Часть третья

НЕОГРАНИЧЕННЫЕ ЗАДАЧИ

Третья часть этой книги посвящена рассмотрению неограниченных задач небесной механики. Термин «неограниченная» имеет, конечно, условное значение, так как, по существу, всякая задача естествознания является в той или иной мере ограниченной. Здесь мы имеем в виду, во-первых, что все рассматриваемые материальные точки являются активно действующими, в противоположность положениям предыдущей главы, где одна из точек являлась пассивно действующей, т. е. не оказывала на другие материальные точки, или тела никакого влияния.

Во-вторых, мы рассмотрим здесь в кратких чертах некоторые важнейшие результаты из теории движения тел, имеющих конечные размеры и массы и обладающие, таким образом, не только поступательными движениями, но также и вращающимися вокруг своих центров масс. Эта задача имеет в настоящее время актуальное значение и успешно разрабатывается многими учеными и в нашей стране и за рубежом.

Глава VIII

ОБЩАЯ ЗАДАЧА МНОГИХ ТЕЛ

Мы начинаем первую главу третьей части рассмотрением общей задачи многих тел, под которой здесь понимается задача некоторого (конечного) числа материальных точек, которые все являются активно действующими, т. е. предполагается, что каждая из материальных точек системы имеет конечную массу и действует на каждую другую точку этой же системы с силой (притяжения или отталкивания), направленной по прямой, соединяющей обе точки, и пропорциональной некоторой заданной функции времени, расстояния между двумя точками и двух первых производных по времени от этого расстояния.

Иными словами, мы будем рассматривать те же общие законы сил, как и во второй части этой книги. Классическая задача получается отсюда как частный случай, когда силы предполагаются только силами взаимных притяжений по закону Ньютона, с общим для всех точек системы множителем пропорциональности (универсальная константа «всемирного тяготения»). Частным случаем является также задача, в которой действующие силы зависят только от соответствующих расстояний, но по закону, отличному от ньютоновского. В частности, сюда относится релятивистская задача в первом приближении, когда к ньютоновской силе прибавляется сила, обратно пропорциональная четвертой степени взаимного расстояния.

Другим частным случаем является задача с законом Вебера, который мы уже рассматривали в предыдущей части для случая ограниченных задач.

§ 1. Уравнения задачи. Первые интегралы

1. Рассмотрим систему $n+1$ материальных точек $M_0, M_1, \ldots, M_n$, обладающих постоянными конечными массами $m_0, m_1, \ldots, m_n$ соответственно.

Пусть Δ_{ij} обозначает расстояние между точками M_i и M_j $(i, j = 0, 1, 2, \ldots, n;\ j \neq i)$.

Все массы m_i являются активно действующими. Пусть на каждую точку M_i действует сила, исходящая от вся-

кой другой точки M_j, направленная по прямой, проходящей через эти две точки, и пропорциональная произведению их масс и некоторой, заданной заранее, функции $F_{ij}(t;\ \Delta_{ij},\ \dot{\Delta}_{ij},\ \ddot{\Delta}_{ij})$ от времени t, взаимного расстояния Δ_{ij} и его двух первых производных $\dot{\Delta}_{ij}$ и $\ddot{\Delta}_{ij}$ по времени.

Множитель пропорциональности (или, вернее, множители пропорциональности), обеспечивающий размерность, который либо есть величина постоянная, зависящая от закона силы, либо вообще заданная функция времени, мы включаем в функцию F_{ij}.

Кроме того, мы не будем предполагать, что здесь выполняется третья аксиома механики Ньютона, т. е. допустим, что

$$F_{ji} \neq F_{ij}, \tag{8.1}$$

т. е., что действие может быть и не равно противодействию.

Этот закон, важный для земной механики и служащий для определения реакций твердых (неизменяемых) механических систем, в небесной механике не играет существенной роли и может быть принят или не принят, в зависимости от характера рассматриваемой задачи. Заметим, что и в классической небесной механике этот закон не играет существенной роли и в курсах и книгах по небесной механике можно найти (с очень давних времен!) множество задач, в которых о третьей аксиоме Ньютона вообще даже не упоминается. Таковы все ограниченные задачи: классическая задача о движении Луны или какого-либо другого спутника, например, спутников Юпитера, задача о движении астероида или кометы, задача двух неподвижных центров, играющая видную роль в современной астродинамике, задача о полете космического корабля, небесной лаборатории или космической метеостанции и т. д.

