, что

$$|2(4\sigma^2 - 1) - 4m + m^2| \geqslant 6 - 4M + M^2 \tag{6.53}$$

при условии, что

$$|m| \leqslant M \leqslant 1.$$

Рассмотрим теперь функцию

$$f(m) = 1 - 2m + \frac{3}{2}m^2,$$

которая, очевидно, удовлетворяет условиям леммы Ляпунова.

Для этой функции уравнение (6.51) напишется в виде

$$m^2 - 2m + \frac{2}{3} = 0.$$

Обозначая через $m_1'$ меньший корень этого уравнения, имеем

$$m_1' = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}4226497.$$

Поэтому, применяя лемму Ляпунова, будем иметь

$$\left|1 - 2m + \frac{3}{2}m^2\right| \geqslant 1 - 2M + \frac{3}{2}M^2$$

для всякого $m$, удовлетворяющего условию

$$|m| \leqslant M \leqslant m_1'.$$

Но в левой части неравенства можно, очевидно, заменить $m$ на $-m$, что дает следующее неравенство:

$$\left|1 + 2m + \frac{3}{2}m^2\right| = |l| \geqslant 1 - 2M + \frac{3}{2}M^2, \tag{6.53'}$$

также справедливое при $|m| \leqslant M \leqslant m_1'$.

Объединяя полученные результаты, мы убеждаемся, что оба неравенства (6.53) и (6.53′) заведомо будут выполняться для всякого значения $m$, удовлетворяющего условию

$$|m| \leqslant M < 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{6.54}$$

2. Переходим теперь к построению усиливающего ряда для рядов (6.50), коэффициенты которых определяются формулами (6.49′) и (6.49″).

Считая, что $M < m_1'$, положим

$$L = 1 + 2M + \frac{3}{2}M^2. \tag{6.55}$$

Тогда $|l| < L$ и при $|\sigma| \geqslant 1$

$$\left|\frac{4\sigma^2 - 4(1+m)\sigma + \frac{3}{2}l}{\sigma^2}\right| \leqslant 4 + 4(1+m)\frac{1}{|\sigma|} + \frac{3}{2}L \cdot \frac{1}{\sigma^2} \leqslant$$

$$\leqslant 8 + 4M + \frac{3}{2}L.$$

Теперь из формулы (6.49′) выводим

$$|a_{r,\sigma}| \leqslant \frac{\frac{3}{2}L\,|A_{r,-\sigma}| + \left(8 + 4M + \frac{3}{2}L\right)|A_{r,\sigma}|}{2(6 - 4M + M^2)}. \tag{6.56}$$

Заметим, что хотя формула (6.49′) справедлива только при $|\sigma| \geqslant 1$, но полученное нами неравенство (6.56), дающее оценку коэффициентов $a_{r,\sigma}$, пригодно также и для $\sigma = 0$. Действительно, при $\sigma = 0$ из формулы (6.49″) мы имеем

$$|a_{r,0}| \leqslant \frac{1}{3|l|} |A_{r,0}|. \tag{6.56′}$$

С другой стороны, неравенство (6.56) дает при $\sigma = 0$

$$|a_{r,0}| \leqslant \frac{8 + 4M + 3L}{2(6 - 4M + M^2)} |A_{r,0}|.$$

Но ввиду (6.55) и учитывая неравенство (6.53′), мы имеем

$$\frac{8 + 4M + 3L}{2(6 - 4M + M^2)} - \frac{1}{3|l|} \geqslant \frac{22 + 20M + 9M^2}{4(6 - 4M + M^2)} - \frac{2}{3(2 - 4M + 3M^2)} =$$
$$= \frac{84 - 112M + 4M^2 + 72M^3 + 81M^4}{12(6 - 4M + M^2)(2 - 4M + 3M^2)},$$

а эта дробь, очевидно, остается положительной при всех положительных значениях $M$.

