и мы получим

$$V = -\sum_{i<j} m_i m_j \Delta_{ij} F_{ij}. \tag{8.25}$$

Допустим, далее, что существует функция U, определяемая формулой (8.17), так что $U^* = U$ и существует интеграл живой силы (8.18). Тогда уравнения (8.21) и (8.23) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{d^2J}{dt^2} = 4U + 2V + 4h, \tag{8.26}$$

$$\frac{d^2R}{dt^2} = 4U + 2V + 4h', \tag{8.27}$$

где h — постоянная живой силы относительно начала координат и h' — относительно центра масс всей системы точек.

Если положить для сокращения

$$\tilde{U} = 2U + V = -\sum_{i<j} m_i m_j \tilde{U}_{ij},$$

$$\tilde{U}_{ij} = 2\Phi_{ij}(t;\ \Delta_{ij};\ \dot{\Delta}_{ij}) + \Delta_{ij} F_{ij}(t;\ \Delta_{ij},\ \dot{\Delta}_{ij},\ \ddot{\Delta}_{ij}),$$

то уравнения (8.26) и (8.27) примут вид

$$\frac{d^2J}{dt^2} = 2\tilde{U} + 4h, \tag{8.26'}$$

$$\frac{d^2R}{dt^2} = 2\tilde{U} + 4h'. \tag{8.27'}$$

Функции $\tilde{U}_{ij}$ являются известными функциями своих аргументов. Например, для случая, когда каждая F_{ij} определяется законом Вебера, мы имеем

$$\tilde{U}_{ij} = \frac{f_{ij}}{\Delta_{ij}}\left(1 + \frac{\dot{\Delta}_{ij}^2}{\sigma_{ij}^2} - \frac{2\Delta_{ij}\ddot{\Delta}_{ij}}{\sigma_{ij}^2}\right),$$

и для случая закона Ньютона соответственно ($\sigma_{ij} = \infty$)

$$\tilde{U}_{ij} = \frac{f_{ij}}{\Delta_{ij}}.$$

§ 2. Общая задача трех тел

1. Пусть в задаче, которую мы рассматривали в предыдущем параграфе, $n = 2$, так что система состоит из трех материальных точек, M_0, M_1, M_2 с постоянными массами m_0, m_1, m_2 соответственно. Предполагается, что эти три точки взаимодействуют

попарно с силами такого же характера, как и (8.4). Уравнения движения трех точек получаются из уравнений (8.2) при $n=2$ и, так же как и в классической задаче трех тел (материальных точек), образуют систему девяти уравнений второго порядка относительно девяти абсолютных координат, так что общий порядок всей системы равен 18.

Так как правые части системы (8.2) при любом n содержат только разности абсолютных координат, то, независимо от существования или несуществования первых интегралов, т. е. при любых заданных функциях F_{ij} (здесь $i, j=0, 1, 2$; $j \neq i$), систему (8.2) можно преобразовать к относительным координатам. В этом параграфе мы возьмем за начало координат точку M_0, оставляя новые оси соответственно параллельными первоначальным абсолютным осям и одинаково с ними направленными.

Координаты точек M_1 и M_2 в новой системе осей обозначим соответственно через

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \xi_1 - \xi_0, \quad y_1 = \eta_1 - \eta_0, \quad z_1 = \zeta_1 - \zeta_0, \\ x_2 &= \xi_2 - \xi_0, \quad y_2 = \eta_2 - \eta_0, \quad z_2 = \zeta_2 - \zeta_0. \end{aligned}\right\} \tag{8.28}$$

Тогда три взаимных расстояния, т. е. три стороны треугольника $(M_0M_1M_2)$ определятся формулами

$$\left.\begin{aligned} \Delta_{01} &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = r_1, \\ \Delta_{02} &= \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} = r_2, \\ \Delta_{12} &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \Delta, \end{aligned}\right\} \tag{8.29}$$