Первый и второй законы ньютоновской механики (первая и вторая аксиома в «Математических началах натуральной философии» Ньютона) в нашей книге сохраняются.

Заметим, что первая аксиома устанавливает свойства пространства и времени (движение рассматривается в евклидовом пространстве с равномерно текущим временем), а вторая позволяет наиболее просто написать дифференциальные уравнения движения интересующей нас механической системы.

Необходимо подчеркнуть, что упомянутые три закона динамики самим Ньютоном в его знаменитом сочинении называются так: *Аксиомы, или законы движения* и вполне аналогичны *аксиомам Евклида*, устанавливающим геометрические свойства пространства.

В настоящее время и те и другие аксиомы рассматриваются, как всем хорошо известно, как приближенные, модель-

н ы е, соотношения, не претендующие вовсе на их абсолютную адекватность истинным свойствам пространства и истинным законам природы, но позволяющим рассчитывать движения небесных тел и познавать некоторые их свойства.

Приближенное соответствие модельных законов истинным (но нам еще не известным!) устанавливается при помощи наблюдений и сравнений этих наблюдений (тоже приближенных и несовершенных) с результатами, вытекающими из математических следствий из принятых модельных законов.

Возьмем теперь некоторую абсолютную систему координат $(O\xi\eta\zeta)$ с началом в фиксированной точке евклидова пространства O и с неизменными направлениями осей $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$. Обозначим координаты точки M_i в этой системе буквами ξ_i, η_i, ζ_i.

Тогда на основании второго закона механики Ньютона мы можем написать дифференциальные уравнения движения нашей системы $n+1$ точек в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} m_i\ddot{\xi}_i &= \Xi_i = \sum_{i\neq j=0}^{n} m_i m_j F_{ij}\frac{\xi_j-\xi_i}{\Delta_{ij}},\\ m_i\ddot{\eta}_i &= \mathrm{H}_i = \sum_{i\neq j=0}^{n} m_i m_j F_{ij}\frac{\eta_j-\eta_i}{\Delta_{ij}},\\ m_i\ddot{\zeta}_i &= \mathrm{Z}_i = \sum_{i\neq j=0}^{n} m_i m_j F_{ij}\frac{\zeta_j-\zeta_i}{\Delta_{ij}}, \end{aligned}\right\} \tag{8.2}$$

где

$$\Delta_{ij}^2 = (\xi_j-\xi_i)^2+(\eta_j-\eta_i)^2+(\zeta_j-\zeta_i)^2, \tag{8.3}$$

а их первые и вторые производные по времени получаются дифференцированием формул (8.3), так же, как это уже делалось в предыдущей главе.

Мы будем всегда предполагать, что функции

$$F_{ij} = F_{ij}(t;\ \Delta_{ij},\ \dot{\Delta}_{ij},\ \ddot{\Delta}_{ij}) \tag{8.4}$$

и их производные первого и второго порядков относительно указанных аргументов, а значит, и относительно координат точек M_i, M_j и их производных первого и второго порядков таковы, что каждой начальной конфигурации и состоянию системы $n+1$ точек соответствует единственное решение системы дифференциальных уравнений (8.2), определенное в бесконечном интервале времени и соответствующее единственному движению этой системы точек, находящейся под действием заданных сил.

При этом нужно, конечно, исключить такие начальные состояния, когда в начальный момент какая-либо из точек M_i

совпадает с другой точкой M_j или имеет неопределенную или бесконечную начальную скорость.

Такие случаи, так же как и в классических задачах небесной механики, являются особенными и требуют специального рассмотрения.

Решения не особенных задач, т. е. интегрирование системы дифференциальных уравнений (8.2) при заданных, не особенных, начальных условиях, так же как и в классических задачах, могут быть получены только приближенными методами, например, методами численного интегрирования или при помощи бесконечных рядов того или иного вида.

Однако мы можем указать по крайней мере один частный случай, когда уравнения (8.2) могут быть полностью проинтегрированы в классическом, математическом смысле. Это случай, когда все функции (8.4) определяются формулами

$$F_{ij} = f_{ij}\Delta_{ij}, \quad f_{ij} = \text{const}, \tag{8.4'}$$

т. е. законами действующих сил являются законы Гука.

