Действительно, уравнения (7.30′) можно привести к каноническому виду, полагая

$$\dot{x}=\xi, \quad \dot{z}=\zeta$$

и

$$2H=\xi^2+\zeta^2-2W, \tag{7.32}$$

вследствие чего уравнения (7.30′) примут форму

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}&=\frac{\partial H}{\partial \xi}, & \dot{\xi}&=-\frac{\partial H}{\partial x}, \\ \dot{z}&=\frac{\partial H}{\partial \zeta}, & \dot{\zeta}&=-\frac{\partial H}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{7.32′}$$

Так как

$$2H=\xi^2+\zeta^2+m^2x^2+n^2z^2+\ \ldots$$

при $m^2>0$, $n^2>0$ есть знакоопределенно положительная функция, то по первой теореме прямого метода Ляпунова нулевое решение системы (7.32′) *устойчиво.*

Возвращаясь теперь к круговому движению, определяемому начальными условиями (7.22), мы можем заключить, что это движение будет устойчивым в смысле Ляпунова относительно величин $\rho, \dot{\rho}, z, \dot{z}$, если выполняются условия

$$\frac{3}{a}\Phi'_\rho(a,\ 0)+\Phi''_{\rho\rho}(a,\ 0)<0, \quad \Phi''_{zz}(a,\ 0)<0, \tag{7.33}$$

которые и являются достаточными условиями устойчивости.

Иными словами, круговое движение в задаче Фату при выполнении условий (7.33) обладает *орбитальной устойчивостью.*

Полной же устойчивости здесь нет, как и в случае кеплеровского движения и по той же причине.

Если хотя бы одно из условий (7.33) выполняется в противоположном смысле, то круговое движение в задаче Фату будет орбитально неустойчиво.

Такого рода случай мы имеем, например, в упомянутой уже выше задаче движения в гравитационном поле, вызванном двумя неподвижными притягивающими центрами с равными массами.

Важнейшим примером устойчивости кругового движения является случай гравитационного поля Земли, если считать (что, конечно, справедливо только в некотором приближении) это поле, обладающим симметрией и относительно оси вращения Земли, и относительно ее экватора.

§ 2. Периодические решения задачи Фату

1. Рассмотрим опять уравнения (7.25) или (7.32′) в предположении, что имеют место достаточные условия устойчивости нулевого решения, т. е. что m^2 и n^2 — числа положительные.

Тогда определяющее уравнение системы первого приближения имеет две пары чисто мнимых корней

$$\pm m\sqrt{-1}, \quad \pm n\sqrt{-1}, \tag{7.34}$$

каждому из которых соответствует одно периодическое решение системы в вариациях с двумя произвольными постоянными.

Но уравнения (7.32′) имеют вдобавок голоморфный интеграл, наинизшие члены разложения которого образуют знакоопределенную квадратичную форму. Поэтому, если ни одно из отношений m/n, n/m не представляет целого числа, то по теореме Ляпунова о периодических решениях система (7.32′) также будет иметь два периодических решения, каждое с двумя произвольными постоянными.

Каждое из этих периодических решений представится в виде рядов, расположенных по возрастающим степеням некоторой произвольной постоянной, коэффициентами которых являются конечные ряды синусов и косинусов некоторой переменной, пропорциональной времени.

Как следует из теоремы Ляпунова, нами только что упомянутой, ряды эти будут абсолютно сходящимися при всех значениях времени, пока модуль постоянной (по степеням которой эти ряды расположены) не превосходит некоторого, отличного от нуля предела.

Для составления указанных рядов мы применим метод Ляпунова непосредственно к системе уравнений второго порядка (7.25), как это уже было сделано один раз при нахождении периодических решений вблизи точек либрации.

Пусть λ обозначает какое-либо из чисел m и n, а σ — произвольную постоянную. Положим

$$T = \frac{2\pi}{\lambda}(1 + h_2\sigma^2 + h_3\sigma^3 + \ldots), \tag{7.35}$$

где h_k — неопределенные коэффициенты, и введем в уравнения (7.25) новую независимую переменную τ посредством подстановки

$$\tau = \frac{2\pi(t - t_0)}{T}. \tag{7.35′}$$

Преобразованным уравнениям

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{T^2}{4\pi^2}\frac{\partial W}{\partial x}, \quad \frac{d^2z}{d\tau^2} = \frac{T^2}{4\pi^2}\frac{\partial W}{\partial z} \tag{7.36}$$

стараемся удовлетворить рядами, расположенными по степеням произвольной постоянной σ:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k x_k, \quad z = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k z_k, \tag{7.36′}$$

причем неопределенными коэффициентами h_k распоряжаемся таким образом, чтобы все функции x_k, z_k вышли бы периодическими функциями от τ с общим периодом 2π.