а для производных от расстояний (8.29) будем иметь

$$\left.\begin{aligned} r_1\dot{r}_1 &= x_1\dot{x}_1 + y_1\dot{y}_1 + z_1\dot{z}_1, \\ r_1\ddot{r}_1 &= x_1\ddot{x}_1 + y_1\ddot{y}_1 + z_1\ddot{z}_1 + \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2 - \dot{r}_1^2, \\ r_2\dot{r}_2 &= x_2\dot{x}_2 + y_2\dot{y}_2 + z_2\dot{z}_2, \\ r_2\ddot{r}_2 &= x_2\ddot{x}_2 + y_2\ddot{y}_2 + z_2\ddot{z}_2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2 - \dot{r}_2^2, \\ \Delta\dot{\Delta} &= (x_2 - x_1)(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + (y_2 - y_1)(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + \\ &\qquad + (z_2 - z_1)(\dot{z}_2 - \dot{z}_1), \\ \Delta\ddot{\Delta} &= (x_2 - x_1)(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) + (y_2 - y_1)(\ddot{y}_2 - \ddot{y}_1) + \\ &+ (z_2 - z_1)(\ddot{z}_2 - \ddot{z}_1) + (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + (\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2 + (\dot{z}_2 - \dot{z}_1)^2 - \dot{\Delta}^2. \end{aligned}\right\} \tag{8.29'}$$

Далее, заметим, что

$$\left.\begin{aligned}
F_{01} &= F_{01}(t;\ r_1,\ \dot{r}_1,\ \ddot{r}_1),\\
F_{10} &= F_{10}(t;\ r_1,\ \dot{r}_1,\ \ddot{r}_1) \overset{=}{\neq} F_{01},\\
F_{02} &= F_{02}(t;\ r_2,\ \dot{r}_2,\ \ddot{r}_2),\\
F_{20} &= F_{20}(t;\ r_2,\ \dot{r}_2,\ \ddot{r}_2) \overset{=}{\neq} F_{02},\\
F_{12} &= F_{12}(t;\ \Delta,\ \dot{\Delta},\ \ddot{\Delta}),\\
F_{21} &= F_{21}(t;\ \Delta,\ \dot{\Delta},\ \ddot{\Delta}) \overset{=}{\neq} F_{12}.
\end{aligned}\right\} \tag{8.30}$$

В формулах (8.30) двойной знак «$\overset{=}{\neq}$» указывает, что функция F_{ji} может быть одинакова с функцией F_{ij} и может от нее отличаться.

Из (8.28) и (8.2) мы выведем без труда уравнения движения точек M_1 и M_2 в системе координат с началом в M_0 и с неизменными направлениями осей. Эти уравнения мы выпишем здесь полностью:

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{x}_1 &= -(m_0F_{10} + m_1F_{01})\frac{x_1}{r_1} - m_2F_{02}\cdot\frac{x_2}{r_2} + m_2F_{12}\frac{x_2 - x_1}{\Delta},\\
\ddot{y}_1 &= -(m_0F_{10} + m_1F_{01})\frac{y_1}{r_1} - m_2F_{02}\cdot\frac{y_2}{r_2} + m_2F_{12}\frac{y_2 - y_1}{\Delta},\\
\ddot{z}_1 &= -(m_0F_{10} + m_1F_{01})\frac{z_1}{r_1} - m_2F_{02}\cdot\frac{z_2}{r_2} + m_2F_{12}\frac{z_2 - z_1}{\Delta},
\end{aligned}\right\} \tag{8.31}$$

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{x}_2 &= -(m_0F_{20} + m_1F_{01})\frac{x_2}{r_2} - m_2F_{02}\cdot\frac{x_2}{r_2} - m_1F_{21}\frac{x_2 - x_1}{\Delta},\\
\ddot{y}_2 &= -(m_0F_{20} + m_1F_{01})\frac{y_2}{r_2} - m_2F_{02}\cdot\frac{y_2}{r_2} - m_1F_{21}\frac{y_2 - y_1}{\Delta},\\
\ddot{z}_2 &= -(m_0F_{20} + m_1F_{01})\frac{z_2}{r_2} - m_2F_{02}\cdot\frac{z_2}{r_2} - m_1F_{21}\frac{z_2 - z_1}{\Delta}.
\end{aligned}\right\} \tag{8.32}$$

Уравнения (8.31) и (8.32) образуют совместную систему шести уравнений второго порядка, полностью определяющую относительное движение точек M_1 и M_2 в системе координат с началом в точке M_0.

