

Г л а в а VII

ЗАДАЧА ФАТУ

Мы закончим рассмотрение ограниченных задач небесной механики изложением некоторых результатов, относящихся к так называемой задаче Фату.

Эта задача представляет собой частный случай общей задачи двух тел конечных размеров, когда одно из этих двух тел есть шар, обладающий сферическим распределением плотностей. Тогда, как известно, такой шар притягивается и притягивает как материальная точка. Если притом масса шара ничтожно мала по сравнению с массой другого тела, то можно считать, что материальная точка не влияет на движение тела. Следовательно, задача приводится к изучению движения материальной точки, притягиваемой каким-либо материальным телом. Рассматривая только относительное движение точки, мы можем считать материальное тело неподвижным.

Разумеется, эта задача хорошо известна со времен Ньютона как задача теоретической механики, но Фату провел систематическое изучение движения точки в этой задаче и выявил некоторые важные особенности этого движения, вследствие чего задача и получила имя этого ученого.

Здесь предполагается, что сила притяжения определяется законом Ньютона. Если частицы двух однородных шаров взаимодействуют по какому-либо другому степенному закону, то закон взаимодействия между двумя такими шарами уже не будет ньютоновским, а есть некоторая довольно сложная функция расстояния между их центрами.

§ 1. Постановка задачи. Общие свойства движения

1. Рассмотрим гравитационное поле, вызываемое наличием некоторой неподвижной притягивающей массы, которую будем именовать для сокращения речи телом M .

Выберем каким-либо образом систему декартовых координат ($Oxyz$), неизменно связанную с телом M , и пусть $U(x, y, z)$ есть силовая функция притяжения этого тела.

Тогда дифференциальные уравнения движения материальной точки $P(x, y, z)$, находящейся под действием притяжения тела M , имеют следующий вид:

$$\ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (7.1)$$

и задача Фату приводится к интегрированию, или исследованию, этой системы дифференциальных уравнений.

Известно, что система (7.1) может быть проинтегрирована только в некоторых простейших частных случаях. Таков, например, случай центрального гравитационного поля, когда функция сил U зависит только от расстояния r точки P до начала координат (центр силового поля) и когда уравнения движения интегрируются в квадратурах.

Другой интегрируемый случай представляет классическая задача двух неподвижных центров, а также обобщенная задача двух неподвижных центров. Можно было бы отметить еще некоторые простые случаи интегрируемости, представляющие собой комбинации двух отмеченных.

Отметим, что тело M , вызывающее гравитационное поле в рассматриваемой задаче, может иметь весьма различный вид. Это может быть одно тело в собственном смысле этого слова, например, какая-либо планета Солнечной системы, и тогда задача Фату представляет собой задачу о движении малого спутника в поле притяжения планеты. Сюда же относится, разумеется, и задача о движении искусственного спутника в гравитационном поле Земли (или Луны).

Тело M может быть также «составным», образуемым, например, двумя неподвижными притягивающими центрами или даже многими неподвижными центрами, расположенными симметрично относительно оси Oz и плоскости (xOy) , и действующими на пассивную точку с силами, зависящими только от расстояний этой точки до неподвижных центров.

Составным телом является также система, образуемая Сатурном и его кольцом, так что в этом случае задачей Фату является задача о движении близкого спутника Сатурна.

Тело M может также состоять из неподвижного точечного центра, окруженного системой гауссовых колец, что приводит нас к задаче об определении вековых возмущений в движении астероида по методу Гаусса.

Наконец, тело M может представлять собой пылевую или газовую туманность с центральным ядром (или без центрального ядра).

Во всяком случае, силовая функция притяжения тела есть или силовая функция притяжения материального тела на внешнюю точку, или силовая функция притяжения массы на точку,

являющуюся частью этой массы, или представляет собой комбинацию и того и другого.

Поэтому функция $U(x, y, z)$, входящая в уравнения движения (7.1), удовлетворяет либо уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0, \quad (7.2)$$

либо уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -4\pi f\delta(x, y, z), \quad (7.2')$$

где $\delta(x, y, z)$ — заданная функция координат, или U есть сумма двух слагаемых, одно из которых удовлетворяет уравнению Лапласа, а другое — уравнению Пуассона.