Действительно, в этом случае система (8.2) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} m_i\ddot{\xi}_i &= \sum_{i \neq j=0}^{n} f_{ij} m_i m_j (\xi_j - \xi_i), \\ m_i\ddot{\eta}_i &= \sum_{i \neq j=0}^{n} f_{ij} m_i m_j (\eta_j - \eta_i), \\ m_i\ddot{\zeta}_i &= \sum_{i \neq j=0}^{n} f_{ij} m_i m_j (\zeta_j - \zeta_i). \end{aligned}\right\} \tag{8.2'}$$

Очевидно, что система (8.2′) состоит из трех независимых систем линейных дифференциальных уравнений второго порядка с $n+1$ неизвестными функциями каждая. Все три системы имеют одинаковую структуру и каждая может быть легко проинтегрирована в элементарных функциях.

Отметим, что уравнения (8.2′) оказываются также интегрируемыми и в том случае, когда величины f_{ij} в законах (8.4′) не остаются постоянными, а являются функциями времени, определяемыми законом И. В. Мещерского (см. главу IV). При этом предполагается еще, что во все время движения точки M_i остаются на неизменной прямой линии.

Подробности, относящиеся к этому случаю, можно найти в книге И. В. Мещерского «Работы по механике тел переменной массы», Гостехиздат, 1949.

2. Посмотрим теперь, в каких случаях (кроме только что отмеченного случая задачи с законом Гука) система (8.2) может допускать первые интегралы, подобные тем, которые имеет классическая задача многих тел с законом Ньютона.

Для этого применим к уравнениям (8.2) хорошо известную процедуру. Из уравнений (8.2) выводим прежде всего следующие комбинации:

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} m_i\ddot{\xi}_i &= \sum_{i<j} m_i m_j \frac{\xi_j-\xi_i}{\Delta_{ij}}(F_{ij}-F_{ji}),\\
\sum_{i=0}^{n} m_i\ddot{\eta}_i &= \sum_{i<j} m_i m_j \frac{\eta_j-\eta_i}{\Delta_{ij}}(F_{ij}-F_{ji}),\\
\sum_{i=0}^{n} m_i\ddot{\zeta}_i &= \sum_{i<j} m_i m_j \frac{\zeta_j-\zeta_i}{\Delta_{ij}}(F_{ij}-F_{ji}),
\end{aligned}\right\} \tag{8.5}$$

левые части которых являются точными производными. Следовательно, для существования интегралов, аналогичных классическим, необходимо, чтобы правые части также были точными производными. Но, очевидно, для этого достаточно, чтобы для каждой пары индексов «i» и «j» ($i, j = 0, 1, 2, \ldots, n$; $j \neq i$) выполнялись условия

$$F_{ji} = F_{ij}, \tag{8.6}$$

т. е. когда действующие в нашей системе материальных точек силы удовлетворяли бы третьему закону ньютоновской механики (т. е. когда действие равно противодействию).

Если равенства (8.6) действительно выполняются, то правые части уравнений (8.5) оказываются равными нулю и каждое из трех уравнений может быть дважды проинтегрировано.

Выполняя это интегрирование, мы получим

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} m_i\dot{\xi}_i &= a_1, & \sum_{i=0}^{n} m_i\xi_i &= a_1 t + b_1,\\
\sum_{i=0}^{n} m_i\dot{\eta}_i &= a_2, & \sum_{i=0}^{n} m_i\eta_i &= a_2 t + b_2,\\
\sum_{i=0}^{n} m_i\dot{\zeta}_i &= a_3, & \sum_{i=0}^{n} m_i\zeta_i &= a_3 t + b_3.
\end{aligned}\right\} \tag{8.7}$$

Уравнения (8.7), где a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 — произвольные постоянные, являются первыми интегралами уравнений (8.2), каковы бы ни были действующие силы, лишь бы выполнялись условия (8.6). В частности, условия (8.6) всегда выполняются, когда в системе материальных точек царствует закон типа (8.4), но единый для всех пар точек системы.

Уравнения (8.7) выражают принцип сохранения движения центра масс и называются поэтому, как и в классическом случае, интегралами движения центра масс. Действительно, обо-

значим буквами $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ координаты центра масс системы $n+1$ материальных точек, т. е. положим

$$\bar{\xi}=\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{n} m_i\xi_i, \quad \bar{\eta}=\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{n} m_i\eta_i, \quad \bar{\zeta}=\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{n} m_i\zeta_i, \tag{8.7'}$$

где

$$m=\sum_{i=0}^{n} m_i \tag{8.7''}$$

есть полная масса всей системы точек.