Однако следует заметить, что знание относительных движений точек M_1 и M_2 вообще не определяет их абсолютных движений. Действительно, если $F_{ji} \neq F_{ij}$, т. е. если не выполняется принцип движения центра масс, то координаты точки M_0 в абсолютной системе остаются неопределенными и для их определения нужно еще проинтегрировать систему трех уравнений с неизвестными ξ_0, η_0, ζ_0, из которых предварительно нужно исключить абсолютные координаты точек M_1, M_2 при помощи равенств (8.28), в которых относительные координаты точек M_1 и M_2 надо считать известными.

Если же принцип сохранения движения центра масс выполняется, т. е. если $F_{ji} = F_{ij}$, то, зная относительные координаты точек M_1 и M_2, мы без всякого интегрирования найдем абсолютные координаты точки M_0 из (8.7) для $n = 2$ в виде

$$m \cdot \xi_0 = a_1 t + b_1 - m_1 x_1 - m_2 x_2,$$
$$m \cdot \eta_0 = a_2 t + b_2 - m_1 y_1 - m_2 y_2,$$
$$m \cdot \zeta_0 = a_3 t + b_3 - m_1 z_1 - m_2 z_2.$$

Найдя по этим формулам или интегрированием упомянутых выше уравнений ξ_0, η_0, ζ_0, мы можем найти затем из (8.28) и абсолютные координаты точек M_1 и M_2.

Из уравнений (8.31) и (8.32) получаются, в частности, и классические уравнения относительного движения точек M_1 и M_2 и уравнения общей ограниченной задачи о движении пассивной точки M_2, находящейся под влиянием точек M_0 и M_1.

2. Теперь выведем из уравнений (8.31) и (8.32) уравнения общей задачи трех тел в той форме, которую придал им А. М. Ляпунов в своих исследованиях по задаче трех тел.

Три точки M_0, M_1, M_2, очевидно, всегда образуют треугольник, а поэтому всегда находятся в одной плоскости, положение которой относительно неизменных осей вообще изменяется с течением времени.

Если в каждый момент времени мы будем знать положение плоскости треугольника (в неизменных осях координат) и положение каждой из его вершин в этой плоскости, то движение каждой из трех материальных точек будет полностью определено.

Положение плоскости треугольника можно определить обычными астрономическими элементами — наклонением I и долготой узла Ω. Ориентация треугольника в его плоскости определится положением одной из его вершин и углом, который образует одна из сторон с линией пересечения плоскости треугольника с основной координатной плоскостью. Положения двух других вершин в плоскости треугольника определятся, если будут известны их расстояния от первой вершины и угол, образуемый этими расстояниями.

Для преобразования уравнений (8.31) и (8.32) к новым переменным, которые только что были описаны, введем подвижную систему координат с началом в точке M_0, основной плоскостью которой является плоскость $(M_0M_1M_2)$. Примем за новую ось абсцисс $(M_0\xi)$ направление, идущее от начала M_0 к точке M_1, за новую ось ординат $(M_0\eta)$ — направление, перпендикулярное к $(M_0\xi)$ в плоскости треугольника, составляющее острый угол с направлением (M_0M_2), и за новую ось аппликат $(M_0\zeta)$ — направление, перпендикулярное к плоскости тре-

угольника $(M_0M_1M_2)$, притом такое, чтобы система $(M_0\xi\eta\zeta)$ могла быть совмещена надлежащим вращением с системой (M_0xyz).

Обозначим через a_{ij} направляющие косинусы, определяющие ориентацию новой системы по отношению к старой по следующей схеме:

	ξ	η	ζ
x	a_{11}	a_{12}	a_{13}
y	a_{21}	a_{22}	a_{23}
z	a_{31}	a_{32}	a_{33}

Эти девять направляющих косинусов выражаются через три эйлеровых угла подвижной системы $(M_0\xi\eta\zeta)$ — долготу узла Ω, наклонность I и угол собственного вращения Φ — известными формулами теоретической механики (или теории кеплеровского движения), которыми в этом параграфе нам не придется пользоваться и которые поэтому здесь выписывать не будем.

