Так как при $t = t_0$ имеем $\tau = 0$, то

$$z_0 = \sigma, \quad \dot{z}_0 = 0, \tag{7.63''}$$

т. е. σ есть начальное значение функции z.

Заметим в заключение, что начальное значение функции x не может быть взято произвольно и определяется в зависимости от начального значения z следующей очевидной формулой:

$$x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^{2k} \sum_{s=0}^{k} A_{2k}^{(2s)}.$$

В отличие от периодического решения, соответствующего случаю $\lambda = m$, которое мы назвали *плоским*, решение, определяемое формулами (7.63), мы будем называть *пространственным* периодическим решением.

§ 3. Свойства движения, соответствующего периодическому решению

1. В предыдущем параграфе мы нашли два частных периодических решения уравнений (7.25), определяющих линейные координаты ρ и z в движении точки P, близком к круговому (невозмущенному!) движению.

Рассмотрим теперь определение угловой координаты и выявим некоторые характерные свойства траекторий, вьющихся в непосредственной окрестности окружности радиуса a.

Из интеграла площадей в плоскости (xOy) мы имеем, предполагая, что $c \neq 0$,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{c}{\rho^2}. \tag{7.64}$$

Переходя к переменной τ, мы напишем последнее уравнение в виде

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{cT}{2\pi} \cdot (a + x)^{-2}, \tag{7.64'}$$

откуда найдем

$$v - v_0 = \frac{cT}{2\pi} \int_0^{\tau} \frac{d\tau}{(a + x)^2}. \tag{7.65}$$

Величина x и в плоском и в пространственном периодических решениях представляется рядом, расположенным по степеням параметра σ, коэффициентами которого являются конечные ряды косинусов целых кратностей τ. Ряды эти сходятся абсолютно для всякого значения τ, пока $|\sigma|$ не превосходит некоторого, отличного от нуля предела. Поэтому простой перестановкой членов ряды эти можно превратить в тригонометрические,

коэффициентами которых будут бесконечные ряды, расположенные по степеням σ и абсолютно сходящиеся в той же области значений σ.

Следовательно, мы можем написать

$$a + x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos k\tau, \tag{7.66}$$

где

$$a_k = \sum_{s=k}^{\infty} a_k^{(s)} \sigma^s. \tag{7.66'}$$

Формулы (7.66) и (7.66′) одинаково пригодны и в случае плоского, и в случае пространственного периодического решения. Однако можно заметить, что в последнем случае мы имеем

$$a_{2k+1} = 0, \quad a_{2k} = \sum_{s=k}^{\infty} a_{2k}^{(2s)} \sigma^{2s}.$$

Функция $(a + x)^{-2}$, ввиду (7.66), также может быть представлена в виде абсолютно и равномерно сходящегося тригонометрического ряда, расположенного по косинусам целых кратностей τ, так что мы имеем

$$(a + x)^{-2} = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k \cos k\tau, \tag{7.67}$$

причем коэффициенты вычисляются по известным формулам

$$\bar{a}_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos k\tau \cdot d\tau}{(a + x)^2} \tag{7.67'}$$

и суть функции от σ, представляемые рядами такого же типа, как и ряды (7.66′). Подставляя разложение (7.67) в формулу (7.65) и интегрируя почленно, мы получим

$$v - v_0 = b_0 \tau + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\tau, \tag{7.68}$$

где положено

$$b_0 = \frac{cT}{2\pi} \bar{a}_0, \quad b_k = \frac{cT}{2k\pi} \bar{a}_k \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{7.68'}$$

Коэффициенты b_k зависят от c, a и σ, но так как c связано с a уравнением (7.20′), то все b_k зависят только от a и σ, являясь голоморфными функциями σ при численно достаточно малых значениях последнего.

Легко видеть, что эти коэффициенты также представляются рядами вида

$$b_k = \sum_{s=k}^{\infty} b_k^{(s)} \sigma^s, \tag{7.69}$$

причем нетрудно проверить (см. формулу (7.21″)), что

$$b_0^{(0)} = \pm 1 \tag{7.69'}$$

(плюс соответствует прямому движению, минус — обратному).

Поэтому, когда время изменяется на T, т. е. τ получает приращение 2π, долгота v получит приращение

$$\Delta v = 2\pi b_0 = 2\pi \left[\pm 1 + \sum_{s=1}^{\infty} b_0^{(s)} \sigma^s\right], \tag{7.70}$$

которое при численно малых значениях σ весьма мало отличается от $\pm 2\pi$.