Составим теперь уравнения, определяющие коэффициенты рядов (7.36′). Так как функция $\Phi(\rho, z)$ по условию есть четная функция от координаты z, то разложение функции $W(a+x, z)$ по степеням величин x и z будет содержать только четные степени z и может быть написано следующим образом:

$$W = -\frac{1}{2}m^2x^2 - \frac{1}{2}n^2z^2 + W_3 + W_4 + \ldots, \tag{7.37}$$

где

$$W_k = \sum_{s=0}^{E\left(\frac{k}{2}\right)} W_{k,s}x^{k-2s}z^{2s} \quad (k=3, \ldots) \tag{7.37′}$$

суть однородные многочлены степени k с постоянными коэффициентами, которые легко выражаются через значения частных производных функции $\Phi(\rho, z)$ при $\rho = a$, $z = 0$. Имея в виду определить коэффициенты рядов (7.36′) в членах до третьего порядка включительно, положим для удобства

$$W_3 = \frac{1}{3}\alpha x^3 + \beta xz^2,$$

$$W_4 = \frac{1}{4}\alpha_1 x^4 + \frac{1}{2}\beta_1 x^2z^2 + \frac{1}{4}\gamma_1 z^4,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Тогда уравнения (7.36) можно написать в виде

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x}{d\tau^2} &= \frac{T^2}{4\pi^2}\left[-m^2x + \sum_{k=3}^{\infty}\sum_{s=0}^{E\left(\frac{k}{2}\right)}(k-2s)W_{k,s}x^{k-2s-1}z^{2s}\right] = \\
&= \frac{1}{\lambda^2}(1 + 2h_2\sigma^2 + 2h_3\sigma^3 + \ldots)[-m^2x + \alpha x^2 + \\
&\qquad + \beta z^2 + \alpha_1 x^3 + \beta_1 xz^2 + \ldots], \\
\frac{d^2z}{d\tau^2} &= \frac{T^2}{4\pi^2}\left[-n^2z + \sum_{k=3}^{\infty}\sum_{s=0}^{E\left(\frac{k}{2}\right)}2sW_{k,s}x^{k-2s}z^{2s-1}\right] = \\
&= \frac{1}{\lambda^2}(1 + 2h_2\sigma^2 + 2h_3\sigma^3 + \ldots)[-n^2z + 2\beta xz + \\
&\qquad + \beta_1 x^2z + \gamma_1 z^3 + \ldots].
\end{aligned}\right\} \tag{7.38}$$

Заметим, что разложение, стоящее в квадратных скобках первого уравнения (7.38), содержит z только в четных степе-

нях, а такое же разложение во втором уравнении содержит z только в нечетных степенях.

Подставляя в эти уравнения вместо x и z ряды (7.36′) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях σ в левых и правых частях равенств, мы получим для определения функций x_k, z_k следующие системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{d\tau^2} &= -\frac{m^2}{\lambda^2}x_1, \\ \frac{d^2z_1}{d\tau^2} &= -\frac{n^2}{\lambda^2}z_1, \end{aligned}\right\} \tag{7.39}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x_2}{d\tau^2} &= -\frac{m^2}{\lambda^2}x_2 + \frac{\alpha}{\lambda^2}x_1^2 + \frac{\beta}{\lambda^2}z_1^2, \\ \frac{d^2z_2}{d\tau^2} &= -\frac{n^2}{\lambda^2}z_2 + \frac{2\beta}{\lambda^2}x_1z_1, \end{aligned}\right\} \tag{7.40}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x_3}{d\tau^2} &= -\frac{m^2}{\lambda^2}x_3 - \frac{2h_2m^2}{\lambda^2}x_1 + \frac{2\alpha}{\lambda^2}x_1x_2 + \\ &\qquad + \frac{2\beta}{\lambda^2}z_1z_2 + \frac{\alpha_1}{\lambda^2}x_1^3 + \frac{\beta_1}{\lambda^2}x_1z_1^2, \\ \frac{d^2z_3}{d\tau^2} &= -\frac{n^2}{\lambda^2}z_3 - \frac{2h_2n^2}{\lambda^2}z_1 + \frac{2\beta}{\lambda^2}(x_1z_2 + x_2z_1) + \\ &\qquad + \frac{\beta_1}{\lambda^2}x_1^2z_1 + \frac{\gamma_1}{\lambda^2}z_1^3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{7.41}$$