С помощью (8.7′) интегралы (8.7) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\xi}=\frac{a_1t+b_1}{m}, \quad \bar{\eta}=\frac{a_2t+b_2}{m}, \quad \bar{\zeta}=\frac{a_3t+b_3}{m},\\ &\frac{d\bar{\xi}}{dt}=\frac{a_1}{m}, \quad \frac{d\bar{\eta}}{dt}=\frac{a_2}{m}, \quad \frac{d\bar{\zeta}}{dt}=\frac{a_3}{m}, \end{aligned}\right\} \tag{8.7'''}$$

откуда следует, что центр масс системы $G(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$ движется в абсолютной системе координат прямолинейно и равномерно.

Если условия (8.6) не выполняются, или выполняются только частично (т. е. не для всех, но только для некоторых пар точек), то правые части равенств (8.5) не будут равны нулю и интегралы движения центра масс не существуют. Поэтому условия (8.6) являются не только достаточными, но и необходимыми для выполнения принципа движения центра масс.

Заметим теперь, что существование интегралов (8.7) нисколько не облегчает задачу об интегрировании системы (8.2), а отсутствие этих интегралов вовсе не затрудняет выполнение этой задачи.

Центр масс, координаты которого определяются формулами (8.7′), всегда существует; только при выполнении условий (8.6) точка G движется равномерно по прямой линии, а при невыполнении условий (8.6) точка G движется неравномерно по некоторой пространственной траектории.

Обозначим теперь через c_1, c_2, c_3 проекции вектора момента количества движения системы $n+1$ материальных точек, т. е. положим, как и в классической небесной механике,

$$\left.\begin{aligned} c_1&=\sum_{i=0}^{n} m_i(\eta_i\dot{\zeta}_i-\zeta_i\dot{\eta}_i),\\ c_2&=\sum_{i=0}^{n} m_i(\zeta_i\dot{\xi}_i-\xi_i\dot{\zeta}_i),\\ c_3&=\sum_{i=0}^{n} m_i(\xi_i\dot{\eta}_i-\eta_i\dot{\xi}_i). \end{aligned}\right\} \tag{8.8}$$

Тогда, комбинируя надлежащим образом (так же, как и в классической небесной механике) уравнения (8.2), мы выведем из них три следующих уравнения:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dc_1}{dt}&=\sum_{i<j} m_i m_j \frac{\eta_i\zeta_j-\zeta_i\eta_j}{\Delta_{ij}}(F_{ij}-F_{ji}),\\ \frac{dc_2}{dt}&=\sum_{i<j} m_i m_j \frac{\zeta_i\xi_j-\xi_i\zeta_j}{\Delta_{ij}}(F_{ij}-F_{ji}),\\ \frac{dc_3}{dt}&=\sum_{i<j} m_i m_j \frac{\xi_i\eta_j-\eta_i\xi_j}{\Delta_{ij}}(F_{ij}-F_{ji}).\end{aligned}\right\} \tag{8.8'}$$

Правые части этих уравнений обращаются в нули, если выполняются условия (8.6), и тогда интегрирование равенств (8.8′) дает три следующих интеграла, вполне тождественных с классическими интегралами площадей:

$$\left.\begin{aligned}c_1&=\sum_{i=0}^{n} m_i(\eta_i\dot\zeta_i-\zeta_i\dot\eta_i)=c_1^0=\text{const},\\ c_2&=\sum_{i=0}^{n} m_i(\zeta_i\dot\xi_i-\xi_i\dot\zeta_i)=c_2^0=\text{const},\\ c_3&=\sum_{i=0}^{n} m_i(\xi_i\dot\eta_i-\eta_i\dot\xi_i)=c_3^0=\text{const}.\end{aligned}\right\} \tag{8.9}$$

Равенства (8.9) выражают принцип сохранения момента количества движения и называются так же, как и в классической небесной механике, *интегралами площадей* или *интегралами моментов*.