Старые координаты x, y, z какой угодно точки пространства выражаются через новые координаты ξ, η, ζ очевидными формулами

$$\left.\begin{aligned} x &= a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta, \\ y &= a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta, \\ z &= a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta. \end{aligned}\right\} \tag{8.33}$$

Но координаты точек M_1 и M_2 в подвижной системе координат будут, очевидно,

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= r_1, & \eta_1 &= 0, & \zeta_1 &= 0, \\ \xi_2 &= r_2\cos\psi, & \eta_2 &= r_2\sin\psi, & \zeta_2 &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{8.34}$$

где ψ обозначает угол, образованный радиусами-векторами r_1 и r_2. Теперь формулы (8.33) дают

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_{11}r_1, & x_2 &= a_{11}r_2\cos\psi + a_{12}r_2\sin\psi, \\ y_1 &= a_{21}r_1, & y_2 &= a_{21}r_2\cos\psi + a_{22}r_2\sin\psi, \\ z_1 &= a_{31}r_1, & z_2 &= a_{31}r_2\cos\psi + a_{32}r_2\sin\psi. \end{aligned}\right\} \tag{8.35}$$

Формулы (8.35) выражают относительные координаты точек M_1 и M_2 в неизменной системе (M_0xyz) через величины

$$r_1,\ r_2,\ \psi,\ \Omega,\ I,\ \Phi, \tag{8.36}$$

которые и могут быть приняты за новые переменные.

Величины r_1, r_2 и ψ полностью определяют треугольник $(M_0M_1M_2)$. Действительно, обозначим два других угла треугольника через φ_1 (при вершине M_1) и φ_2 (при точке M_2). Тогда из треугольника $(M_0M_1M_2)$ имеем

$$\left.\begin{aligned} &\Delta=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\psi}\,,\\ &\sin\varphi_1=\frac{r_2}{\Delta}\sin\psi,\quad \sin\varphi_2=\frac{r_1}{\Delta}\sin\psi. \end{aligned}\right\} \tag{8.37}$$

Но вместо углов Эйлера Ω, I, Φ, определяющих положение плоскости треугольника в неподвижных осях (точнее, в осях, имеющих неизменные направления) и положение треугольника в его плоскости, введем, согласно Ляпунову, три новые неизвестные, а именно проекции угловой скорости триэдра $(M_0\xi\eta\zeta)$ (подвижной системы координат) ω_1, ω_2, ω_3 на оси $(M_0\xi)$, $(M_0\eta)$, $(M_0\zeta)$ соответственно.

Эти величины связаны с углами Эйлера известными кинематическими уравнениями Эйлера

$$\left.\begin{aligned} &\omega_1=\sin\Phi\sin I\cdot\dot\Omega+\cos\Phi\cdot\dot I,\\ &\omega_2=\cos\Phi\sin I\cdot\dot\Omega-\sin\Phi\cdot\dot I,\\ &\omega_3=\cos I\cdot\dot\Omega+\dot\Phi, \end{aligned}\right\} \tag{8.38}$$

которые представляют три дифференциальных уравнения первого порядка, определяющие функции Ω, I, Φ, когда ω_1, ω_2, ω_3 известны как функции времени.

Производные по времени от направляющих косинусов a_{ij} могут быть выражены через ω_1, ω_2, ω_3 и a_{ij} также известными формулами теоретической механики

$$\dot a_{ij}=\omega_{(j+2)}a_{j\,(i+1)}-\omega_{(j+1)}a_{i\,(j+2)}, \tag{8.38'}$$

причем когда в индексной скобке выходит число, большее трех, то тройка должна быть отброшена.

Величины

$$r_1,\ r_2,\ \psi,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3 \tag{8.39}$$

примем теперь за новые переменные в нашей задаче.