Обозначим теперь через $\alpha_{r,\sigma}$ некоторую верхнюю границу для $|a_{r,\sigma}|$. Так как, как было отмечено выше, величины $A_{r,\pm\sigma}$ суть многочлены относительно величин $a_{j,\tau}$ с положительными коэффициентами, то, заменяя в выражении для $A_{r,\pm\sigma}$ все $a_{j,\tau}$ величинами $\alpha_{j,\tau}$ ($j < r$, $|\tau| \leqslant j$), мы получим также некоторые верхние границы для $|A_{r,\pm\sigma}|$. Обозначим эти верхние границы теми же буквами с тильдой наверху, так что

$$|A_{r,\pm\sigma}| \leqslant \tilde{A}_{r,\pm\sigma}.$$

Тогда, согласно неравенству (6.56), которое справедливо, как показано, для всякого $\sigma$, мы можем принять

$$\alpha_{r,\sigma} = \frac{\frac{3}{2} L\tilde{A}_{r,-\sigma} + \left(8 + 4M + \frac{3}{2} L\right) \tilde{A}_{r,\sigma}}{2(6 - 4M + M^2)}. \tag{6.57}$$

Таким образом, принимая

$$\alpha_{1,1} = |a_{1,1}|, \quad \alpha_{1,-1} = |a_{1,-1}| \tag{6.57′}$$

и определяя все остальные $\alpha_{r,\sigma}$ по формуле (6.57), мы получим высшие пределы модулей всех $a_{r,\sigma}$.

Нетрудно притом видеть, что если принять

$$\tilde{A}_{1,-1} = \frac{3}{2}, \quad \tilde{A}_{1,1} = 0, \tag{6.57″}$$

то формула (6.57) при $r = 1$ приводит к равенствам (6.57′) и, следовательно, ею можно будет пользоваться при всех значениях $r$.

Заметим, что определяемые таким путем величины $\alpha_{r,\sigma}$ все будут возрастающими функциями от $M$, пока $M$ не превосходит некоторого предела. Так, например, это, очевидно, будет иметь место, пока $M < 2$, так как при этом условии выражение $6 - 4M + M^2$ будет убывающей функцией от $M$.

Рассмотрим теперь ряд

$$A(\lambda) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{r} \alpha_{r,\, r-2s} \lambda^r. \tag{6.58}$$

Так как

$$|a_{r,\, r-2s} e^{2(r-2s)i\tau}| \leqslant \alpha_{r,\, r-2s} \quad \text{и} \quad m \leqslant M,$$

то ряд (6.58) является усиливающим для обоих рядов (6.50). Поэтому, если для каких-либо положительных значений $M$ и $\lambda$, которые обозначим через $\bar{M}$ и $\bar{\lambda}$, будет показана сходимость ряда (6.58), то этим самым будет доказана, если $\bar{M} < 2$, абсолютная сходимость рядов (6.50) при всяком вещественном $\tau$ и при $|\lambda| \leqslant \bar{\lambda}$, для всякого положительного $m$, не превосходящего $\bar{M}$.

Но условия сходимости ряда (6.58) найти весьма легко, так как этот ряд можно определить некоторым алгебраическим уравнением *).

Действительно, из (6.57) следует

$$\sum_{s=0}^{s=r} \alpha_{r,\, r-2s} = \frac{8 + 4M + 3L}{2(6 - 4M + M^2)} \sum_{s=0}^{r} \tilde{A}_{r,\, r-2s}, \tag{6.58'}$$

а сумма, находящаяся во второй части равенства, есть результат замены в выражении

$$\frac{3}{2} q_{r-1} + lP_r$$

каждого $p_j$ и каждого $q_j$ выражением

$$\sum_{s=0}^{j} \alpha_{j,\, j-2s},$$

соответствующим тому же $j$. Поэтому

$$\sum_{s=0}^{r} \tilde{A}_{r,\, r-2s} = \frac{3}{2} \sum_{s=0}^{r-1} \alpha_{r-1,\, r-1-2s} + LP_r.$$

---

*) В этом и заключается сущность метода Ляпунова, позволяющего свести доказательство сходимости рядов, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям, к рассмотрению сходимости ряда, удовлетворяющего некоторому алгебраическому уравнению.