Но в момент $t_0 + T$ координаты $\rho = a + x$ и z принимают свои начальные значения $\rho_0 = a + x_0$ и z_0 (для случая $\lambda = m$, $z_0 = 0$), а $v(t_0 + T) = v_0 + 2\pi b_0$. Поэтому, так как b_0, вообще говоря, есть число иррациональное, то траектория не замыкается и движение точки P, соответствующее какому-либо из двух периодических решений системы (7.25), само не является периодическим.

Только в исключительном случае, когда величина $|b_0|$ окажется равной рациональному числу вида p/q (p и q — целые положительные числа), движение также будет периодическим. Действительно, в этом случае, при изменении t на qT, долгота v получит приращение, равное $2\pi q$, а ρ и z не изменятся. Движение будет периодическим с периодом qT, и траектория точки P замкнется после p оборотов.

2. Рассмотрим подробнее случай плоского движения, соответствующего плоскому периодическому решению системы (7.25).

В этом случае $z = 0$, а ρ определится формулой

$$\rho = a + \sigma \cos \tau + \sum_{k=2}^{\infty} \sigma^k \sum_{i=0}^{k} A_k^{(i)} \cos i\tau, \tag{7.71}$$

где коэффициенты удовлетворяют соотношению (7.51′).

Найдем максимумы и минимумы функции ρ. Дифференцируя равенство (7.71), мы имеем

$$\frac{d\rho}{d\tau} = -\sigma \sin \tau - \sum_{k=2}^{\infty} \sigma^k \sum_{i=0}^{k} i A_k^{(i)} \sin i\tau.$$

Эта производная заведомо обращается в нуль при следующих значениях τ:

$$0, \quad 2\pi, \quad 4\pi, \ldots,$$
$$\pi, \quad 3\pi, \quad 5\pi, \ldots$$

Чтобы определить, какие из этих значений дают максимумы и какие минимумы, найдем вторую производную. Мы имеем

$$\frac{d^2\rho}{d\tau^2} = -\sigma\cos\tau - \sum_{k=2}^{\infty}\sigma^k\sum_{i=0}^{k} i^2 A_k^{(i)}\cos i\tau,$$

откуда находим при $\tau = 0,\ 2\pi,\ 4\pi,\ \ldots$

$$\frac{d^2\rho}{d\tau^2} = -\sigma - \sum_{k=2}^{\infty}\sigma^k\sum_{i=0}^{k} i^2 A_k^{(i)}$$

и при $\tau = \pi,\ 3\pi,\ 5\pi,\ 7\pi,\ \ldots$

$$\frac{d^2\rho}{d\tau^2} = +\sigma - \sum_{k=2}^{\infty}\sigma^k\sum_{i=0}^{k}(-1)^i i^2 A_k^{(i)}.$$

Так как при малых значениях σ знак ряда определяется знаком первого его члена, то при $\sigma > 0$ функция ρ имеет максимумы для $\tau = 0,\ 2\pi,\ \ldots$ и минимумы для $\tau = \pi,\ 3\pi,\ \ldots$ Если $\sigma < 0$, то картина будет обратная.

Обозначая через ρ_1 минимум и через ρ_2 максимум величины ρ, мы имеем, следовательно,

при $\sigma = x_0 = \rho_0 - a > 0$

$$\rho_1 = a - \sigma + \sum_{k=2}^{\infty}\sigma^k\sum_{i=0}^{k}(-1)^i A_k^{(i)},$$

$$\rho_2 = a + \sigma = \rho_0,$$

а при $\sigma < 0$

$$\rho_1 = a + \sigma = \rho_0,$$

$$\rho_2 = a - \sigma + \sum_{k=2}^{\infty}\sigma^k\sum_{i=0}^{k}(-1)^i A_k^{(i)}.$$

Но $\rho_0 = a + \sigma$ есть начальное значение величины ρ. Таким образом, если $\sigma > 0$, то ρ не может сделаться больше своего начального значения, а если $\sigma < 0$, то ρ не может сделаться меньше своего начального значения.

Так как ρ_1 и ρ_2 — величины постоянные (т. е. не зависящие от числа сделанных оборотов), то в случае $\lambda = m$ траектория движущейся точки P есть, вообще говоря, незамкнутая плоская кривая, бесконечно вьющаяся между двумя концентрическими окружностями с радиусами ρ_1 и ρ_2, касающаяся попеременно то одной то другой окружности и заполняющая кольцевую зону, заключенную между ними, всюду плотно. Точки соприкосновения траектории с внутренней окружностью можно назвать *пери-*

центрами орбиты, а точки соприкосновения с внешней окружностью — *апоцентрами*.