Вообще уравнения, определяющие функции x_k, z_k, имеют следующую структуру ($k > 1$):

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x_k}{d\tau^2} + \frac{m^2}{\lambda^2}x_k &= X_k(h_{k-1}, \ldots, h_2;\ x_1, z_1, \ldots, x_{k-1}, z_{k-1}), \\ \frac{d^2z_k}{d\tau^2} + \frac{n^2}{\lambda^2}z_k &= Z_k(h_{k-1}, \ldots, h_2;\ x_1, z_1, \ldots, x_{k-1}, z_{k-1}), \end{aligned}\right\} \tag{7.42}$$

где X_k и Z_k — многочлены k-й степени относительно своих аргументов, однородные относительно нижних индексов, т. е. в каждом члене многочленов X_k и Z_k сумма нижних индексов аргументов равна индексу k определяемой функции. Кроме того, отметим, что каждый член многочлена Z_k обязательно содержит множителем по крайней мере одну из величин z_s ($s = 1, 2, \ldots, k-1$).

Когда определены уже все функции x_s, z_s, для которых $s < k$, и выбраны постоянные h_s, для которых $s < k-1$, так, чтобы все эти функции были периодическими с одним и тем же периодом 2π, то величины X_k, Z_k в уравнениях (7.42) сделаются известными периодическими функциями от τ с периодом 2π и содержат неопределенную еще постоянную h_{k-1}.

Поэтому из уравнений (7.42) мы определим следующую пару функций x_k, z_k, выбирая следующую постоянную h_{k-1} так, чтобы эти функции также вышли периодическими с периодом 2π.

Так как (на основании теоремы Ляпунова) нам известно заранее, что периодические решения рассматриваемого типа существуют, то процесс определения коэффициентов рядов (7.36′) и (7.35) можно продолжать сколь угодно далеко, и мы можем получить искомое периодическое решение с какой угодно степенью точности.

Разумеется, при интегрировании каждой из систем типа (7.42) будут входить произвольные постоянные, которые, вообще говоря, можно выбирать как угодно, так как этот выбор подчинен единственному условию, чтобы периодические ряды (7.36′) были сходящимися.

Действительно, по теореме Ляпунова каждое периодическое решение рассматриваемого типа должно содержать две произвольные постоянные, одна из которых σ, а другая (несущественная) — начальный момент t_0.

Переходя теперь к фактическому определению функций x_k, z_k, мы должны различать два случая, так как λ обозначает здесь или m, или n.

2. Пусть $\lambda = m$. Тогда второе из уравнений (7.39) примет вид

$$\frac{d^2 z_1}{d\tau^2} = -\frac{n^2}{m^2} z_1. \tag{7.43}$$

Величины m и n по формулам (7.29′) зависят только от радиуса a исходной круговой орбиты (невозмущенного движения), а стало быть, каждое из отношений n/m и m/n будет функцией от a. Для нахождения периодических решений, существование которых обусловливается теоремой Ляпунова, мы должны исключить из рассмотрения такие орбиты (если они существуют), для которых хотя бы одно из этих отношений есть целое число.

Но если n/m не есть целое число, то единственная периодическая функция с периодом 2π, удовлетворяющая уравнению (7.43), есть нуль, и мы имеем

$$z_1 = 0. \tag{7.43′}$$

Тогда легко видеть, что на тех же основаниях мы будем иметь $z_2 = 0$, $z_3 = 0$, ... Но если все функции z_s, для которых $s < k$, суть нули, то по свойству функций Z_k мы будем иметь $Z_k \equiv 0$, а следовательно, уравнение, определяющее z_k, имеет такой же вид, как и (7.43), и мы найдем $z_k = 0$.