Умножая обе части равенства (6.58′) на $\lambda^r$ и суммируя по $r$ от 1 до бесконечности, мы получим, принимая во внимание (6.57″),

$$A(\lambda) \equiv \frac{8+4M+3L}{2(6-4M+M^2)}\left\{\frac{3}{2}[1+A(\lambda)]\cdot\lambda + LR_p\right\}.$$

Но сделанная замена равносильна замене $p$ и $q$ на $A(\lambda)$. Поэтому в силу (6.34) найдем, что имеет место следующее тождество:

$$A(\lambda) \equiv \frac{8+4M+3L}{2(6-4M+M^2)}\left\{\frac{3}{2}[1+A(\lambda)]\lambda + \right.$$
$$\left. + L\left[\frac{1}{(1-A(\lambda))^2} - 1 - 2A(\lambda)\right]\right\}. \quad (6.59)$$

Полагая теперь для краткости

$$\varepsilon = \frac{3(22+20M+9M^2)}{8(6-4M+M^2)}\lambda, \quad h = \frac{22+20M+9M^2}{4(6-4M+M^2)}L, \quad (6.59')$$

рассмотрим следующее алгебраическое уравнение:

$$z = \varepsilon(1+z) + h\frac{(3-2z)z^2}{(1-z)^2}, \quad (6.60)$$

которому в силу тождества (6.59) удовлетворяет ряд (6.58).

Таким образом, $A(\lambda)$ представляет действительно разложение корня этого уравнения, обращающегося в нуль при $\lambda = 0$.

Чтобы еще более упростить задачу, рассмотрим, следуя Ляпунову, вместо кубичного уравнения (6.60) следующее квадратное:

$$z = \varepsilon(1+z) + \frac{9hz^2}{3-4z}. \quad (6.61)$$

Разложение решения уравнения (6.61) по степеням параметра $\varepsilon$*) даст нам другую усиливающую функцию, коэффициенты разложения которой превосходят коэффициенты ряда (6.58). Действительно, коэффициенты разложения функции $\frac{9}{3-4z}$ по степеням $z$ больше, как легко проверить, соответствующих коэффициентов разложения функции $\frac{3-2z}{(1-z)^2}$.

Но корень уравнения (6.61), уничтожающийся вместе с $\varepsilon$, определяется формулой

$$z = \frac{3+\varepsilon-\sqrt{9-6(7+18h)\varepsilon+49\varepsilon^2}}{2(4+9h-4\varepsilon)}. \quad (6.61')$$

---

*) Мы можем, очевидно, вместо параметра $\lambda$ рассматривать новый параметр $\varepsilon$, связанный с $\lambda$ первой из формул (6.59′).

Правая часть последнего равенства может быть разложена в ряд по степеням параметра $\varepsilon$, если

$$\varepsilon \leqslant \frac{3}{7+18h+\sqrt{(7+18h)^2-49}}.$$

Поэтому заведомо, если

$$\varepsilon \leqslant \frac{3}{2(7+18h)},$$

а тем более если

$$\varepsilon \leqslant \frac{1}{6(1+2h)}, \tag{6.62}$$

то разложение правой части (6.61′) будет сходящимся.

Следовательно, при том же условии (6.62) будет заведомо сходиться также ряд (6.58), представляющий разложение усиливающей функции $A(\lambda)$.

Условие (6.62) представляет собой неравенство относительно величин $M$ и $\lambda$. В силу сделанных оценок и вспомогательных предложений, доказанных в разделе 1, которые справедливы для любых комплексных значений $m$ (если только $|m| \leqslant M$), ряды (6.50) будут сходиться абсолютно и равномерно для всех $|m| \leqslant M$, когда $M$ и $L$ удовлетворяют неравенству (6.62).

Обращаемся теперь к выражениям $\varepsilon$ и $h$, которые даются формулами (6.59′), и полагаем $L = M^2$.

Тогда мы получим ряды, удовлетворяющие уравнениям (6.32) при $\lambda = m^2$, т. е. получим то решение задачи, которое нашел сам Хилл. Однако Хилл не дал доказательства сходимости полученных им рядов.

Полагая $L = M^2$, мы сделаем $\varepsilon$ и $h$ функциями одного только $M$, и возникает вопрос о наибольшем значении $M$, при котором ряд (6.58) остается сходящимся (будучи, конечно, сходящимся и для всякого меньшего $M$). Покажем, что $1/7$ еще не достигает этого предела.

Действительно, при $M = \frac{1}{7}$ формулы (6.59′) дают

$$\varepsilon = \frac{1227}{34\,888} = \frac{8589}{244\,216}, \quad h = \frac{52\,761}{34\,888},$$

откуда следует

$$\frac{1}{6(1+2h)} = \frac{8722}{210\,615} > \varepsilon.$$

Таким образом, убеждаемся, что

$$M \leqslant \frac{1}{7}, \tag{6.63}$$

а следовательно, при

$$|m| \leqslant \frac{1}{7} \tag{6.63′}$$

все рассмотренные нами ряды будут сходящимися абсолютно и равномерно.