Направления на перицентры и апоцентры определяются значениями угла v, соответствующими значениям величины τ, кратным 2π и π. Поэтому разность значений v, соответствующих двум последовательным перицентрам (апоцентрам), дает смещение перицентра орбиты (апоцентра) за один оборот, т. е. за время T.

Согласно формуле (7.70) это смещение численно равно величине

$$|2\pi - \Delta v| = 2\pi \left| \sum_{\sigma=1}^{\infty} b_0^{(s)} \sigma^s \right|$$

и есть малая величина порядка, не меньшего чем σ.

3. Рассмотрим теперь случай $\lambda = n$, т. е. случай пространственного периодического решения, в котором координаты ρ и z определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} \rho &= a + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^{2k} \sum_{s=0}^{\infty} A_{2k}^{(2s)} \cos 2s\tau, \\ z &= \sigma \cos \tau + \sum_{k=j}^{\infty} \sigma^{2k+1} \sum_{s=0}^{k} A_{2k+1}^{(2s+1)} \cos (2s+1)\tau, \end{aligned}\right\} \qquad (7.72)$$

а долгота v — опять формулой (7.68).

Траектория движущейся точки P в этом случае есть пространственная кривая, лежащая, очевидно, на некоторой поверхности вращения вокруг оси Oz, уравнение которой получим, исключая τ из двух уравнений (7.72), которые представляют уравнения меридианного сечения этой поверхности. Так как вид поверхности вращения вполне определяется этим сечением, то нам остается только исследовать кривую, лежащую в плоскости, проходящей через ось Oz и параметрические уравнения которой суть уравнения (7.72).

Для этого найдем прежде всего максимумы и минимумы функций ρ и z. Дифференцируя уравнения (7.72) по переменной τ, мы имеем

$$\frac{d\rho}{d\tau} = -\sum_{k=1}^{\infty} \sigma^{2k} \sum_{s=0}^{\infty} 2s A_{2k}^{(2k)} \sin 2s\tau \qquad (7.73)$$

и

$$\frac{dz}{d\tau} = -\sigma \sin \tau - \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^{2k+1} \sum_{s=0}^{k} (2s+1) A_{2k+1}^{(2s+1)} \sin (2s+1)\tau. \qquad (7.73')$$

Повторное дифференцирование дает

$$\frac{d^2\rho}{d\tau^2} = -\sum_{k=1}^{\infty} \sigma^{2k} \sum_{s=0}^{k} 4s^2 A_{2k}^{(2s)} \cos 2s\tau \tag{7.74}$$

и

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} = -\sigma\cos\tau - \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^{2k+1} \sum_{s=0}^{k} (2s+1)^2 A_{2k+1}^{(2s+1)} \cos(2s+1)\tau. \tag{7.74'}$$

Ясно, что производная $\frac{d\rho}{d\tau}$ обращается в нуль при следующих значениях τ:

$$\left.\begin{matrix} 0, & \pi, & 2\pi, & \ldots, \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{3\pi}{2}, & \frac{5\pi}{2}, & \ldots, \end{matrix}\right\} \tag{7.75}$$

а производная $\frac{dz}{d\tau}$ равна нулю при

$$\left.\begin{matrix} 0, & 2\pi, & 4\pi, & \ldots, \\ \pi, & 3\pi, & 5\pi, & \ldots \end{matrix}\right\} \tag{7.75'}$$

Из (7.74′) усматриваем, что если $\sigma = z_0 > 0$, то значения $\tau = 0, 2\pi, \ldots$ дают максимумы, а значения $\tau = \pi, 3\pi, \ldots$ — минимумы функции z. Заключение будет обратным, если $\sigma < 0$.

В силу симметрии достаточно рассмотреть случай, когда $\sigma > 0$. Так как, в силу условий (7.53),

$$\sum_{s=0}^{k} A_{2k+1}^{(2s+1)} = 0$$

для всякого k, то из (7.72) получим

$$z_{\max} = \sigma = z_0, \quad z_{\min} = -\sigma = -z_0.$$

Отсюда следует, что поверхность вращения заключена в области, ограниченной двумя плоскостями, перпендикулярными оси вращения и отстоящими от начала координат на расстоянии, равном $\sigma = z_0$. Так как траектория точки P лежит на упомянутой поверхности, то она не может выйти за пределы указанной области.