Аналитическое выражение для функции U , вообще говоря, может быть получено только в виде бесконечного ряда того или иного вида, так как представление этой функции в конечном виде (а особенно в элементарных функциях) почти всегда невозможно.

В теории притяжения указываются разложения силовой функции неподвижной массы (имеющей три, два или одно измерение) в ряды функций Лапласа или гармонических многочленов. Такие разложения имеют различную форму в зависимости от того, больше или меньше радиус-вектор r точки P наибольшего из расстояний точек тела M до начала координат.

В первом случае мы имеем разложение вида

$$U(x, y, z) = f \sum_{k=0}^{\infty} \frac{U_k(x, y, z)}{r^{2k+1}}, \quad (7.3)$$

а во втором случае

$$U(x, y, z) = f \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{U}_k(x, y, z) \quad (7.3')$$

где U_k и \tilde{U}_k — некоторые однородные многочлены степени k , зависящие от формы и структуры притягивающего тела M .

Какова бы ни была силовая функция U , уравнения (7.1) всегда имеют один первый интеграл, являющийся интегралом энергии (или живой силы).

Этот интеграл, легко выводящийся из уравнений (7.1), имеет вид

$$V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2(U + h), \quad (7.4)$$

где h — обычная постоянная энергии.

Из рассмотрения интеграла (7.4) можно вывести некоторые простые заключения об областях возможности или невозможности движения.

В самом деле, какова бы ни была рассматриваемая задача (т. е. каково бы ни было гравитационное поле), во всяком действительном движении мы должны иметь $V^2 \geqslant 0$, вследствие чего координаты точки P во всякий момент времени должны удовлетворять неравенству

$$U(x, y, z) + h \geqslant 0. \quad (7.4')$$

Допустим, что начальное положение точки P находится в той области внешнего относительно тела M пространства, которая содержит в себе бесконечно удаленные точки. Тогда силовая функция U обращается в нуль в бесконечности и может быть представлена разложением (7.3)*).

Если теперь начальная скорость точки P такова, что постоянная живой силы оказывается неотрицательной, то условие (7.4') будет выполнено при любом положении точки P в указанной области пространства. Эта часть пространства и будет областью возможности движения.

Если же начальные условия таковы, что $h < 0$, то точка P заведомо не может удалиться в бесконечность и областью возможности движения будет та часть внешнего (по отношению к телу M) пространства, которая ограничена поверхностью

$$U(x, y, z) + h = 0, \quad (7.4'')$$

являющейся поверхностью нулевой скорости.

Если начальное положение точки P находится в части пространства, не содержащей бесконечно удаленных точек (например, внутри тела или в его внутренней пустой полости), то результаты получатся другими.

Легко сообразить, что при $h \geqslant 0$ точка P может двигаться всюду в той области, в которой она находилась в начальный момент, и может, следовательно, достигать границы этой области. Если же $h < 0$, то результат будет зависеть от вида (и размеров) поверхности нулевой скорости (7.4''), так что область возможности движения будет в этом случае представлять общую часть области, в которой в начальный момент находится точка P , и области, ограниченной поверхностью (7.4'').

2. Рассмотрим теперь более частный, но более важный для приложений случай, когда гравитационное поле обладает симметрией относительно некоторой оси, которую всегда можно отождествить с осью Oz .

В этом случае силовая функция U будет зависеть только от двух переменных — радиуса-вектора r и аппликаты z или, если угодно, от расстояния ρ точки P до оси Oz (оси симметрии

*). Таков, например, случай, когда тело M есть сплошное материальное тело и точка P находится во внешнем относительно этого тела пространстве.