Для существования этих интегралов условия (8.6) являются, так же как и для интегралов центра масс, необходимыми и достаточными. Если интегралы (8.9) существуют, то существует также плоскость Лапласа, определяемая в неизменной системе координат ($O\xi\eta\zeta$) уравнением

$$c_1(\xi-\bar\xi)+c_2(\eta-\bar\eta)+c_3(\zeta-\bar\zeta)=0. \tag{8.9'}$$

Эта плоскость, проходящая через начало координат перпендикулярно к вектору момента количества движения системы, сохраняет всегда неизменную ориентацию в абсолютной системе осей, так же как и всякая другая плоскость, параллельная плоскости (8.9).

Если условия (8.6) не выполняются, то величины c_1, c_2, c_3 не будут оставаться постоянными во все время движения и плоскость (8.9′) не будет неизменной плоскостью.

3. Остается рассмотреть вопрос о существовании десятого интеграла системы (8.2), а именно *интеграла живой силы*.

Обозначим, как обычно, кинетическую энергию нашей системы, материальных точек M_i в абсолютных осях через T, т. е. положим

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i v_i^2=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i(\dot{\xi}_i^2+\dot{\eta}_i^2+\dot{\zeta}_i^2). \tag{8.10}$$

Дифференцируя это выражение по t и заменяя вторые производные их значениями из (8.2), мы получим следующее равенство:

$$\frac{dT}{dt}=W, \tag{8.11}$$

где W определяется формулой

$$W=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} m_i m_j F_{ij} v_{ij} \qquad (j\neq i), \tag{8.12}$$

и

$$v_{ij}=\frac{\xi_j-\xi_i}{\Delta_{ij}}\dot{\xi}_i+\frac{\eta_j-\eta_i}{\Delta_{ij}}\dot{\eta}_i+\frac{\zeta_j-\zeta_i}{\Delta_{ij}}\dot{\zeta}_i \tag{8.12'}$$

есть, очевидно, проекция скорости v_i точки M_i на направление $\overline{M_iM_j}$.

Из (8.11) следует, что для существования первого интеграла необходимо, чтобы величина W, определяемая (8.12), была точной производной по времени.

Но при произвольно заданных законах сил, т. е. функций F_{ij}, величина W не будет, вообще говоря, точной производной, так что в самом общем случае уравнения (8.2) не будут допускать интеграла, аналогичного интегралу энергии классической задачи, и мы можем только написать интегральное соотношение

$$T=\int W\,dt+h, \tag{8.13}$$

которое можно назвать *квази-интегралом* энергии («как бы интегралом» или «почти интегралом»).

Допустим теперь, что условия (8.6) выполняются для всякой пары индексов «i» и «j» ($i, j=0, 1, 2, \ldots, n$; $j\neq i$), т. е. допустим, что выполняется третья аксиома механики Ньютона. Тогда выражение (8.12) для W примет вид

$$W=\sum_{i<j} m_i m_j (v_{ij}+v_{ji}) F_{ij}. \tag{8.14}$$

Но ввиду (8.12′) мы имеем

$$v_{ij}+v_{ji}=-\frac{1}{\Delta_{ij}}[(\xi_j-\xi_i)(\dot{\xi}_j-\dot{\xi}_i)+(\eta_j-\eta_i)(\dot{\eta}_j-\dot{\eta}_i)+$$
$$+(\zeta_j-\zeta_i)(\dot{\zeta}_j-\dot{\zeta}_i).$$

Теперь дифференцирование формулы (8.3) дает

$$\Delta_{ij}\dot{\Delta}_{ij} = (\xi_j - \xi_i)(\dot{\xi}_j - \dot{\xi}_i) + (\eta_j - \eta_i)(\dot{\eta}_j - \dot{\eta}_i) + (\zeta_j - \zeta_i)(\dot{\zeta}_j - \dot{\zeta}_i).$$

Следовательно, предыдущая формула принимает простой вид

$$v_{ij} + v_{ji} = -\dot{\Delta}_{ij},$$

и формула (8.14) напишется следующим образом:

$$W = -\sum_{i<j} m_i m_j F_{ij}\dot{\Delta}_{ij}. \tag{8.15}$$

Отсюда видно, что если законы сил таковы, что для каждой функции F_{ij} существует функция Φ_{ij}, так что

$$\dot{\Delta}_{ij}F_{ij}(t;\ \Delta_{ij},\ \dot{\Delta}_{ij},\ \ddot{\Delta}_{ij}) = \frac{d}{dt}\Phi_{ij}(t;\ \Delta_{ij},\ \dot{\Delta}_{ij}), \tag{8.16}$$