Следовательно, будем иметь

$$z = 0, \tag{7.43''}$$

и рассматриваемое периодическое решение — плоское.

Определим теперь функции x_k. При определении этих функций будут возникать постоянные, которые, как указано, можно выбирать произвольно. Будем выбирать их таким образом, чтобы начальные значения всех функций x_k и их первых производных по τ были равны нулю для $k > 1$ и чтобы начальное значение функции x_1 было равно единице. Иными словами, пусть

$$\left.\begin{aligned} &x_1(0) = 1, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \\ &x_k(0) = 0, \quad \dot{x}_k(0) = 0 \qquad (k = 2, 3, \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{7.44}$$

При этом выборе произвольных постоянных величина, по степеням которой представляется разложение функции в интересующем нас периодическом решении, будет просто равна начальному значению этой функции, т. е. мы будем иметь

$$x(0) = \sigma. \tag{7.44'}$$

Переходим к определению функций x_k. Первое из уравнений (7.39) при $\lambda = m$ имеет вид

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} = -x_1, \tag{7.45}$$

и единственное решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям (7.44), будет, очевидно,

$$x_1 = \cos\tau. \tag{7.45'}$$

Подставляя найденное x_1 (и $z_1 = 0$) в первое из уравнений (7.40), мы получим

$$\frac{d^2x_2}{d\tau^2} + x_2 = \frac{\alpha}{2m^2}(1 + \cos 2\tau). \tag{7.46}$$

Периодическое решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям (7.44), напишется, как легко проверить, в виде

$$x_2 = \frac{\alpha}{6m^2}(3 - 2\cos\tau - \cos 2\tau). \tag{7.46'}$$

Перейдем далее к определению функции x_3, где нам впервые встретится необходимость выбора неопределенных коэффициентов h_k. Действительно, подставляя в первое из уравнений (7.41) вместо x_1 и x_2 найденные их выражения (а вместо z_1 и z_2 — нули), мы имеем

$$\frac{d^2x_3}{d\tau^2} + x_3 = \left(-2h_2 + \frac{5\alpha^2}{6m^4} + \frac{3\alpha_1}{4m^2}\right)\cos\tau - \frac{\alpha^2}{3m^4} - \\ - \frac{\alpha^2}{3m^4}\cos 2\tau + \left(\frac{\alpha_1}{4m^2} - \frac{\alpha^2}{3m^4}\right)\cos 3\tau. \tag{7.47}$$

Чтобы это уравнение имело периодическое решение, необходимо, чтобы в правой его части отсутствовал член, содержащий $\cos\tau$. Поэтому постоянную h_2 нужно выбрать таким образом, чтобы коэффициент при $\cos\tau$ был равен нулю, что дает для постоянной h_2 следующее выражение:

$$h_2 = \frac{5\alpha^2}{12m^4} + \frac{3\alpha_1}{8m^2}. \tag{7.47'}$$

Выбрав h_2, мы найдем после этого x_3 как периодическую функцию τ с периодом 2π, удовлетворяющую уравнению (7.47) и начальным условиям (7.44), в следующем виде:

$$x_3 = A_3^{(0)} + A_3^{(1)}\cos\tau + A_3^{(2)}\cos 2\tau + A_3^{(3)}\cos 3\tau, \tag{7.48}$$

где постоянные коэффициенты $A_3^{(i)}$ — функции радиуса исходной круговой орбиты a, определяемые формулами

$$\left.\begin{aligned} A_3^{(0)} &= -\frac{\alpha^2}{3m^4}, & A_3^{(1)} &= \frac{\alpha_1}{32m^2} + \frac{13\alpha^2}{72m^4}, \\ A_3^{(2)} &= \frac{\alpha^2}{9m^4}, & A_3^{(3)} &= \frac{\alpha^2}{24m^4} - \frac{\alpha_1}{32m^2}. \end{aligned}\right\} \tag{7.48'}$$

Подобным же образом поступаем и далее. Нетрудно убедиться, что после того как все функции x_s, для которых $s < k$, и все постоянные h_s, для которых $s < k-1$, уже определены, уравнение, определяющее функцию x_k, напишется в виде

$$\frac{d^2x_k}{d\tau^2} + x_k = \tilde{A}_k^{(0)} + \left(-2h_{k-1} + \tilde{A}_k^{(1)}\right)\cos\tau + \tilde{A}_k^{(2)}\cos 2\tau + \ldots$$
$$\ldots + \tilde{A}_k^{(k)}\cos k\tau, \tag{7.49}$$

где все $\tilde{A}_k^{(i)}$ — постоянные коэффициенты, зависящие известным образом от радиуса a исходной круговой орбиты.

