вследствие чего первое из уравнений (8.42″) приводится к уравнению второго порядка относительно радиуса-вектора точки M_1

$$\frac{d^2r_1}{dt^2} - \frac{c^2}{r_1^3} + F(t;\ r_1,\ \dot{r}_1,\ \ddot{r}_1) = 0. \qquad (8.44')$$

Далее, замечая, что точка M_1 находится под действием центральной силы, направленной по прямой (M_0M_1), заключаем отсюда, что орбита точки M_1 есть плоская кривая. Плоскость, в которой происходит движение точки M_1, мы можем взять за основную координатную плоскость, а тогда имеем

$$\Phi = 0, \qquad \frac{d\Phi}{dt} = 0,$$

и, следовательно,

$$\omega_1 = \frac{dI}{dt}, \quad \omega_2 = \sin I \cdot \frac{d\Omega}{dt}, \quad \omega_3 = \cos I \cdot \frac{d\Omega}{dt}.$$

Поэтому интеграл (8.44) есть интеграл площадей, который напишем, полагая $\Omega = v$, в обычном виде:

$$r_1^2 \frac{dv}{dt} = c. \qquad (8.44'')$$

§ 3. Частные решения задачи трех тел

Мы видели во второй части этой книги, что общая ограниченная задача трех тел может допускать простые частные решения, называемые *либрационными*, в которых пассивная точка образует с активными точками равносторонний треугольник (*лагранжевы* решения (L_4) и (L_5)) или лежит на одной прямой, проходящей через активные точки (*эйлеровы* решения (L_1), (L_2), (L_3)).

Мы покажем теперь, что аналогичные решения может допускать и общая задача трех тел (материальных точек!), если законы действующих сил удовлетворяют некоторым условиям.

1. Рассмотрим уравнения задачи трех тел в переменных Ляпунова, т. е. уравнения (8.42) и (8.43). Мы знаем из многих курсов по небесной механике, что в случае, когда все действующие силы подчиняются закону Ньютона, уравнения движения допускают всегда частное решение, в котором все три тела образуют равносторонний треугольник, вращающийся с постоянной угловой скоростью в некоторой неизменной плоскости вокруг одной из его вершин или, что то же, вокруг общего центра масс.

Допустим, что уравнения (8.42) и (8.43) также допускают аналогичное решение. Тогда этим уравнениям должны

удовлетворять следующие значения переменных Ляпунова:

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 = \omega_2 = \omega_1' = \omega_2' = 0, \\ \psi = \varphi_1 = \varphi_2 = 60^\circ, \\ r_1 = r_2 = \Delta = \rho(t), \\ \omega_3 = \omega_3' = \omega(t), \end{aligned}\right\} \qquad (L)$$

и, как следует из (8.38),

$$\Omega = \text{const}, \quad I = \text{const}, \quad \Phi = \omega(t).$$

Если уравнения движения действительно допускают решения (L), то (8.42) и (8.43) должны приводиться к следующим тождествам:

$$\ddot{\rho} - \rho\omega^2 + m_0 F_{10}(t;\ \rho,\ \dot{\rho},\ \ddot{\rho}) + m_1 F_{01}(t;\ \rho,\ \dot{\rho},\ \ddot{\rho}) + \\ + \frac{1}{2} m_2 F_{02}(t;\ \rho,\ \dot{\rho},\ \ddot{\rho}) + \frac{1}{2} m_2 F_{12}(t;\ \rho,\ \dot{\rho},\ \ddot{\rho}) \equiv 0,$$

$$\ddot{\rho} - \rho\omega^2 + m_0 F_{20}(t;\ \rho,\ \dot{\rho},\ \ddot{\rho}) + m_2 F_{02}(t;\ \rho,\ \dot{\rho},\ \ddot{\rho}) + \\ + \frac{1}{2} m_1 F_{01}(t;\ \rho,\ \dot{\rho},\ \ddot{\rho}) + \frac{1}{2} m_1 F_{21}(t;\ \rho,\ \dot{\rho},\ \ddot{\rho}) \equiv 0,$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d(\rho^2\omega)}{dt} + \frac{\sqrt{3}}{2} m_2 F_{02}(t;\ \rho,\ \dot{\rho},\ \ddot{\rho}) - \frac{\sqrt{3}}{2} m_2 F_{12}(t;\ \rho,\ \dot{\rho},\ \ddot{\rho}) \equiv 0,$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d(\rho^2\omega)}{dt} + \frac{\sqrt{3}}{2} m_1 F_{21}(t;\ \rho,\ \dot{\rho},\ \ddot{\rho}) - \frac{\sqrt{3}}{2} m_1 F_{01}(t;\ \rho,\ \dot{\rho},\ \ddot{\rho}) \equiv 0.$$

Третьи уравнения систем (8.42) и (8.43) решениями (L) удовлетворяются сами собой.