то W, определяемая формулой (8.15), становится точной производной от функции U, определяемой формулой

$$U = -\sum_{i<j} m_i m_j \Phi_{ij}(t;\ \Delta_{ij},\ \dot{\Delta}_{ij}). \tag{8.17}$$

В этом случае равенство (8.11) может быть точно проинтегрировано и мы получаем первый интеграл — интеграл энергии, или интеграл живой силы, в известном классическом виде

$$T = U + h, \tag{8.18}$$

или, более подробно, в форме

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i v_i^2 = -\sum_{i<j} m_i m_j \Phi_{ij} + h. \tag{8.18'}$$

Но условия типа (8.16) уже рассматривались в предыдущей части книги, где были также даны условия, которым должны удовлетворять функции F_{ij}, чтобы выполнялись (8.16). Поэтому повторять вывод этих условий нет надобности.

Мы видим, что для существования интеграла живой силы условия (8.6) оказываются необходимыми, но недостаточными, и должны еще выполняться условия, обеспечивающие возможность равенств (8.16).

Заметим, что если законы сил F_{ij} зависят только от соответствующих расстояний Δ_{ij} (но функционально могут быть различными!), то функция Φ_{ij}, определяемая формулой (8.17), всегда существует и мы имеем

$$U = -\sum_{i<j} m_i m_j \int F_{ij}(\Delta_{ij})\, d\Delta_{ij}. \tag{8.17'}$$

В этом случае U есть *функция сил* (или силовая функция) и уравнения (8.2) в этом случае могут быть записаны в клас-

ческом виде

$$m_i\ddot{\xi}_i = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad m_i\ddot{\eta}_i = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \quad m_i\ddot{\zeta}_i = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}. \tag{8.2'}$$

Но если F_{ij} (или хотя бы одна из них) зависит от времени или от производных $\dot{\Delta}_{ij}$ и $\ddot{\Delta}_{ij}$, или хотя бы от какой-нибудь одной из этих величин, то уравнения (8.2) уже не могут быть написаны в виде (8.2′) и функция U, определяемая (8.17), не обладает свойствами силовой функции и ее можно только назвать «*квази-силовой функцией*».

Таков, например, случай, когда действующие силы подчиняются закону Вебера (см. главу II) и когда интеграл (8.18′) имеет вид

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i v_i^2 = \sum_{i<j} \frac{f_{ij} m_i m_j}{\Delta_{ij}}\left(1 - \frac{\dot{\Delta}_{ij}^2}{\sigma_{ij}^2}\right) + h.$$

4. Мы закончим этот параграф выводом соотношения, аналогичного уравнению Лагранжа — Якоби в классической задаче многих тел (материальных точек), взаимно притягивающихся по закону Ньютона.

Применяя для этого к уравнениям (8.2) ту же процедуру, как и в классической механике, мы получим прежде всего следующее соотношение:

$$\sum_{i=0}^{n} m_i(\xi_i\ddot{\xi}_i + \eta_i\ddot{\eta}_i + \zeta_i\ddot{\zeta}_i) = V, \tag{8.19}$$

где

$$V = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} m_i m_j F_{ij}\rho_{ij} \qquad (j \neq i) \tag{8.19'}$$

и

$$\rho_{ij} = \frac{\xi_j - \xi_i}{\Delta_{ij}}\xi_i + \frac{\eta_j - \eta_i}{\Delta_{ij}}\eta_i + \frac{\zeta_j - \zeta_i}{\Delta_{ij}}\zeta_i \tag{8.19''}$$

есть, очевидно, проекция радиуса-вектора r_i точки M_i на направление $\overline{M_iM_j}$.

Но уравнение (8.19) может быть переписано, как нетрудно убедиться, в следующей форме:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\sum_{i=0}^{n} m_i(\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2) - \sum_{i=0}^{n} m_i(\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2) = V.$$

Полагая

$$J = \sum_{i=0}^{n} m_i r_i^2, \quad r_i^2 = \xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2, \tag{8.20}$$

и имея в виду формулу (8.10), мы можем написать (8.19) в виде

$$\ddot{J} = 4T + 2V, \tag{8.21}$$

что можно рассматривать как первую форму уравнения Лагранжа — Якоби.