Для того чтобы существовало периодическое решение последнего уравнения, необходимо, чтобы в правой его части не было члена с $\cos\tau$, для чего нужно обратить в нуль коэффициент $-2h_{k-1} + \tilde{A}_k^{(1)}$, что дает для неопределенной еще постоянной h_{k-1} следующее выражение:

$$h_{k-1} = \frac{1}{2}\tilde{A}_k^{(1)}. \tag{7.50}$$

Написав затем общее решение уравнения (7.49) и определив две произвольные постоянные так, чтобы выполнялись условия (7.44), мы получим функцию x_k в виде следующего тригонометрического многочлена:

$$x_k = \sum_{i=0}^{k} A_k^{(i)}\cos i\tau, \tag{7.51}$$

где все $A_k^{(i)}$ — известные постоянные коэффициенты, зависящие только от радиуса a исходной круговой орбиты и удовлетворяющие соотношению

$$\sum_{i=0}^{k} A_k^{(i)} = 0. \tag{7.51'}$$

Таким образом, плоское периодическое решение системы (7.36) определится формулой

$$x = \sigma \cdot \cos\tau + \sum_{k=2}^{\infty} \sigma^k \sum_{i=0}^{k} A_k^{(i)} \cos i\tau, \tag{7.52}$$

где τ и T находятся по формулам (7.35) и (7.35′). Ясно, что функция x есть также периодическая функция времени t с периодом T, зависящим и от радиуса a исходной круговой орбиты, и от постоянной σ, которая в силу (7.44′) представляет начальное значение (при $t = t_0$, или при $\tau = 0$) функции x. А это начальное значение в силу (7.24) определится формулой

$$x(0) = \sigma = \rho_0 - a. \tag{7.52'}$$

3. Теперь рассмотрим решение, соответствующее случаю $\lambda = n$. При интегрировании уравнений вида (7.42) в этом случае мы будем выбирать произвольные постоянные таким образом, чтобы выполнялись условия

$$\left.\begin{aligned} &z_1(0) = 1, \quad \dot{z}_1(0) = 0, \\ &z_k(0) = 0, \quad \dot{z}_k(0) = 0 \qquad (k = 2, 3, \ldots), \end{aligned}\right\} \tag{7.53}$$

а все остальные произвольные постоянные будем полагать равными нулю.

При этих условиях уравнения (7.39), которые напишутся в виде

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} = -\frac{m^2}{n^2} x_1, \quad \frac{d^2z_1}{d\tau^2} = -z_1, \tag{7.54}$$

дают

$$x_1 = 0, \quad z_1 = \cos\tau. \tag{7.54'}$$

Уравнения (7.40) приведутся тогда к виду

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2x_2}{d\tau^2} + \frac{m^2}{n^2} x_2 = \frac{\beta}{2n^2}(1 + \cos 2\tau), \\ &\frac{d^2z_2}{d\tau^2} + z_2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{7.55}$$

откуда, при принятых условиях относительно произвольных постоянных, найдем

$$\left.\begin{aligned} &x_2 = \frac{\beta}{2m^2} + \frac{\beta}{2(m^2 - 4n^2)} \cos 2\tau, \\ &z_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.55'}$$

Далее, уравнения (7.41) напишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2x_3}{d\tau^2}+\frac{m^2}{n^2}x_3=0,\\ &\frac{d^2z_3}{d\tau^2}+z_3=\left(-2h_2+\tilde{A}_3^{(1)}\right)\cos\tau+\tilde{A}_3^{(3)}\cos 3\tau, \end{aligned}\right\} \tag{7.56}$$