поля) и от аппликаты z . Поэтому мы можем положить

$$U(x, y, z) = F(r, z) = \Phi(\rho, z), \quad (7.5)$$

а разложения (7.3) и (7.3') напишутся соответственно следующим образом:

$$F(r, z) = f \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{r^{k+1}} P_k\left(\frac{z}{r}\right) \quad (7.6)$$

и

$$F(r, z) = f \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{A}_k r^k P_k\left(\frac{z}{r}\right), \quad (7.6')$$

где P_k — многочлен Лежандра k -го порядка, а A_k и \tilde{A}_k — характеристические для тела M постоянные, зависящие от формы и структуры этого тела.

Заменяя многочлены Лежандра их выражениями, мы напишем еще формулы (7.6) и (7.6') в следующем виде:

$$F(r, z) = f \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k(r, z)}{r^{2k+1}} \quad (7.7)$$

и

$$F(r, z) = f \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{F}_k(r, z), \quad (7.7')$$

где F_k и \tilde{F}_k — однородные многочлены k -й степени.

Полезно еще заметить, что если гравитационное поле обладает вдобавок симметрией относительно плоскости $z = 0$, то функции $F(r, z)$ и $\Phi(\rho, z)$ будут четными функциями от координаты z , т. е.

$$F(r, -z) = F(r, z), \quad \Phi(\rho, -z) = \Phi(\rho, z).$$

В этом случае разложения (7.6) и (7.6') будут содержать многочлены Лежандра только четного порядка, или, иными словами, все постоянные A_k и \tilde{A}_k с нечетными значками будут равны нулю.

Так как $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, то в случае силового поля (7.5) уравнения движения точки примут вид

$$\ddot{x} = \frac{x}{r} \frac{\partial F}{\partial r}, \quad \ddot{y} = \frac{y}{r} \frac{\partial F}{\partial r}, \quad \ddot{z} = \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{z}{r} \frac{\partial F}{\partial r}, \quad (7.8)$$

откуда найдем сейчас же еще один интеграл

$$x\dot{y} - y\dot{x} = c, \quad (7.9)$$

который есть не что иное, как интеграл площадей в плоскости (xOy) .

Такого рода случаи уже отмечались в главе IV, когда, например, все неподвижные центры лежат на оси (Oz) и действуют на пассивную точку с силами, являющимися любыми функциями от расстояний.

Таким образом, в случае осесимметричного поля уравнения движения имеют два интеграла: интеграл энергии (7.4) и интеграл площадей (7.9).

Если вместо прямоугольных координат воспользоваться цилиндрическими, полагая

$$x = \rho \cos v, \quad y = \rho \sin v, \quad (7.10)$$

то уравнения движения в задаче Фату можно написать в виде

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\rho} - \rho \dot{v}^2 &= \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}, \\ \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{v}) &= \frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0, \\ \ddot{z} &= \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

Эти уравнения имеют два очевидных интеграла — живой силы и площадей

$$\left. \begin{aligned} V^2 &= \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{v}^2 + \dot{z}^2 = 2(\Phi + h), \\ \rho^2 \dot{v} &= c, \end{aligned} \right\} \quad (7.11')$$

с помощью которых порядок системы (7.11) можно понизить на две единицы. Однако мы воспользуемся для этой цели только интегралом площадей, который позволяет исключить из уравнений движения угловую переменную v . Производя исключение и полагая для краткости

$$W(\rho, z) = \Phi(\rho, z) - \frac{c^2}{2\rho^2}, \quad (7.12)$$

мы получим систему с двумя неизвестными ρ и z :

$$\ddot{\rho} = \frac{\partial W}{\partial \rho}, \quad \ddot{z} = \frac{\partial W}{\partial z}, \quad (7.13)$$

с интегралом

$$\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2 = 2(W + h), \quad (7.13')$$

после интегрирования которой найден угол v простой квадратурой

$$v = v_0 + c \int_{t_0}^t \frac{dt}{\rho^2}, \quad (7.13'')$$

где v_0 — произвольная постоянная, равная начальному значению полярного угла.

Движение точки P в заданном силовом поле определяется начальными условиями

$$x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0 \quad (7.14)$$

или

$$\rho_0, v_0, z_0, \dot{\rho}_0, \dot{v}_0, \dot{z}_0, \quad (7.14')$$

которые могут быть заданы произвольно.