Для теории движения Луны

$$m = 0{,}08084893\ldots,$$

и поэтому условие (6.63′) выполняется. Следовательно, ряды Хилла применимы в лунной теории. Однако, например, для восьмого спутника Юпитера этот параметр равен

$$m = -0{,}1461537\ldots,$$

что уже превышает по модулю $^1/_7$, а поэтому возможность применения рядов Хилла в этой задаче пока не выяснена.

**3.** Перейдем к определению некоторого верхнего предела погрешности, которую мы неизбежно сделаем, отбрасывая в рядах (6.50) все члены, начиная с некоторого определенного номера.

Заменяя ряды (6.50) суммами некоторого конечного числа первых их членов, мы сделаем ошибку, которая не превзойдет, очевидно, по числовой величине суммы соответствующих членов усиливающего ряда, определяемого уравнением (6.60) и, тем более, уравнением (6.61). Но так как оценки, сделанные нами для доказательства сходимости, довольно грубые, то эти две суммы могут сильно отличаться друг от друга.

Поэтому Ляпунов строит еще один усиливающий ряд, который дает возможность получить более точный высший предел погрешности, о которой идет речь.

Для этой цели возьмем опять формулу (6.57), но будем пользоваться ею, только начиная с некоторого $r = N + 1$. Для $r \leqslant N$ положим

$$\alpha_{r,\sigma} = |a_{r,\sigma}| \quad (r = 1, 2, \ldots, N;\ |\sigma| \leqslant r). \tag{6.64}$$

Тогда для $r > N$ будет справедлива формула (6.58′). Рассмотрим теперь ряд (6.58) в этом новом предположении и положим во избежание путаницы

$$A^*(\lambda) = \\ = \sum_{r=1}^{N} \left\{ \sum_{s=0}^{r} |a_{r,r-2s}| \right\} \lambda^r + \frac{8 + 4M + 3L}{2(6 - 4M + M^2)} \sum_{r=N+1}^{\infty} \left\{ \sum_{s=0}^{r} \tilde{A}_{r,r-2s} \right\} \lambda^r. \tag{6.65}$$

Второе слагаемое в правой части равенства (6.65) представляет, как и раньше, в силу (6.59) разложение функции

$$\frac{8 + 4M + 3L}{2(6 - 4M + M^2)} \left\{ \frac{3}{2}(1 + A^*)\lambda + L\left[\frac{1}{(1 - A^*)^2} - 1 - 2A^*\right] \right\} = \\ = \varepsilon(1 + A^*) + h\frac{(3 - 2A^*)A^{*2}}{(1 - A^*)^2}$$

по степеням $\lambda$, но только ту часть этого разложения, которая начинается с члена, содержащего $\lambda^{N+1}$.

Пусть разложение этой функции вообще имеет вид

$$\varepsilon + L_2\lambda^2 + L_3\lambda^3 + \ldots + L_N\lambda^N + \ldots$$

Первые $N$ этого разложения получим, подставляя вместо $A^*$ величину

$$\sum_{r=1}^{N}\left\{\sum_{s=0}^{r}|a_{r,\,r-2s}|\right\}\lambda^r,$$

а поэтому, полагая

$$\varepsilon' = \sum_{r=1}^{N}\left\{\sum_{s=0}^{r}|a_{r,\,r-2s}|\right\}\lambda^r - \sum_{r=2}^{N}L_r\lambda^r, \tag{6.65'}$$

мы найдем, что (6.65) представляет разложение по степеням $\lambda$ корня уравнения третьей степени

$$z = \varepsilon' + \varepsilon z + h\frac{(3-2z)\,z^2}{(1-z)^2}.$$

Вводя обозначения

$$\delta = \frac{\varepsilon'}{1-\varepsilon}, \quad g = \frac{h}{1-\varepsilon}, \tag{6.66}$$

мы напишем окончательно это уравнение в виде

$$z = \delta + g\frac{(3-2z)\,z^2}{(1-z)^2}. \tag{6.67}$$

А. М. Ляпунов использует ряд, определяемый уравнением (6.67) для оценки погрешности в рядах Хилла.