где положено

$$\tilde{A}_3^{(1)}=\frac{\beta^2}{2n^2(m^2-4n^2)}+\frac{\beta^2}{m^2n^2}+\frac{3\gamma_1}{4n^2},$$

$$\tilde{A}_3^{(3)}=\frac{\gamma_1}{4n^2}+\frac{\beta^2}{2n^2(m^2-4n^2)}.$$

Первое из этих уравнений дает сразу

$$x_3=0, \tag{7.56'}$$

а во втором постоянную h_2 нужно выбрать так, чтобы исчез член, содержащий $\cos\tau$, т. е. нужно положить

$$h_2=\frac{1}{2}\tilde{A}_3^{(1)}. \tag{7.56''}$$

После этого уравнение, определяющее функцию z_3, примет вид

$$\frac{d^2z_3}{d\tau^2}+z_3=A\cdot\cos 3\tau, \tag{7.57}$$

где

$$A=\frac{\gamma_1}{4n^2}+\frac{\beta^2}{2n^2(m^2-4n^2)}.$$

Периодическое решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям (7.53), найдется по формуле

$$z_3=\frac{1}{8}A(\cos\tau-\cos 3\tau). \tag{7.57'}$$

Обращаясь далее к следующим уравнениям, выпишем только одно из них, определяющее функцию z_4. Легко проверить, что это уравнение будет иметь вид

$$\frac{d^2z_4}{d\tau^2}+z_4=-2h_3\cos\tau \tag{7.58}$$

откуда следует, что постоянная h_3 должна быть нулем.

Полагая $h_3=0$, из предыдущего уравнения найдем

$$z_4=0. \tag{7.58'}$$

Подобным же образом определятся и все остальные коэффициенты рядов (7.36′), представляющих искомое периодическое решение. При этом все функции z_s с четными индексами и все функции x_s и постоянные h_s с нечетными индексами вый-

дут равными нулю, так что ряд, определяющий координату z, расположится по нечетным степеням параметра σ, а ряды, определяющие функцию x и период решения T, расположатся по четным степеням σ.

Это простое свойство исследуемого периодического решения можно доказать, пользуясь методом полной индукции.

Действительно, допустим, что мы уже определили все коэффициенты рядов для x и z до некоторого номера s включительно и все коэффициенты ряда для T соответственно до номера $s-1$ включительно и нашли, что

$$\left.\begin{aligned} x_1 = x_3 = x_5 = \ldots = 0, \\ z_2 = z_4 = z_6 = \ldots = 0, \\ h_3 = h_5 = h_7 = \ldots = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.59}$$

Рассмотрим при этих условиях определение функций x_{s+1}, z_{s+1} и постоянной h_s.

Уравнения, определяющие функции x_{s+1}, z_{s+1}, суть уравнения (7.42) для $k = s+1$, которые получаются путем сравнения коэффициентов при σ^{s+1} в уравнениях (7.38). Члены, содержащие множителем σ^{s+1} в правых частях уравнений (7.38), получаются, очевидно, от умножения членов, содержащих σ в степени, не превышающей s в разложении T^2, на разложения по степеням σ членов вида $x^{k_1}z^{k_2}$, где должно быть $k_1 + k_2 \leqslant s+1$.

Поэтому, если s — число четное, то из разложений $x^{k_1}z^{k_2}$ мы должны брать только члены с нечетными степенями σ. Но в первом из уравнений (7.38) все такие члены суть нули ввиду условий (7.59) и ввиду того, что k_2 — всегда число четное. Поэтому уравнение, определяющее функцию x_{s+1}, имеет вид

$$\frac{d^2x_{s+1}}{d\tau^2} + \frac{m^2}{n^2}x_{s+1} = 0, \tag{7.60}$$

откуда следует, что функция x_{s+1} с нечетным индексом $s+1$ будет равна нулю.

Уравнение, определяющее z_{s+1}, напишется в виде

$$\frac{d^2z_{s+1}}{d\tau^2} + z_{s+1} = \\ = Z_{s+1}(h_2, h_4, \ldots, h_s;\ x_2, \ldots, x_s;\ z_1, \ldots, z_{s-1}), \tag{7.61}$$

из которого определится периодическая функция z_{s+1} при соответствующем выборе постоянной h_s. Так как Z_{s+1} есть однородная функция относительно нижних значков всех своих аргументов, то после подстановки вместо x_i, z_i уже полученных их значений она представится в виде тригонометрического многочлена порядка $s+1$, расположенного только по косинусам нечетных кратных τ.

Такой же вид, разумеется, будет иметь и функция z_{s+1}.