Введем еще для симметрии уравнений, которые выведем ниже, еще три величины ω_1', ω_2', ω_3' формулами

$$\left.\begin{aligned} \omega_1' &= \omega_1 \cos\psi + \omega_2 \sin\psi, \\ \omega_2' &= -\omega_1 \sin\psi + \omega_2 \cos\psi, \\ \omega_3' &= \omega_3 + \dot{\psi}. \end{aligned}\right\} \tag{8.40}$$

Эти величины являются проекциями угловой скорости триэдра $(M_0\xi\eta\zeta)$ на направление (M_0M_2), направление, перпендикулярное к (M_0M_2) в плоскости треугольника, и на направление перпендикуляра к этой плоскости. При этом, три указанных направления должны совмещаться с осями $M_0\xi$, $M_0\eta$ и $M_0\zeta$ надлежащим вращением.

3. Чтобы получить дифференциальные уравнения, определяющие величины (8.39), проще всего поступить следующим образом: помножим сначала уравнения (8.31) соответственно на x_1, y_1, z_1 и сложим. Мы имеем

$$x_1\ddot{x}_1 + y_1\ddot{y}_1 + z_1\ddot{z}_1 = -(m_0F_{10} + m_1F_{01}) \cdot r_1 - \\ - m_2F_{02} \cdot r_1 \cos\psi + m_2F_{12} \cdot r_1 \frac{r_2 \cos\psi - r_1}{\Delta}. \tag{8.41}$$

Но

$$x_1\ddot{x}_1 + y_1\ddot{y}_1 + z_1\ddot{z}_1 = r_1\ddot{r}_1 + \dot{r}_1^2 - (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2),$$

а из формул (8.35) найдем

$$\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2 = \\ = \dot{r}_1^2 + 2(a_{11}\dot{a}_{11} + a_{21}\dot{a}_{21} + a_{31}\dot{a}_{31}) r_1\dot{r}_1 + (\dot{a}_{11}^2 + \dot{a}_{21}^2 + \dot{a}_{31}^2) r_1^2.$$

Но сумма квадратов направляющих косинусов равна единице, а поэтому средний член последнего равенства исчезает. Далее, из (8.38′) найдем, что выражение в скобках в последнем члене равно $\omega_2^2 + \omega_3^2$. Поэтому

$$x_1\ddot{x}_1 + y_1\ddot{y}_1 + z_1\ddot{z}_1 = r_1\ddot{r}_1 - (\omega_2^2 + \omega_3^2) r_1^2.$$

Теперь из последнего члена равенства (8.41) с помощью равенств (8.37) получим

$$\frac{r_2 \cos\psi - r_1}{\Delta} = \frac{\sin\varphi_1 \cos\psi - \sin\varphi_2}{\sin\psi},$$

но

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \psi = 180°,$$

и, следовательно,

$$\sin\varphi_2 = \sin(\varphi_1 + \psi),$$

а поэтому предыдущая дробь оказывается равной $-\cos\varphi_1$.

Теперь уравнение (8.41) приводится к виду

$$\ddot{r}_1 - (\omega_2^2 + \omega_3^2)\cdot r_1 = -(m_0F_{10} + m_1F_{01}) - m_2F_{02}\cdot\cos\psi - m_2F_{12}\cdot\cos\varphi_1.$$

Это есть первое из уравнений в переменных Ляпунова.

Помножая затем уравнения (8.31) соответственно на 0, $-z_1$, $+y_1$, потом на $+z_1$, 0, $-x_1$ и, наконец, на $-y_1$, $+x_1$, 0 и складывая каждый раз результаты, мы получим три следующих равенства:

$$\frac{d}{dt}(y_1\dot{z}_1 - z_1\dot{y}_1) = m_2(y_1z_2 - z_1y_2)\left(\frac{F_{12}}{\Delta} - \frac{F_{02}}{r_2}\right),$$

$$\frac{d}{dt}(z_1\dot{x}_1 - x_1\dot{z}_1) = m_2(z_1x_2 - x_1z_2)\left(\frac{F_{12}}{\Delta} - \frac{F_{02}}{r_2}\right),$$

$$\frac{d}{dt}(x_1\dot{y}_1 - y_1\dot{x}_1) = m_2(x_1y_2 - y_1x_2)\left(\frac{F_{12}}{\Delta} - \frac{F_{02}}{r_2}\right).$$