Рассматривая четыре написанных равенства, мы видим, что для того чтобы они были совместны и определяли две остающиеся неизвестными функции $\rho(t)$ и $\omega(t)$, необходимо должно быть

$$2m_0 [F_{10}(t;\ \rho,\ \dot{\rho},\ \ddot{\rho}) - F_{20}(t;\ \rho,\ \dot{\rho},\ \ddot{\rho})] + m_1 [F_{01}(t;\ \rho,\ \dot{\rho},\ \ddot{\rho}) - \\ - F_{21}(t;\ \rho,\ \dot{\rho},\ \ddot{\rho})] + m_2 [F_{12}(t;\ \rho,\ \dot{\rho},\ \ddot{\rho}) - F_{02}(t;\ \rho,\ \dot{\rho},\ \ddot{\rho})] \equiv 0,$$

$$m_1 [F_{21}(t;\ \rho,\ \dot{\rho},\ \ddot{\rho}) - F_{01}(t;\ \rho,\ \dot{\rho},\ \ddot{\rho})] \equiv \\ \equiv m_2 [F_{02}(t;\ \rho,\ \dot{\rho},\ \ddot{\rho}) - F_{12}(t;\ \rho,\ \dot{\rho},\ \ddot{\rho})].$$

Так как массы m_0, m_1, m_2 совершенно произвольны, а функции F_{ij} от масс не зависят, то эти тождества могут иметь место только при выполнении следующих условий:

$$\left.\begin{aligned} F_{10}(t;\ \rho,\ \dot{\rho},\ \ddot{\rho}) = F_{20}(t;\ \rho,\ \dot{\rho},\ \ddot{\rho}), \\ F_{01}(t;\ \rho,\ \dot{\rho},\ \ddot{\rho}) = F_{21}(t;\ \rho,\ \dot{\rho},\ \ddot{\rho}), \\ F_{12}(t;\ \rho,\ \dot{\rho},\ \ddot{\rho}) = F_{02}(t;\ \rho,\ \dot{\rho},\ \ddot{\rho}). \end{aligned}\right\} \qquad (8.45)$$

Условия (8.45) являются необходимыми и достаточными для того, чтобы уравнения (8.42) и (8.43) допускали решение (L), и имеют простой механический смысл. Действительно, условия (8.45) показывают, что рассматриваемая общая задача трех тел может иметь треугольные лагранжевы решения только в том случае, когда каждая из точек M_i ($i = 0, 1, 2$) действует на каждую из двух других точек по одному и тому же закону (притяжения или отталкивания), так что мы имеем дело в самом общем случае не с шестью, а только с тремя разными законами сил.

Если хотя бы одно из условий (8.45) не выполняется, то задача не допускает лагранжева решения. Такой случай представляется, например, в задаче двух неподвижных центров, характеризуемой условиями

$$F_{01} = F_{10} = 0, \quad F_{02} = F_{12} = 0, \quad F_{20} \neq F_{21} \neq 0,$$

и к которой относится, в частности, классическая задача двух неподвижных центров. В этой задаче точки M_0 и M_1 вовсе не действуют друг на друга и могут считаться неподвижными, но действуют, и притом вообще различным образом, на точку M_2 масса которой $m_2 \neq 0$. Тогда из условий (8.45) выполняется только последнее, а поэтому всякая задача с двумя неподвижными центрами заведомо не имеет лагранжевых решений.

Если точка M_2 является пассивно действующей, а две остальные — активными, т. е. если $F_{12} = F_{02} = 0$, то последнее из условий (8.45) выполняется само собой и для существования лагранжева решения в ограниченной задаче мы имеем только два первые из условий (8.45), что и было показано во второй части книги.

Примером задачи, в которой условия (8.45) заведомо выполняются, может служить задача, в которой все функции F_{ij} одинаковы, т. е. когда в рассматриваемой системе трех материальных точек мы имеем один-единственный закон, зависящий произвольным образом от времени, взаимного расстояния и его двух первых производных.