Но этот же ряд можно использовать, как отмечает в цитированной уже работе Г. А. Мерман, для нахождения новой нижней границы для радиуса сходимости рядов (6.50).

Изложим результаты, полученные Г. А. Мерманом. Итак, будем искать точный радиус сходимости ряда $z(\delta)$, расположенного по целым положительным степеням $\delta$ и удовлетворяющего уравнению (6.67).

Разложим функцию $\frac{(3-2z)\,z^2}{(1-z)^2}$ в ряд по степеням $z$, что возможно при условии $|z| < 1$, которое мы и будем предполагать выполненным. Тогда уравнение (6.67) можно переписать в виде

$$\delta = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \ldots, \tag{6.67'}$$

где справа стоит ряд, абсолютно сходящийся при $|z| < 1$.

Обращая этот ряд, мы получим следующее разложение:

$$z = \delta + b_2\delta^2 + b_3\delta^3 + \ldots, \tag{6.68}$$

область сходимости которого мы должны теперь найти.

Разлагая функцию $\delta(z)$ в ряд Тэйлора в окрестности некоторой точки $z=c$, лежащей внутри круга $|z|=1$, мы имеем

$$\delta=\gamma+\delta'(c)(z-c)+\frac{1}{2}\delta''(c)\cdot(z-c)^2+\ \ldots,$$

где $\gamma=\delta(c)$. Обращая этот степенной ряд, имеем

$$z=c+\frac{1}{\delta'(c)}(\delta-\gamma)+\ \ldots$$

Этот процесс обращения ряда, очевидно, возможен только в том случае, когда $\delta'(c)\neq 0$. Ближайшее к нулю значение $c$, обращающее в нуль $\delta'(c)$, будет ближайшей к нулю особой точкой (разветвления) обращенного ряда. Поэтому радиус сходимости разложения $\delta(z)$ в окрестности нуля будет равен $|c|$*).

Таким образом, для нахождения $c$ и $\gamma$ имеем, кроме (6.67), еще уравнение $\delta'(z)=0$, где $\delta(z)$ есть функция, определяемая уравнением (6.67).

Дифференцируя (6.67) по $z$ и полагая $\delta'(z)=0$, $z=c$, мы получим

$$1=\frac{2}{1-c}\left[3gc+g\,\frac{(3-2c)\,c^2}{(1-c)^2}\right].$$

На основании уравнения (6.67) второй член в квадратных скобках можем заменить на $c-\gamma$. Таким образом, для определения $c$ и $\gamma$ получим следующие уравнения:

$$c=\frac{1+2\gamma}{3(1+2g)},\quad 2gc=\frac{(1-c)^3}{3-3c+c^2},\tag{6.69}$$

которые дадут особую точку $\delta=\gamma$ ряда (6.68) при условии $|c|<1$. Решая второе уравнение системы (6.69), найдем

$$c=1-\sqrt[3]{\frac{2g}{1+2g}}\,.\tag{6.70}$$

Так как в дальнейшем, согласно предыдущей теории, мы должны положить $\lambda=M^2$ то, согласно (6.59′) и (6.66), $\varepsilon$ и $h$, а следовательно $g$, суть вещественные и положительные (при $\varepsilon<1$) числа.

Если под $\sqrt[3]{\frac{2g}{1+2g}}$ будем понимать лишь вещественное значение радикала, то все три корня уравнения (6.69) даст формула

$$c_k=1-\sqrt[3]{\frac{2g}{1+2g}}\left(\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}\right)\qquad(k=0,\ 1,\ 2),$$

*) Если бы оказалось (как замечает Мерман), что $|c|\geqslant 1$, то это означало бы, что внутри круга $|z|<1$ функция $\delta'(z)$ не обращается в нуль. Радиус сходимости обращенного ряда был бы равен бесконечности или модулю того значения $\delta$, которое соответствует $z=1$.

и мы имеем

$$|c_0| = 1 - \sqrt[3]{\frac{2g}{1+2g}},$$

$$|c_1| = |c_2| = \sqrt{1 + \sqrt[3]{\frac{2g}{1+2g}} + \sqrt[3]{\left(\frac{2g}{1+2g}\right)^2}},$$

откуда видно, что два комплексных корня лежат вне круга $|z| = 1$. Единственный вещественный корень (6.70), напротив, лежит внутри этого круга. Мы можем, следовательно, ограничиться разысканием единственного вещественного решения системы (6.69).