Но из формул (8.35) и (8.38′) мы имеем

$$y_1\dot{z}_1 - z_1\dot{y}_1 = r_1^2(a_{13}\omega_3 + a_{12}\omega_2), \quad y_1z_2 - z_1y_2 = a_{13}r_1r_2\sin\psi,$$

$$z_1\dot{x}_1 - x_1\dot{z}_1 = r_1^2(a_{23}\omega_3 + a_{22}\omega_2), \quad z_1x_2 - x_1z_2 = a_{23}r_1r_2\sin\psi,$$

$$x_1\dot{y}_1 - y_1\dot{x}_1 = r_1^2(a_{33}\omega_3 + a_{32}\omega_2), \quad x_1y_2 - y_1x_2 = a_{33}r_1r_2\sin\psi,$$

вследствие чего предыдущие равенства приведутся к виду

$$a_{13}\frac{d(\omega_3r_1^2)}{dt} + a_{12}\frac{d(\omega_2r_1^2)}{dt} + (\dot{a}_{13}\omega_3 + \dot{a}_{12}\omega_2)r_1^2 = m_2a_{13}\left(\frac{F_{12}}{\Delta} - \frac{F_{02}}{r_2}\right),$$

$$a_{23}\frac{d(\omega_3r_1^2)}{dt} + a_{22}\frac{d(\omega_2r_1^2)}{dt} + (\dot{a}_{23}\omega_3 + \dot{a}_{22}\omega_2)r_1^2 = m_2a_{23}\left(\frac{F_{12}}{\Delta} - \frac{F_{02}}{r_2}\right),$$

$$a_{33}\frac{d(\omega_3r_1^2)}{dt} + a_{32}\frac{d(\omega_2r_1^2)}{dt} + (\dot{a}_{33}\omega_3 + \dot{a}_{32}\omega_2)r_1^2 = m_2a_{33}\left(\frac{F_{12}}{\Delta} - \frac{F_{02}}{r_2}\right).$$

Для исключения направляющих косинусов помножим последние уравнения соответственно на a_{13}, a_{23}, a_{33} и сложим, а затем умножим на a_{12}, a_{22}, a_{32} и сложим. Используя еще формулы (8.37) и свойства направляющих косинусов, мы получим в результате следующие два уравнения в переменных Ляпунова:

$$\frac{1}{r_1}\frac{d(r_1^2\omega_3)}{dt} + r_1\omega_1\omega_2 + m_2F_{02}\cdot\sin\psi - m_2F_{12}\cdot\sin\varphi_1 = 0,$$