Если же s — число нечетное, то в уравнении (7.61) ввиду условий (7.59) и ввиду того, что в этом случае k_1 — всегда число нечетное, обратятся в нуль все члены, кроме одного, и уравнение, определяющее следующую функцию z_{s+1} с четным индексом $s+1$, напишется в виде

$$\frac{d^2 z_{s+1}}{d\tau^2} + z_{s+1} = -2h_s \cos\tau. \tag{7.61'}$$

Для того чтобы это уравнение имело периодическое решение, должно быть $h_s = 0$ (s нечетное). Если же h_s — нуль, то единственное периодическое решение уравнения (7.61′), удовлетворяющее условиям (7.53), есть нуль.

Но мы уже показали непосредственным вычислением, что $x_1 = x_3 = 0$, $z_2 = z_4 = 0$, $h_3 = 0$. Следовательно, указанное свойство доказано полностью.

Отметим еще для полноты, что уравнение, определяющее функцию x_{s+1} (с четным индексом $s+1$), имеет вид

$$\frac{d^2 x_{s+1}}{d\tau^2} + \frac{m^2}{n^2} x_{s+1} = \\ = X_{s+1}(h_2, \ldots, h_{s-1}, x_2, \ldots, x_{s-1}, z_1, \ldots, z_s). \tag{7.62}$$

Так как функция X_{s+1} однородна относительно нижних индексов всех своих аргументов и $s+1$ — число четное, то после подстановки вместо x_i, z_i найденных уже их значений X_{s+1} представится в виде тригонометрического многочлена порядка $s+1$, расположенного по косинусам четных кратных аргумента τ. Такой же вид будет иметь и частное периодическое решение последнего уравнения.

Ввиду доказанного рассматриваемое периодическое решение представится следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^{2k} \sum_{s=0}^{k} A_{2k}^{(2s)} \cos 2s\tau, \\ z &= \sigma\cos\tau + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^{2k+1} \sum_{s=0}^{k} A_{2k+1}^{(2s+1)} \cos(2s+1)\tau, \end{aligned}\right\} \tag{7.63}$$

где по-прежнему

$$\tau = \frac{2\pi(t-t_0)}{T},$$

а период T определяется рядом вида

$$T = \frac{2\pi}{n}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} h_{2k}\sigma^{2k}\right). \tag{7.63'}$$

Так как при $t = t_0$ имеем $\tau = 0$, то

$$z_0 = \sigma, \quad \dot{z}_0 = 0, \tag{7.63''}$$

т. е. σ есть начальное значение функции z.

Заметим в заключение, что начальное значение функции x не может быть взято произвольно и определяется в зависимости от начального значения z следующей очевидной формулой:

$$x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^{2k} \sum_{s=0}^{k} A_{2k}^{(2s)}.$$

В отличие от периодического решения, соответствующего случаю $\lambda = m$, которое мы назвали *плоским*, решение, определяемое формулами (7.63), мы будем называть *пространственным* периодическим решением.

§ 3. Свойства движения, соответствующего периодическому решению

1. В предыдущем параграфе мы нашли два частных периодических решения уравнений (7.25), определяющих линейные координаты ρ и z в движении точки P, близком к круговому (невозмущенному!) движению.

Рассмотрим теперь определение угловой координаты и выявим некоторые характерные свойства траекторий, вьющихся в непосредственной окрестности окружности радиуса a.

Из интеграла площадей в плоскости (xOy) мы имеем, предполагая, что $c \neq 0$,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{c}{\rho^2}. \tag{7.64}$$

Переходя к переменной τ, мы напишем последнее уравнение в виде

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{cT}{2\pi} \cdot (a + x)^{-2}, \tag{7.64'}$$

откуда найдем

$$v - v_0 = \frac{cT}{2\pi} \int_0^{\tau} \frac{d\tau}{(a + x)^2}. \tag{7.65}$$

Величина x и в плоском и в пространственном периодических решениях представляется рядом, расположенным по степеням параметра σ, коэффициентами которого являются конечные ряды косинусов целых кратностей τ. Ряды эти сходятся абсолютно для всякого значения τ, пока $|\sigma|$ не превосходит некоторого, отличного от нуля предела. Поэтому простой перестановкой членов ряды эти можно превратить в тригонометрические,