Практически нам нужно подобрать такое $M > 0$, чтобы при $\varepsilon < 1$ удовлетворялась система (6.69). Тогда ряды (6.50) будут сходиться абсолютно и равномерно при $|m| \leqslant M$ и при всех вещественных значениях $\tau$.

4. Мерман производит выкладки и вычисления, ограничиваясь случаем $N = 2$, замечая, что при больших значениях $N$ нельзя получить существенное расширение круга сходимости.

Прежде чем вычислить $M$, указанное в предыдущем разделе, подготовим необходимые формулы для этого случая.

Из формул предыдущего параграфа мы имеем при $m = M$

$$|a_{1,1}| + |a_{1,-1}| = \frac{3}{8}\,\frac{22 + 20M + 9M^2}{6 - 4M + M^2}.$$

Поэтому, согласно (6.59′),

$$\varepsilon = [|a_{1,1}| + |a_{1,-1}|]\,\lambda \qquad (\text{при } m = M).$$

А тогда формула (6.65) дает

$$\varepsilon' = \varepsilon + \ldots,$$

где не выписаны члены, содержащие $\lambda$ в степенях выше первой. С той же точностью на основании (6.66) и (6.67) получаем

$$\delta = \varepsilon' + \ldots = \varepsilon + \ldots,$$

$$z = \delta + \ldots = \varepsilon + \ldots$$

Кроме того,

$$g = h + \ldots, \quad \frac{3 - 2z}{(1-z)^2} = 3 + \ldots,$$

где отброшены члены, зависящие от $\lambda$.

Если отбросить только члены, начинающиеся с третьих степеней $\lambda$, то

$$\varepsilon z + h\frac{(3-2z)\,z^2}{(1-z)^2} = (1 + 3h)\,\varepsilon^2 + \ldots$$

Таким образом,

$$L_2\lambda^2 = (1 + 3h)\,\varepsilon^2.$$

Согласно (6.65′) мы имеем при $N=2$

$$\varepsilon' = \varepsilon + \varepsilon_1 - L_2\lambda^2 = \varepsilon + \varepsilon_1 - (1+3h)\,\varepsilon^2,$$

где

$$\varepsilon_1 = [\,|a_{2,-2}| + |a_{2,0}| + |a_{2,2}|\,]\,\lambda^2.$$

Остается выписать выражения для коэффициентов $a_{2,\pm 2}$ и $a_{2,0}$.

По формулам (6.49′) и (6.49″) имеем

$$a_{2,2} = \frac{\frac{3}{2}LA_{2,-2} - \left[16 - 8(1+M) + \frac{3}{2}L\right]A_{2,2}}{8(30-4M+M^2)},$$

$$a_{2,0} = -\frac{1}{3L}A_{2,0},$$

$$a_{2,-2} = \frac{\frac{3}{2}LA_{2,2} - \left[16 + 8(1+M) + \frac{3}{2}L\right]A_{2,-2}}{8(30-4M+M^2)}.$$

Выразим теперь $A_{2,\pm 2}$, $A_{2,0}$ через $a_{1,\pm 1}$.

Прежде всего мы имеем

$$(1-p)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}p + \frac{3}{8}p^2 + \ldots,$$

$$(1-q)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2}q + \frac{15}{8}q^2 + \ldots,$$

$$(1-p)^{-\frac{1}{2}}(1-q)^{-\frac{3}{2}} - 1 - \frac{1}{2}p - \frac{3}{2}q =$$

$$= R_p = \frac{3}{8}(p^2 + 2pq + 5q^2) + \ldots$$

Считая $p = p_1\lambda + \ldots$, $q = q_1\lambda + \ldots$, найдем

$$R_p = P_2\lambda^2 + \ldots,\quad P_2 = \frac{3}{8}(p_1^2 + 2p_1q_1 + 5q_1^2).$$