2. Если условия (8.45) выполняются, то начальные условия всегда можно выбрать таким образом, что точки M_1 и M_2 будут описывать относительно точки M_0, в неизменной плоскости, подобные орбиты, образуя вместе с M_0 равносторонний треугольник.

Движения точек M_1 и M_2 определятся тогда следующими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\rho} - \rho\omega^2 + R(t;\ \rho,\ \dot{\rho},\ \ddot{\rho}) = 0, \\ \rho^2\omega = c, \end{aligned}\right\} \tag{8.46}$$

где c — произвольная постоянная (постоянная площадей), а функция R определяется формулой

$$R = m_0F_{10} + m_1F_{01} + m_2F_{12}. \tag{8.46'}$$

Уравнения (8.46) можно, очевидно, рассматривать как уравнения движения материальной точки единичной массы под действием центральной силы, источником которой является точка M_0. Эта задача была рассмотрена также во второй части.

Заметим, что всякому решению системы (8.46) соответствует два треугольных лагранжевых решения, соответствующие двум равносторонним треугольникам с общим основанием $\overline{M_0M_1}$.

Пусть v_1 и v_2 — углы, образуемые радиусами-векторами r_1 и r_2 с каким-либо неизменным направлением в плоскости треугольника $(M_0M_1M_2)$, например, с линией узлов этой неизменной плоскости на плоскости (xy). Тогда в каждом из двух лагранжевых решений, которые обозначим символами (L_4) и (L_5), углы v_1 и v_2 определятся формулами

$$v_1 = \Phi, \qquad v_2 = \Phi + 60^\circ \tag{L_4}$$

и

$$v_1 = \Phi, \qquad v_2 = \Phi - 60^\circ, \tag{L_5}$$

где

$$\Phi = \int_{t_0}^{t} \omega(t)\,dt + \Phi_0.$$

Функция $\omega(t)$, определяющая угловую скорость вращения изменяющегося равностороннего треугольника $(M_0M_1M_2)$ вокруг его вершины, будет известна, если найдена функция $\rho(t)$, являющаяся решением дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} - \frac{c^2}{\rho^3} + R(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho) = 0, \tag{8.46''}$$

которое в некоторых случаях, как было показано во второй части книги, интегрируется в квадратурах.

Особенно важным случаем является тот, когда среди решений уравнения (8.46″) имеются постоянные решения, соответствующие случаю, когда треугольник $(M_0M_1M_2)$ является неизменным равносторонним треугольником.

Это будет иметь место всегда в том случае, когда функция R при некотором постоянном значении $\rho = a$ приводится к положительной постоянной, т. е. когда мы имеем

$$R(t;\ a,\ 0,\ 0) = \text{const} > 0.$$

В этом случае уравнение (8.46″) удовлетворяется при всяком значении t, если $\rho = a$, и задача имеет круговое лагранжево решение, в котором точки M_1 и M_2 описывают во-

круг точки M_0 одну и ту же окружность радиуса a с центром в M_0 и с постоянной угловой скоростью, определяемой формулой

$$\omega = \frac{c}{a^2} = \pm\sqrt{\frac{1}{a}R(t;\ a,\ 0,\ 0)}\ .$$

Если функция R не содержит явно времени t, то круговое решение будет существовать для всякого значения постоянной a, для которого $R(a, 0, 0) > 0$.

Формула (8.46′) показывает, что для выполнения неравенства $R > 0$ необходимо, чтобы все три функции F_{10}, F_{01}, F_{12} приводились при $\rho = a$ к некоторым постоянным и чтобы по крайней мере одна из этих постоянных была положительной, т. е. чтобы из трех различных законов сил по крайней мере один был законом притяжения.

Таким образом, если все силы, управляющие движением системы трех тел-точек, являются силами отталкивания, то задача заведомо не допускает кругового лагранжева решения.

Примечание. Мы рассматривали движение двух точек M_1 и M_2 относительно точки M_0. В лагранжевом решении треугольник $(M_0M_1M_2)$ (переменный или постоянный) вращается вокруг вершины M_0.

Но совершенно так же можно рассматривать движения всех трех точек относительно общего центра масс G. Тогда в лагранжевом решении треугольник $(M_0M_1M_2)$ будет вращаться вокруг точки G, и точки M_0, M_1, M_2 будут описывать в плоскости треугольника подобные орбиты.