Если, в частности, вектор начальной скорости лежит в плоскости (xOy) , т. е. если $z_0 = \dot{z}_0 = 0$, то ввиду симметрии поля относительно плоскости (xOy) точка P всегда останется в этой плоскости и ее орбита есть плоская кривая. Действительно, так как функция W есть четная функция от z , то мы имеем

$$\frac{\partial W}{\partial z} = 2z \frac{\partial W}{\partial (z^2)}, \quad (7.15)$$

а поэтому уравнения (7.13) удовлетворяются при $z = 0$ и задача приводится к интегрированию единственного уравнения второго порядка.

Пусть теперь начальные условия таковы, что мы имеем

$$\frac{\dot{x}_0}{x_0} = \frac{\dot{y}_0}{y_0}. \quad (7.16)$$

Тогда $c = 0$ и, следовательно, $v = v_0 = \text{const}$. Поэтому в этом случае движение точки происходит в плоскости, проходящей через ось Oz , т. е. через ось симметрии силового поля. Орбита точки P также есть плоская кривая, но ее нахождение требует интегрирования системы четвертого порядка (7.13).

Эти уравнения ничем не отличаются от уравнений движения при $c \neq 0$, но в последнем случае кривая, определяемая уравнениями (7.13), представляет собой проекцию пространственной траектории точки P на какую-либо меридиональную плоскость, т. е. на плоскость, проходящую через ось симметрии гравитационного поля.

Если, наконец, одновременно выполняются условия

$$z_0 = \dot{z}_0 = 0, \quad \frac{\dot{x}_0}{x_0} = \frac{\dot{y}_0}{y_0},$$

то движение происходит одновременно и в плоскости (xOy) (плоскость экватора), и в плоскости, проходящей через ось Oz , а стало быть, траектория движения есть прямая, проходящая через начало координат и лежащая в плоскости (xOy) .

3. Рассмотрим теперь общий случай, когда орбита точки P есть пространственная кривая, и отметим один замечательный результат, касающийся движения линии узлов плоскости мгновенной орбиты.

В самом деле, рассмотрим плоскость, проходящую через начало координат, точку $P(x, y, z)$ и прямую с угловыми коэффициентами $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$.

Уравнение этой плоскости (плоскости мгновенной орбиты) напишется в виде

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = 0.$$

Линия пересечения этой плоскости с плоскостью (xOy) , или линия узлов мгновенной орбиты, определится уравнением

$$(y\dot{z} - z\dot{y})X - (x\dot{z} - z\dot{x})Y = 0.$$

Обозначая через Ω угол, образуемый этой прямой с положительным направлением оси Ox , мы имеем

$$\operatorname{tg} \Omega = \frac{y\dot{z} - z\dot{y}}{x\dot{z} - z\dot{x}},$$

откуда находим

$$\dot{\Omega} = \frac{(y\ddot{z} - z\ddot{y})(x\dot{z} - z\dot{x}) - (x\ddot{z} - z\ddot{x})(y\dot{z} - z\dot{y})}{(x\dot{z} - z\dot{x})^2 + (y\dot{z} - z\dot{y})^2}. \quad (7.17)$$

Подставляя сюда выражения для вторых производных из уравнений (7.8), используя интеграл площадей (7.9) и имея в виду, что F — четная функция z , мы получим

$$\dot{\Omega} = \frac{2cz^2 \frac{\partial F}{\partial(z^2)}}{(x\dot{z} - z\dot{x})^2 + (y\dot{z} - z\dot{y})^2}. \quad (7.17')$$

Формула (7.17') показывает, что знак величины $c \cdot \dot{\Omega}$ таков же, как и знак величины $\partial F / \partial(z^2)$. Поэтому, если $\frac{\partial F}{\partial(z^2)} < 0$, то скорость изменения долготы узла противоположна по знаку постоянной c , т. е. скорости изменения угла v . Иными словами, в этом случае линия узлов перемещается в направлении, противоположном направлению движения точки P . Наоборот, если мы имеем $\frac{\partial F}{\partial(z^2)} > 0$, то направление вращения линии узлов совпадает с направлением движения.