Далее формула (7.74) дает при $\tau = 0, \pi, \ldots$

$$\frac{d^2\rho}{d\tau^2} = -\sum_{k=1}^{\infty} \sigma^{2k} \sum_{s=0}^{k} 4s^2 A_{2k}^{(2s)} = -4\sigma^2 A_2^{(2)} + \ldots$$

и при $\tau = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$

$$\frac{d^2\rho}{d\tau^2} = -\sum_{k=1}^{\infty} \sigma^{2k} \sum_{s=0}^{k} (-1)^s 4s^2 A_{2k}^{(2s)} = +4\sigma^2 A_2^{(2)} + \ldots$$

При малых значениях σ эти выражения имеют противоположные знаки, зависящие от знака постоянной $A_2^{(2)}$.

Поэтому, если $A_2^{(2)} < 0$, то при $\tau = 0, \pi, \ldots$ мы имеем минимумы функции ρ, а при $\tau = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$ имеем максимумы. При $A_2^{(2)} > 0$ картина будет обратная.

Заметим, что при $A_2^{(2)} < 0$ минимумы ρ имеют место одновременно с минимумами и максимумами функции z и что при значениях τ, дающих максимумы ρ, функция z обращается в нуль. Наоборот, если $A_2^{(2)} > 0$, то максимумы ρ имеют место одновременно с максимумами и минимумами z, а при значениях τ, дающих минимумы ρ, имеем $z = 0$.

Из приведенного анализа делается ясной форма дуги меридианного сечения поверхности.

Эта дуга симметрична относительно прямой, перпендикулярной оси вращения, вогнута к началу координат, если мы имеем $A_2^{(2)} < 0$, и выпукла к началу, если $A_2^{(2)} > 0$. Так как постоянная b_0 есть вообще число иррациональное, то траектория точки P вьется бесконечно вокруг оси симметрии, заполняя всюду плотно пояс поверхности, образованный вращением этой дуги.

При этом траектория касается по очереди то нижней, то верхней границы пояса, каковыми являются две окружности, получающиеся при пересечении поверхности вращения с плоскостями $z = \pm z_0$.

В том исключительном случае, когда b_0 оказывается числом рациональным, траектория точки P, аналогично плоскому случаю, есть замкнутая кривая, лежащая на упомянутой поверхности вращения, замыкающаяся после конечного числа оборотов. Как уже было отмечено, в этом и только в этом случае движение точки P будет чисто периодическим.

Примечание. Существование периодических и почти периодических решений, рассмотренных выше, обусловливается наличием точных круговых решений задачи Фату, орбитально устойчивых в смысле Ляпунова. Так как исходные круговые орбиты лежат в плоскости симметрии силового поля, то близкие к ним траектории или также лежат в этой плоскости, или близки к ней. Так как для применения метода Ляпунова необходимо иметь исходное периодическое решение задачи, а других частных решений мы указать не можем, то не можем также

найти какие-либо другие периодические решения таким путем.

Однако отсюда вовсе не следует, что задача Фату не имеет вообще никаких других периодических (или почти периодических) решений, которые могли бы быть найдены при помощи других методов.

Действительно, рассмотрим опять общие уравнения задачи Фату (7.1), где $U(x, y, z)$ — силовая функция, которая в самом общем случае может быть представлена в виде суммы двух разложений типа (7.3) и (7.3′).

Выделяя в первом разложении первый член, соответствующий $k = 0$, мы можем представить U в виде

$$U = \frac{fm}{r} + V(x, y, z).$$

Допустим теперь, что вторая часть силовой функции — возмущающая функция $V(x, y, z)$ — численно весьма мала (по крайней мере в некоторой области пространства) по сравнению с первой, основной частью. Тогда уравнения движения, которым можно придать вид

$$\ddot{x} + \frac{fmx}{r^3} = \frac{\partial V}{\partial x},$$

$$\ddot{y} + \frac{fmy}{r^3} = \frac{\partial V}{\partial y},$$

$$\ddot{z} + \frac{fmz}{r^3} = \frac{\partial V}{\partial z},$$

будут иметь решения, мало отличающиеся (по крайней мере в течение некоторого промежутка времени) от решений уравнений невозмущенного кеплеровского движения, которые получим, полагая $V = 0$.

Но уравнения невозмущенного кеплеровского движения заведомо имеют периодические решения, орбиты которых (эллипсы или окружности) могут лежать в плоскостях, образующих любой угол с основной координатной плоскостью.

Поэтому можно искать периодические решения уравнений возмущенного движения, близкие к этим периодическим кеплеровым орбитам.

Такие периодические решения можно искать при помощи метода Пуанкаре, если, например, функция V содержит множителем некоторый малый параметр.

Если же функция V не содержит малого параметра, то его можно всегда ввести искусственным способом, после чего опять возможно применить метод Пуанкаре.

Мы ограничимся здесь только этим кратким замечанием, так как объем книги не позволяет нам рассматривать эту интересную и важную задачу сколько-нибудь подробно.