3. Мы видели во второй части книги, что ограниченная задача трех тел-точек в частном случае, когда две из трех масс одинаковы, может допускать еще решение, в котором треугольник $(M_0M_1M_2)$ остается всегда равнобедренным, основанием которого является отрезок, соединяющий активные массы.

Посмотрим теперь, в каких случаях общая задача трех материальных точек может допускать аналогичное решение.

Пусть массы точек M_1 и M_2 одинаковы, так что $m_1 = m_2 \neq m_0$, и установим условия, при которых точка M_0 является вершиной равнобедренного треугольника, двумя другими вершинами которого оказываются точки M_1 и M_2.

Если такое решение существует, то уравнения (8.42) и (8.43) должны допускать частное решение, в котором

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 = \omega_2 = \omega_1' = \omega_2' &= 0, \\ r_1 = r_2 &= \rho(t), \\ \Delta &= 2\rho\sin\frac{\psi}{2}, \\ \varphi_2 &= \varphi_1. \end{aligned}\right\} \qquad (L')$$

Рассматривая уравнения (8.42) и (8.43), мы убеждаемся, что оба третьих уравнения этих систем удовлетворяются тождественно при $\omega_1 = \omega_2 = \omega_1' = \omega_2'$. Первые уравнения этих систем будут тождественными при выполнении условия

$$\begin{aligned} m_0F_{10}(t;\ r_1,\ \dot r_1,\ \ddot r_1) + m_1F_{01}(t;\ r_1,\ \dot r_1,\ \ddot r_1) + \\ + m_1F_{02}(t;\ r_1,\ \dot r_1,\ \ddot r_1)\cos\psi + m_1F_{12}(t;\ \Delta,\ \dot\Delta,\ \ddot\Delta)\cos\varphi_1 = \\ = m_0F_{20}(t;\ r_1,\ \dot r_1,\ \ddot r_1) + m_1F_{02}(t;\ r_1,\ \dot r_1,\ \ddot r_1) + \\ + m_1F_{01}(t;\ r_1,\ \dot r_1,\ \ddot r_1)\cos\psi + m_1F_{21}(t;\ \Delta,\ \dot\Delta,\ \ddot\Delta)\cos\varphi_1. \end{aligned} \tag{8.47}$$

Условие (8.47) будет выполнено при любых значениях величин r_1, φ_1 и ψ, если законы действующих сил таковы, что мы имеем

$$\left.\begin{aligned} F_{10}(t;\ r_1,\ \dot r_1,\ \ddot r_1) = F_{20}(t;\ r_1,\ \dot r_1,\ \ddot r_1), \\ F_{01}(t;\ r_1,\ \dot r_1,\ \ddot r_1) = F_{02}(t;\ r_1,\ \dot r_1,\ \ddot r_1), \\ F_{12}(t;\ \Delta,\ \dot\Delta,\ \ddot\Delta) = F_{21}(t;\ \Delta,\ \dot\Delta,\ \ddot\Delta). \end{aligned}\right\} \tag{8.47'}$$

При этих же условиях вторые уравнения систем (8.42) и (8.43) будут совпадать только в том случае, если

$$\omega_3' = -\omega_3 = \omega(t).$$

Условия (8.47′) означают, что масса M_0 должна действовать на массы точек M_1 и M_2 по общему закону, что точки M_1 и M_2 должны также действовать на M_0 по общему закону, вообще отличному от предыдущего, и что действия точек M_1 и M_2 друг на друга должны быть одинаковы.

Условия (8.47′), разумеется, выполняются, если все функции F_{ij} одинаковы, т. е. если движение трех тел-точек управляется одним общим законом, например, законом Ньютона, или вообще законом, зависящим только от взаимных расстояний между каждыми двумя точками.

Уравнения (8.42) и (8.43) приводятся при условиях (8.47′) к следующим двум уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} \ddot\rho - \omega^2\rho + R = 0, \\ \frac{d(\rho^2\omega)}{dt} + \rho\Omega = 0, \end{aligned}\right\} \tag{8.48}$$

где вследствие $\varphi_1 + \varphi_2 + \psi = 2\varphi_1 + \psi = 180°$

$$\cos\varphi_1 = \sin\frac{\psi}{2},\quad \sin\varphi_1 = \cos\frac{\psi}{2},\quad \psi = 2\bar\psi,$$