Исключая из (8.21) живую силу T посредством квази-интеграла (8.13), который напишем в виде

$$T = U^* + h, \quad U^* = \int W\,dt,$$

мы получим из (8.21) следующее уравнение:

$$\ddot{J} = 4U^* + 2V + 4h. \tag{8.21'}$$

Введем теперь вместо момента инерции J системы точек M_i относительно начала координат момент инерции R относительно центра масс G этих точек.

Имея в виду известное соотношение между двумя моментами инерции

$$J = R + m\bar{r}^2,$$

где

$$R = \frac{1}{m}\sum_{i<j} m_i m_j \Delta_{ij}^2, \quad \bar{r}^2 = \bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2 + \bar{\zeta}^2, \tag{8.22}$$

мы перепишем (8.21) и (8.21′) следующим образом:

$$\frac{d^2R}{dt^2} = 4T + 2V - 4h_c \tag{8.23}$$

и

$$\frac{d^2R}{dt^2} = 4U^* + 2V + 4(h - h_c), \tag{8.23'}$$

где

$$h_c = \frac{m}{4}\frac{d^2\bar{r}^2}{dt^2}. \tag{8.24}$$

Уравнения (8.23) и (8.23′) представляют вторую форму уравнения Лагранжа — Якоби.

Допустим теперь, что законы сил удовлетворяют соотношениям (8.6). Тогда существуют интегралы движения центра масс и из (8.24) имеем

$$h_c = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2m} = \text{const}. \tag{8.24'}$$

Далее, при этом же предположении имеем из (8.19)

$$V = \sum_{i<j} m_i m_j (\rho_{ij} + \rho_{ji}) F_{ij}.$$

Но

$$\Delta_{ij}\cdot(\rho_{ij} + \rho_{ji}) = -(\xi_j - \xi_i)^2 - (\eta_j - \eta_i)^2 - (\zeta_j - \zeta_i)^2 = -\Delta_{ij}^2$$

и мы получим

$$V = -\sum_{i<j} m_i m_j \Delta_{ij} F_{ij}. \tag{8.25}$$

Допустим, далее, что существует функция U, определяемая формулой (8.17), так что $U^* = U$ и существует интеграл живой силы (8.18). Тогда уравнения (8.21) и (8.23) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{d^2J}{dt^2} = 4U + 2V + 4h, \tag{8.26}$$

$$\frac{d^2R}{dt^2} = 4U + 2V + 4h', \tag{8.27}$$

где h — постоянная живой силы относительно начала координат и h' — относительно центра масс всей системы точек.

Если положить для сокращения

$$\tilde{U} = 2U + V = -\sum_{i<j} m_i m_j \tilde{U}_{ij},$$

$$\tilde{U}_{ij} = 2\Phi_{ij}(t;\ \Delta_{ij};\ \dot{\Delta}_{ij}) + \Delta_{ij} F_{ij}(t;\ \Delta_{ij},\ \dot{\Delta}_{ij},\ \ddot{\Delta}_{ij}),$$

то уравнения (8.26) и (8.27) примут вид

$$\frac{d^2J}{dt^2} = 2\tilde{U} + 4h, \tag{8.26'}$$

$$\frac{d^2R}{dt^2} = 2\tilde{U} + 4h'. \tag{8.27'}$$

Функции $\tilde{U}_{ij}$ являются известными функциями своих аргументов. Например, для случая, когда каждая F_{ij} определяется законом Вебера, мы имеем

$$\tilde{U}_{ij} = \frac{f_{ij}}{\Delta_{ij}}\left(1 + \frac{\dot{\Delta}_{ij}^2}{\sigma_{ij}^2} - \frac{2\Delta_{ij}\ddot{\Delta}_{ij}}{\sigma_{ij}^2}\right),$$

и для случая закона Ньютона соответственно ($\sigma_{ij} = \infty$)

$$\tilde{U}_{ij} = \frac{f_{ij}}{\Delta_{ij}}.$$

§ 2. Общая задача трех тел

1. Пусть в задаче, которую мы рассматривали в предыдущем параграфе, $n = 2$, так что система состоит из трех материальных точек, M_0, M_1, M_2 с постоянными массами m_0, m_1, m_2 соответственно. Предполагается, что эти три точки взаимодействуют