Пусть, например, гравитационное поле вызывается телом, разложение силовой функции которого дается формулой (7.6), в которой все коэффициенты с нечетными знаками суть нули.

Тогда имеем

$$F = f \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_{2k}}{r^{2k+1}} P_{2k}(\alpha), \quad \alpha = \frac{z}{r}, \quad (7.18)$$

откуда находим

$$\frac{\partial F}{\partial (z^2)} = \frac{f}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{2k}}{r^{2k+3}} \cdot \frac{P'_{2k}(a)}{a} = \frac{f}{2} \left\{ \frac{3A_2}{r^5} + \dots \right\}. \quad (7.18')$$

Если теперь $A_2 < 0$, как это имеет место для гравитационного поля Земли (а также для любого однородного сжатого эллипсоида вращения), то $\frac{\partial F}{\partial (z^2)} < 0$ и линия узлов вращается в направлении, противоположном движению.

Но можно указать такие гравитационные поля, для которых $\frac{\partial F}{\partial (z^2)} > 0$. Таков, например, случай однородного, вытянутого эллипса вращения, где все коэффициенты A_{2k} положительны.

Заметим, что приведенное выше условие имеет простой механический смысл, на который невозможно не обратить внимания. Действительно, вообразим материальное тело или систему таких тел, которые обладают симметрией относительно некоторой оси и некоторой плоскости, перпендикулярной к этой оси. Если притягивающие массы в основном сосредоточены вблизи указанной плоскости, то составляющая равнодействующей всех сил притяжения на материальную точку, лежащую вне плоскости симметрии, параллельная оси вращения, обязательно будет направлена к началу координат, а поэтому величина

$$\frac{\partial F}{\partial (z^2)} = \frac{1}{2z} \frac{\partial F}{\partial z}$$

будет отрицательна, независимо от того, лежит ли точка P в области положительных или отрицательных аппликат.

Наоборот, если притягивающие массы сосредоточены в основном вне плоскости симметрии, то составляющая силы притяжения, параллельная оси симметрии, будет направлена от начала координат и $\frac{\partial F}{\partial (z^2)}$ будет положительной.

Простейшим примером такого случая может служить поле, вызванное двумя равными массами, лежащими на оси Oz на одинаковых расстояниях c от начала координат.

В этом случае

$$U = F(r, z) = fm \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right),$$

где

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - c)^2}, \quad r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + c)^2},$$

и мы находим

$$\frac{\partial F}{\partial (z^2)} = \frac{fm c}{2z} \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right).$$

Но при $z > 0$ имеем $r_1 < r_2$, а при $z < 0$, наоборот, $r_1 > r_2$. Поэтому во всех случаях рассматриваемая производная есть величина положительная.

4. Мы уже отметили, что в случае, когда силовое поле обладает плоскостью симметрии, перпендикулярной к оси симметрии, уравнения движения допускают решения, в которых $z = \dot{z} = 0$. Рассмотрим частный случай таких плоских решений, в котором орбита точки P есть окружность с центром в начале координат.

В самом деле, уравнения (7.13) имеют частное решение

$$\rho = a, \quad z = 0, \quad (7.19)$$

где постоянная a есть корень уравнения

$$W'_\rho(\rho, 0) = 0, \quad (7.20)$$

которое ввиду формулы (7.12) может быть написано также в следующей форме:

$$\frac{c^2}{\rho^3} + \Phi'_\rho(\rho, 0) = 0. \quad (7.20')$$

Это уравнение имеет действительные решения только в том случае, когда производная $\Phi'_\rho(\rho, 0)$ имеет отрицательное значение, по крайней мере для некоторых значений ρ .

Так как

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = \frac{\rho}{r} \frac{\partial F}{\partial r},$$

то условие существования действительных решений уравнения (7.20) выполняется, когда сила притяжения в плоскости симметрии поля направлена к началу координат.