$$\frac{1}{r_1}\frac{d(r_1^2\omega_2)}{dt} - r_1\omega_1\omega_3 = 0.$$

Подобным же образом поступаем и с уравнениями (8.32). Мы получим еще три уравнения такого же вида. В результате мы преобразуем уравнения (8.31) и (8.32) к следующей системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{r}_1-(\omega_2^2+\omega_3^2)r_1+m_0F_{10}(t;\ r_1,\ \dot{r}_1,\ \ddot{r}_1)+m_1F_{01}(t;\ r_1,\ \dot{r}_1,\ \ddot{r}_1)+\\
&\qquad+m_2F_{02}(t;\ r_2,\ \dot{r}_2,\ \ddot{r}_2)\cos\psi+m_2F_{12}(t;\ \Delta,\ \dot{\Delta},\ \ddot{\Delta})\cos\varphi_1=0,\\
&\frac{1}{r_1}\frac{d(r_1^2\omega_3)}{dt}+r_1\omega_1\omega_2+m_2F_{02}(t;\ r_2,\ \dot{r}_2,\ \ddot{r}_2)\sin\psi-\\
&\qquad\qquad-m_2F_{12}(t;\ \Delta,\ \dot{\Delta},\ \ddot{\Delta})\sin\varphi_1=0,\\
&\qquad\frac{1}{r_1}\frac{d(r_1^2\omega_2)}{dt}-r_1\omega_1\omega_3=0,
\end{aligned}\right\}\tag{8.42}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{r}_2-(\omega_2'^2+\omega_3'^2)r_2+m_0F_{20}(t;\ r_2,\ \dot{r}_2,\ \ddot{r}_2)+m_2F_{02}(t;\ r_2,\ \dot{r}_2,\ \ddot{r}_2)+\\
&\qquad+m_1F_{01}(t;\ r_1,\ \dot{r}_1,\ \ddot{r}_1)\cos\psi+m_1F_{21}(t;\ \Delta,\ \dot{\Delta},\ \ddot{\Delta})\cos\varphi_2=0,\\
&\frac{1}{r_2}\frac{d(r_2^2\omega_3')}{dt}+r_2\omega_1'\omega_2'-m_1F_{01}(t;\ r_1,\ \dot{r}_1,\ \ddot{r}_1)\sin\psi+\\
&\qquad\qquad+m_1F_{21}(t;\ \Delta,\ \dot{\Delta},\ \ddot{\Delta})\sin\varphi_2=0,\\
&\qquad\frac{1}{r_2}\frac{d(r_2^2\omega_2')}{di}-r_2\omega_1'\omega_3'=0.
\end{aligned}\right\}\tag{8.43}$$

4. Если все действующие силы подчиняются одному и тому же закону, т. е. если $F_{ij}=F$, то уравнения движения в этом случае получатся из уравнений (8.42) и (8.43) просто путем отбрасывания нижних индексов у функций F_{ij}. Если при этом силы зависят только от соответствующих расстояний и имеет место третья аксиома Ньютона, то получим уравнения, которые рассматривал Ляпунов и которые напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2r_1}{dt^2}-(\omega_2^2+\omega_3^2)r_1+(m_0+m_1)F(r_1)+\\
&\qquad\qquad+m_2F(r_2)\cos\psi+m_2F(\Delta)\cos\varphi_1=0,\\
&\frac{1}{r_1}\frac{d(r_1^2\omega_3)}{dt}+r_1\omega_1\omega_2+m_2F(r_2)\cos\psi-m_2F(\Delta)\sin\varphi_1=0,\\
&\qquad\frac{1}{r_1}\frac{d(r_1^2\omega_2)}{dt}-r_1\omega_1\omega_3=0,
\end{aligned}\right\}\tag{8.42'}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2r_2}{dt^2}-\left(\omega_2'^2+\omega_3'^2\right)r_2+(m_0+m_2)F(r_2)+\\
&\qquad\qquad+m_1F(r_1)\cos\psi+m_1F(\Delta)\cos\varphi_2=0,\\
&\frac{1}{r_2}\frac{d\left(r_2^2\omega_3'\right)}{dt}+r_2\omega_1'\omega_2'+m_1F(\Delta)\sin\varphi_2-m_1F(r_1)\sin\psi=0,\\
&\qquad\qquad\frac{1}{r_2}\frac{d\left(r_2^2\omega_2'\right)}{dt}-r_2\omega_1'\omega_3'=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(8.43')$$