и вследствие (8.40)

$$\frac{d\bar\psi}{dt} = \omega.$$

Функции R и Ω определяются вследствие условий (8.47′) следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} R &= m_0F_{10}(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho) + 2m_1F_{01}(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho)\cos^2\bar\psi + \\ &\qquad + m_1F_{12}(t;\ \Delta,\ \dot\Delta,\ \ddot\Delta)\sin\bar\psi, \\ \Omega &= m_1F_{01}(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho)\sin 2\bar\psi - m_1F_{12}(t;\ \Delta,\ \dot\Delta,\ \ddot\Delta)\cos\bar\psi, \\ \Delta &= 2\rho\sin\bar\psi, \end{aligned}\right\} \tag{8.49}$$

и являются функциями двух переменных ρ и $\bar\psi$ и их производных первого и второго порядка.

Поэтому решения, определяющие равнобедренный треугольник с вершиной в точке M_0 удобнее написать в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\bar\psi}{dt}\right)^2 + R = 0, \\ \frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{d\bar\psi}{dt}\right) + \rho\Omega = 0, \end{aligned}\right\} \tag{8.50}$$

и эти уравнения составляют систему двух уравнений второго порядка с двумя искомыми функциями ρ и $\bar\psi$, которые полностью определяют равнобедренный треугольник.

Уравнения (8.50) показывают, что равнобедренные треугольные решения могут существовать и что при этом стороны треугольника и угол при вершине изменяются одновременно и вдобавок этот изменяющийся треугольник вращается вокруг вершины M_0, оставаясь всегда в одной плоскости, образованной начальными радиусами-векторами.

В частности, угол при вершине ψ может оставаться постоянным, и тогда треугольник не вращается, но стороны его непрерывно изменяются.

Наоборот, может случиться, что равные стороны остаются постоянными, а угол ψ и угловая скорость ω изменяются.

Например, пусть все законы сил являются одним и тем же степенным законом, так что

$$F_{01} = F_{10} = f\cdot\rho^k, \qquad F_{12} = f\cdot\Delta^k = f\cdot 2^k\cdot\rho^k\cdot\sin^k\bar\psi.$$

Тогда, если положить $f = 1$, $m_2 + 2m_1 = 1$, получим из (8.50) следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\bar\psi}{dt}\right)^2 + \rho^k(1 - 2m_1\sin^2\bar\psi + 2^km_1\sin^{k+1}\bar\psi) = 0, \\ \frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{d\bar\psi}{dt}\right) + m_1\rho^{k+1}\cdot\sin 2\bar\psi\,(1 - 2^{k-1}\sin^{k-1}\bar\psi) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8.50′}$$

Отсюда следует, что $\bar{\psi}$ может быть постоянным или когда $\sin 2\bar{\psi} = 0$, но тогда $\psi = 0$ или $180°$ и точки M_0, M_1, M_2 не образуют треугольника, или когда $\sin\bar{\psi} = \frac{1}{2}$, т. е. $\bar{\psi} = 30°$ и $\psi = 60°$, т. е. треугольник остается равносторонним. Сторона ρ определяется в этом случае уравнением

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} + \frac{3}{2} m_1 \cdot \rho^k = 0,$$

которое может быть проинтегрировано в квадратурах.

Допустим, что в уравнениях (8.50′) сторона ρ остается постоянной, которую примем для простоты равной единице.

Тогда угол $\bar{\psi}$ должен удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2\bar{\psi}}{dt^2} - \operatorname{ctg}\bar{\psi} \cdot \left(\frac{d\bar{\psi}}{dt}\right)^2 + (2\operatorname{ctg}\bar{\psi} - 3m_1 \sin 2\bar{\psi}) = 0.$$

В этом случае треугольник остается равнобедренным, но с переменным углом при вершине M_0. Предыдущее уравнение допускает и постоянное решение, в котором угол $\bar{\psi}$ определяется из условия

$$\sin^2\bar{\psi} = \frac{1}{3m_1}.$$

При других законах сил могут, конечно, представиться и разные другие случаи.

4. Посмотрим теперь, при каких условиях рассматриваемая (обобщенная) задача трех тел-точек может допускать прямолинейные эйлеровы решения, в которых все три точки всегда остаются на одной прямой, вращающейся вокруг точки M_0, а отношения между расстояниями этих точек остаются постоянными.

Покажем, что такие решения могут существовать и притом не только при выполнении условий (8.45), которые необходимы для существования лагранжевых решений, но и тогда, когда все шесть функций F_{ij} совершенно различны.