Может случиться, что производная $\Phi'_\rho(\rho, 0)$ будет сохранять отрицательный знак для всех значений ρ в некотором промежутке $0 < a_1 \leq \rho \leq a_2$. Тогда каждому значению a в этом промежутке соответствует некоторое c^2 , определяемое из уравнения (7.20').

Всякому действительному частному решению (7.19) соответствует круговое движение с постоянной угловой скоростью.

Действительно, формула (7.13'') дает при $\rho = a$

$$v = v_0 + n_0(t - t_0), \quad (7.21)$$

где

$$n_0 = \frac{c}{a^2} \quad (7.21')$$

есть постоянная угловая скорость рассматриваемого движения.

Это круговое движение, очевидно, есть движение периодическое с периодом

$$T_0 = \frac{2\pi}{|n_0|} = \frac{2\pi a^2}{|c|}. \quad (7.21'')$$

Заметим еще, что рассматриваемому круговому движению соответствуют следующие начальные значения цилиндрических координат и их первых производных:

$$\rho_0 = a, \dot{\rho}_0 = 0, z_0 = \dot{z}_0 = 0, \dot{v}_0 = n_0. \quad (7.22)$$

Рассмотрим теперь движения, для которых начальные значения $\rho_0, \dot{\rho}_0, z_0, \dot{z}_0$ мало отличаются от значений этих же величин в каком-либо круговом движении.

Пусть начальные условия такого нового решения системы (7.13) будут

$$\rho_0 = a + x_0, \dot{\rho}_0 = \dot{x}_0, z_0 = \dot{z}_0, \quad (7.23)$$

где $x_0, \dot{x}_0, z_0, \dot{z}_0$ — малые по абсолютной величине числа.

Иными словами, будем рассматривать постоянное решение системы (7.13) как невозмущенное, а решение той же системы с начальными данными (7.23) — как возмущенное.

Положим теперь для всякого значения t^*)

$$\rho = a + x. \quad (7.24)$$

Тогда возмущенное решение, близкое в начальный момент t_0 к невозмущенному, определится следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\ddot{x} = X(x, z), \quad \ddot{z} = Z(x, z), \quad (7.25)$$

где

$$X(x, z) = W'_x(a + x, z), \quad Z(x, z) = W'_z(a + x, z), \quad (7.26)$$

причем

$$X(0, 0) = Z(0, 0) = 0, \quad (7.26')$$

так что система значений

$$x = 0, \quad z = 0 \quad (7.27)$$

является нулевым решением уравнений (7.25), соответствующим невозмущенному решению $\rho = a, z = 0$ системы (7.13).

Предположим теперь (и это будет достаточно общий случай), что функция $W(a + x, z)$ голоморфна в некоторой области начала координат (т. е. системы значений $x = z = 0$). Тогда мы можем написать

$$\begin{aligned} W(a + x, z) &= \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot W''_{xx}(a, 0) + xz \cdot W''_{xz}(a, 0) + \frac{z^2}{2} \cdot W''_{zz}(a, 0) + \dots, \end{aligned} \quad (7.28)$$

*) Величину x , введенную здесь, не следует смешивать с координатой x точки P в системе осей $(Oxyz)$.

где невыписанные члены выше второго порядка и ряд сходится абсолютно в некоторой окрестности начала координат.

Но в силу (7.12) мы имеем

$$W(a+x, z) = -\frac{c^2}{2(a+x)^2} + \Phi(a+x, z), \quad (7.28')$$

откуда находим без труда

$$\left. \begin{aligned} W''_{xx}(a, 0) &= -\frac{3c^2}{a^4} + \Phi''_{xx}(a, 0) = \frac{3}{a} \Phi'_x(a, 0) + \Phi''_{xx}(a, 0), \\ W''_{xz}(a, 0) &= 0, \\ W''_{zz}(a, 0) &= \Phi''_{zz}(a, 0). \end{aligned} \right\} \quad (7.29)$$