Далее получаем

$$p_1 = a_{1,1}e^{2i\tau} + a_{1,-1}e^{-2i\tau},\quad q_1 = a_{1,1}e^{-2i\tau} + a_{1,-1}e^{2i\tau},$$

$$p_1^2 = a_{1,1}^2e^{4i\tau} + 2a_{1,1}a_{1,-1} + a_{1,-1}^2e^{-4i\tau},$$

$$p_1q_1 = a_{1,1}^2 + a_{1,-1}^2 + a_{1,1}a_{1,-1}[e^{4i\tau} + e^{-4i\tau}],$$

$$q_1^2 = a_{1,1}^2e^{-4i\tau} + 2a_{1,1}a_{1,-1} + a_{1,-1}^2e^{4i\tau},$$

$$a_1e^{-2i\tau} = a_{1,1}e^{-4i\tau} + a_{1,-1}.$$

Составляя теперь выражение $\frac{3}{2} q_1 e^{-2i\tau} + LP_2$, найдем, что оно имеет вид

$$\frac{3}{2} q_1 e^{-2i\tau} + LP_2 = A_{2,2} e^{4i\tau} + A_{2,0} + A_{2,-2} e^{-4i\tau},$$

где

$$A_{2,2} = \frac{3}{8} L \left(a_{1,1}^2 + 2a_{1,1}a_{1,-1} + 5a_{1,-1}^2\right),$$

$$A_{2,0} = \frac{3}{2} a_{1,-1} + \frac{3}{4} L \left(6a_{1,1}a_{1,-1} + a_{1,1}^2 + a_{1,-1}^2\right),$$

$$A_{2,-2} = \frac{3}{2} a_{1,1} + \frac{3}{8} L \left(a_{1,-1}^2 + 2a_{1,1}a_{1,-1} + 5a_{1,1}^2\right).$$

С полученными данными Мерман производит вычисления, имеющие целью обнаружить точное значение для $M$.

Полагая $M = 0{,}18$, он находит, что $c$, вычисленное по формуле

$$c = \frac{1 + 2\delta}{3(1 + 2g)},$$

удовлетворяет неравенству

$$2gc < \frac{(1-c)^3}{3 - 3c + c^2},$$

а при $M = 0{,}181$

$$2gc > \frac{(1-c)^3}{3 - 3c + c^2}.$$

Отсюда заключаем, что точное значение $M$, удовлетворяющее уравнениям (6.69), лежит между 0,18 и 0,181.

Поэтому ряды Ляпунова (6.50) заведомо остаются сходящимися абсолютно и равномерно при $|m| \leqslant 0{,}18$, а стало быть, например, они пригодны для построения теории движения восьмого спутника Юпитера.

Примечание 1. Полученный предел значения $m$, который обеспечивает сходимость рядов Ляпунова, представляющих решение задачи Хилла, не является, разумеется, окончательным, так как его получение основано на применении усиливающих рядов, являющихся все же довольно грубым инструментом для вывода точных оценок.

И действительно, после работы Мермана появились еще две интересные работы, одна из которых принадлежит М. С. Петровской, а другая — Ю. А. Рябову.

В работе М. С. Петровской показано при помощи построения другого усиливающего ряда, что ряды Ляпунова продолжают оставаться сходящимися, пока абсолютное значение $m$ не превышает предела 0,21.

В работе Ю. А. Рябова использован метод, заключающийся в составлении мажорирующих функциональных уравнений и получена оценка $0 < m < 0{,}258$, которая может быть и еще более улучшена. Все три упомянутые в этом параграфе работы (Г. А. Мермана, М. С. Петровской и Ю. А. Рябова) напечатаны в Бюллетене Института теоретической астрономии в 1952, 1959 и 1962 гг. соответственно.

Примечание 2. Все рассмотренные в этой главе результаты, касающиеся доказательства сходимости рядов Ляпунова, относятся к рядам, расположенным по степеням параметра $m$, коэффициентами которых являются тригонометрические многочлены относительно синусов и косинусов целых кратностей $\tau$.

Если же представлять решение задачи Хилла тригонометрическими рядами типа (6.24), коэффициенты которых являются целыми функциями параметра $m$, то такие ряды могут оказаться сходящимися (но не абсолютно!) и для больших значений $m$.

Аналогичное явление известно нам из теории невозмущенного кеплеровского движения, где разложения координат эллиптического движения по степеням эксцентриситета $e$ сходятся абсолютно лишь при $e < 0{,}6627\ldots$, в то время как ряды Фурье, представляющие те же координаты, сходятся (но не абсолютно!) для всех значений $e$ в промежутке $0 \leqslant e < 1$.