Если мы допустим теперь, что точка M_2 является пассивно действующей, то

$$F_{02}=F_{12}=0$$

и уравнения (8.42) и (8.43) примут вид

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2r_1}{dt^2}-\left(\omega_2^2+\omega_3^2\right)r_1+F\left(t;\ r_1,\ \dot r_1,\ \ddot r_1\right)=0,\\
&\frac{d\left(r_1^2\omega_3\right)}{dt}+r_1^2\omega_1\omega_2=0,\quad \frac{d\left(r_1^2\omega_2\right)}{dt}-r_1^2\omega_1\omega_3=0,
\end{aligned}\right\}\qquad(8.42'')$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2r_2}{dt^2}-\left(\omega_2'^2+\omega_3'^2\right)r_2+m_0F_{20}\left(t;\ r_2,\ \dot r_2,\ \ddot r_2\right)+\\
&+m_1F_{01}\left(t;\ r_1,\ \dot r,\ \ddot r_1\right)\cos\psi+m_1F_{21}\left(t;\ \Delta,\ \dot\Delta,\ \ddot\Delta\right)\cos\varphi_2=0,\\
&\frac{1}{r_2}\frac{d\left(r_2^2\omega_3'\right)}{dt}+r_2\omega_1'\omega_2'-m_1F_{01}\left(t;\ r_1,\ \dot r_1,\ \ddot r_1\right)\sin\psi+\\
&\qquad\qquad+m_1F_{21}\left(t;\ \Delta,\ \dot\Delta,\ \ddot\Delta\right)\sin\varphi_2=0,\\
&\qquad\qquad\frac{1}{r_2}\frac{d\left(r_2^2\omega_2'\right)}{dt}-r_2\omega_1'\omega_3'=0,
\end{aligned}\right\}\qquad(8.43'')$$

причем в (8.42″) для сокращения положено

$$F\left(t;\ r_1,\ \dot r_1,\ \ddot r_1\right)=m_0F_{10}\left(t;\ r_1,\ \dot r_1,\ \ddot r_1\right)+m_1F_{01}\left(t;\ r_1,\ \dot r_1,\ \ddot r_1\right).$$

Эти уравнения являются уравнениями ограниченной задачи в переменных Ляпунова и распадаются на две системы, из которых система (8.42″) определяет движение точки M_1 относительно M_0 так, как будто бы точка M_2 не существует, а система (8.43″) определяет движение точки M_2 под действием точек M_0 и M_1, причем движение последней предполагается известным.

Из двух последних уравнений системы (8.42″) выводим без труда первый интеграл

$$r_1^4\left(\omega_2^2+\omega_3^2\right)=c^2,\qquad(8.44)$$

вследствие чего первое из уравнений (8.42″) приводится к уравнению второго порядка относительно радиуса-вектора точки M_1

$$\frac{d^2r_1}{dt^2} - \frac{c^2}{r_1^3} + F(t;\ r_1,\ \dot{r}_1,\ \ddot{r}_1) = 0. \qquad (8.44')$$

Далее, замечая, что точка M_1 находится под действием центральной силы, направленной по прямой (M_0M_1), заключаем отсюда, что орбита точки M_1 есть плоская кривая. Плоскость, в которой происходит движение точки M_1, мы можем взять за основную координатную плоскость, а тогда имеем

$$\Phi = 0, \qquad \frac{d\Phi}{dt} = 0,$$

и, следовательно,

$$\omega_1 = \frac{dI}{dt}, \quad \omega_2 = \sin I \cdot \frac{d\Omega}{dt}, \quad \omega_3 = \cos I \cdot \frac{d\Omega}{dt}.$$

Поэтому интеграл (8.44) есть интеграл площадей, который напишем, полагая $\Omega = v$, в обычном виде:

$$r_1^2 \frac{dv}{dt} = c. \qquad (8.44'')$$

§ 3. Частные решения задачи трех тел

Мы видели во второй части этой книги, что общая ограниченная задача трех тел может допускать простые частные решения, называемые *либрационными*, в которых пассивная точка образует с активными точками равносторонний треугольник (*лагранжевы* решения (L_4) и (L_5)) или лежит на одной прямой, проходящей через активные точки (*эйлеровы* решения (L_1), (L_2), (L_3)).

Мы покажем теперь, что аналогичные решения может допускать и общая задача трех тел (материальных точек!), если законы действующих сил удовлетворяют некоторым условиям.

1. Рассмотрим уравнения задачи трех тел в переменных Ляпунова, т. е. уравнения (8.42) и (8.43). Мы знаем из многих курсов по небесной механике, что в случае, когда все действующие силы подчиняются закону Ньютона, уравнения движения допускают всегда частное решение, в котором все три тела образуют равносторонний треугольник, вращающийся с постоянной угловой скоростью в некоторой неизменной плоскости вокруг одной из его вершин или, что то же, вокруг общего центра масс.

Допустим, что уравнения (8.42) и (8.43) также допускают аналогичное решение. Тогда этим уравнениям должны