Для этого убедимся, что уравнения (8.42) и (8.43) могут быть удовлетворены при

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 = \omega_2 = \omega_1' = \omega_2' = 0, \\ \omega_3 = \omega_3' = \omega(t), \\ r_1 = \rho, \quad r_2 = \alpha\rho \end{aligned}\right\} \qquad (E)$$

(α — положительная постоянная), а один из трех углов треугольника ($M_0M_1M_2$) равен $180°$ (два других, конечно, равны нулю).

Поэтому если наша задача допускает такие прямолинейные решения, то таких решений должно быть не меньше трех, в зависимости от того, какой из трех углов треугольника равен 180°.

Обозначим так же, как и во второй части, эти три возможные эйлеровы решения (L_1), (L_2), (L_3), характеризуя их при выполнении (E) следующими значениями остальных переменных:

$$\left.\begin{aligned} \psi = 180^\circ, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \\ \Delta_1 = (1+\alpha)\rho, \end{aligned}\right\} \qquad (L_1)$$

$$\left.\begin{aligned} \psi = 0, \quad \varphi_1 = 180^\circ, \quad \varphi_2 = 0, \\ \Delta_2 = (\alpha - 1)\rho, \quad \alpha > 1, \end{aligned}\right\} \qquad (L_2)$$

$$\left.\begin{aligned} \psi = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 180^\circ, \\ \Delta_3 = (1-\alpha)\rho, \quad \alpha < 1. \end{aligned}\right\} \qquad (L_3)$$

Задача будет допускать прямолинейные решения, если возможно определить функции ρ, ω и постоянную $\alpha > 0$ так, чтобы все уравнения (8.42) и (8.43) были удовлетворены.

Для этого мы должны, очевидно, иметь $(i = 1, 2, 3)$

$$\left.\begin{aligned} \rho^2\omega = c = \text{const}, \\ \ddot\rho - \rho\omega^2 + R_i(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho;\ \alpha) = 0, \\ \alpha\ddot\rho - \alpha\rho\omega^2 + R_i^*(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho;\ \alpha) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (8.51)$$

где функции R_i и R_i^* для каждого из прямолинейных решений (L_i) имеют следующие значения $(i = 1, 2, 3)$:

$$\left.\begin{aligned} R_i(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho;\ \alpha) = m_0F_{10}(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho) + m_1F_{01}(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho) \mp \\ \mp m_2F_{02}(t;\ \alpha\rho,\ \alpha\dot\rho,\ \alpha\ddot\rho) + (-1)^{i-1} m_2F_2(t;\ \Delta_i,\ \dot\Delta_i,\ \ddot\Delta_i), \\ R_i^*(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho;\ \alpha) = m_0F_{20}(t;\ \alpha\rho,\ \alpha\dot\rho,\ \alpha\ddot\rho) + \\ + m_2F_{02}(t;\ \alpha\rho,\ \alpha\dot\rho,\ \alpha\ddot\rho) \mp \\ \mp m_1F_{01}(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho) \mp (-1)^{i-1} m_1F_{21}(t;\ \Delta_i,\ \dot\Delta_i,\ \ddot\Delta_i), \end{aligned}\right\} \qquad (8.52)$$

причем в каждом из этих выражений верхний знак («—») нужно взять для решения (L_1), а нижний («+») для (L_2) и (L_3).

В каждом из эйлеровых решений (L_i) функция ρ должна удовлетворять одновременно двум уравнениям, которые поэтому должны быть тождественными, а следовательно, условием существования прямолинейного решения (L_i) должно быть следующее равенство:

$$\alpha R_i(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho;\ \alpha) = R_i^*(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho;\ \alpha), \qquad (8.53)$$

которое должно выполняться для всякого значения t.

Для того чтобы из уравнения (8.53) можно было определить положительную постоянную α, определяющую расположение трех точек на вращающейся прямой, это уравнение, очевидно, не должно содержать t ни явно, ни неявно (т. е. через посредство ρ). Поэтому в самом общем случае, когда все шесть функций F_{ij} совершенно произвольны, наша задача не допускает прямолинейных решений, аналогичных эйлеровым решениям классической задачи трех тел-точек (см. нашу книгу «Небесная механика. Основные задачи и методы», изд. 3-е, 1975).