Положим

$$W''_{xx}(a, 0) = -m^2, \quad W''_{zz}(a, 0) = -n^2. \quad (7.29')$$

Тогда первые члены разложения функции $W(a+x, z)$ напишутся следующим образом:

$$W(a+x, z) = -\frac{1}{2} m^2 x^2 - \frac{1}{2} n^2 z^2 + \dots \quad (7.30)$$

а уравнения (7.25) примут вид

$$\dot{x} = -m^2 x + \dots, \quad \dot{z} = -n^2 z + \dots \quad (7.30')$$

Очевидно, что система (7.30') имеет интеграл, являющийся следствием интеграла (7.13') системы (7.13), который напишется в виде

$$\dot{x}^2 + \dot{z}^2 + m^2 x^2 + n^2 z^2 + \dots = 2\bar{h}. \quad (7.31)$$

Левая часть этого интеграла есть голоморфная функция величин \dot{x}, \dot{z}, x, z в некоторой окрестности начала координат, наименее члены разложения которой образуют квадратичную форму.

Эта квадратичная форма заведомо не будет знакопределенной (положительной), если хотя бы одно из двух чисел m^2 и n^2 не будет положительным.

Если, притом одно из этих чисел отрицательно, то невозмущенное решение $x = 0, z = 0$ системы (7.30') будет неустойчиво (в смысле Ляпунова). Это следует просто из того, что одно из двух уравнений

$$x^2 + m^2 = 0, \quad z^2 + n^2 = 0$$

будет иметь при сказанных условиях вещественный положительный корень.

Если же оба числа m^2 и n^2 положительны, то квадратичная форма в равенстве (7.31) есть знакопределенно положительная и невозмущенное движение будет устойчивым (но не асимптотически!).

Действительно, уравнения (7.30') можно привести к каноническому виду, полагая

$$\dot{x} = \xi, \quad \dot{z} = \zeta$$

и

$$2H = \xi^2 + \zeta^2 - 2W, \quad (7.32)$$

вследствие чего уравнения (7.30') примут форму

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial \xi}, \quad \dot{\xi} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \\ \dot{z} &= \frac{\partial H}{\partial \zeta}, \quad \dot{\zeta} = -\frac{\partial H}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (7.32')$$

Так как

$$2H = \xi^2 + \zeta^2 + m^2x^2 + n^2z^2 + \dots$$

при $m^2 > 0, n^2 > 0$ есть знакоопределенное положительная функция, то по первой теореме прямого метода Ляпунова нулевое решение системы (7.32') *устойчиво*.

Возвращаясь теперь к круговому движению, определяемому начальными условиями (7.22), мы можем заключить, что это движение будет *устойчивым в смысле Ляпунова относительно величин $\rho, \dot{\rho}, z, \dot{z}$* , если выполняются условия

$$\frac{3}{a} \Phi'_{\rho}(a, 0) + \Phi''_{\rho\rho}(a, 0) < 0, \quad \Phi''_{zz}(a, 0) < 0, \quad (7.33)$$

которые и являются достаточными условиями устойчивости.

Иными словами, круговое движение в задаче Фату при выполнении условий (7.33) обладает *орбитальной устойчивостью*.

Полной же устойчивости здесь нет, как и в случае кеплеровского движения и по той же причине.

Если хотя бы одно из условий (7.33) выполняется в противоположном смысле, то круговое движение в задаче Фату будет орбитально неустойчиво.

Такого рода случай мы имеем, например, в упомянутой уже выше задаче движения в гравитационном поле, вызванном двумя неподвижными притягивающими центрами с равными массами.

Важнейшим примером устойчивости кругового движения является случай гравитационного поля Земли, если считать (что, конечно, справедливо только в некотором приближении) это поле, обладающим симметрией и относительно оси вращения Земли, и относительно ее экватора.

§ 2. Периодические решения задачи Фату

1. Рассмотрим опять уравнения (7.25) или (7.32') в предположении, что имеют место достаточные условия устойчивости нулевого решения, т. е. что m^2 и n^2 — числа положительные.