Поэтому законы действующих сил не должны зависеть от времени, а ρ должно быть величиной постоянной или должно автоматически исключиться из уравнения (8.53).

Если функция F_{ij} не содержит t, то функции (8.52) также не будут содержать время и вместо (8.53) мы будем иметь уравнение вида

$$\alpha R_i(\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho}; \alpha) = R_i^*(\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho}; \alpha), \tag{8.53'}$$

которое представляет уравнение с одной неизвестной α, если задано постоянное значение $\rho = a$, определяющее положение точки M_1 на прямой, проходящей через точку M_0.

Если найденное из уравнения (8.53′) значение α окажется положительным и отвечающим соответствующему решению (L_i), то задача имеет постоянное эйлерово решение, в котором обе точки, M_1 и M_2, описывают концентрические окружности с центром в точке M_0, с радиусами a и αa соответственно и с постоянной угловой скоростью ω, определяемой формулой

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{1}{a} R_i(a, 0, 0; \alpha)}. \tag{8.54}$$

Это круговое движение будет действительным, очевидно, только в том случае, когда выражение, стоящее под знаком корня, будет положительным.

Непостоянных (т. е. не круговых!) эйлеровых решений наша задача при произвольно заданных функциях F_{ij} не имеет.

Однако некруговые эйлеровы решения могут существовать, если функции F_{ij} обладают некоторой специальной структурой.

Действительно, пусть мы имеем

$$F_{ij}(t; \Delta_{ij}, \dot{\Delta}_{ij}, \ddot{\Delta}_{ij}) = f(t) \cdot \tilde{F}_{ij}(\Delta_{ij}, \dot{\Delta}_{ij}, \ddot{\Delta}_{ij}), \tag{8.55}$$

где $f(t)$ — общий множитель, зависящий от времени или постоянный, а все функции $\tilde{F}_{ij}$ обладают одним и тем же свойством, выражаемым формулой

$$\tilde{F}_{ij}(xz, x\dot{z}, x\ddot{z}) = \Phi_{ij}(x) \cdot \Psi(z, \dot{z}, \ddot{z}), \tag{8.55'}$$

причем второй множитель не зависит от индексов i, j и есть произвольно заданная функция указанных аргументов.

В этом случае функции R_i и R_i^* определятся следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} R_i(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho;\ \alpha) &= f(t)\cdot\Psi(\rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho)\cdot \mathrm{P}_i(\alpha),\\ R_i^*(t;\ \rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho;\ \alpha) &= f(t)\cdot\Psi(\rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho)\cdot \mathrm{P}_i^*(\alpha),\end{aligned}\right\} \tag{8.52'}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{P}_i(\alpha) &= m_0\Phi_{10}(1) + m_1\Phi_{01}(1) \mp m_2\Phi_{02}(\alpha) + (-1)^{i-1} m_2\Phi_{12}\left(\frac{\Delta_i}{\rho}\right),\\ \mathrm{P}_i^*(\alpha) &= m_0\Phi_{20}(\alpha) + m_2\Phi_{02}(\alpha) \mp m_1\Phi_{01}(1) \mp (-1)^{i} m_1\Phi_{21}\left(\frac{\Delta_i}{\rho}\right),\end{aligned}\right\} \tag{8.56}$$

с такими же знаками, как и в формулах (8.52).

Вместо (8.53) мы будем иметь теперь следующее уравнение:

$$\alpha\mathrm{P}_i(\alpha) = \mathrm{P}_i^*(\alpha) \qquad (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{8.56'}$$

которое не содержит ни t, ни ρ и из которого возможно определить нужную постоянную α.

Уравнение (8.56′) представляет собой обобщение знаменитого уравнения Эйлера, определяющего расположение трех точечных масс в прямолинейных решениях классической задачи трех тел.

Если это уравнение имеет положительный корень ($\alpha > 0$ для (L_1), $\alpha > 1$ для (L_2) и $\alpha < 1$ для (L_3)), то рассматриваемая обобщенная задача имеет соответствующее прямолинейное, непостоянное (т. е. не круговое!) решение, определяемое уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \ddot\rho - \frac{c^2}{\rho^3} + f(t)\cdot \mathrm{P}_i(\alpha)\cdot\Psi(\rho,\ \dot\rho,\ \ddot\rho) &= 0,\\ \rho^2\omega &= c,\end{aligned}\right\} \tag{8.57}$$

которые вообще не интегрируются в квадратурах.

Простейшим примером законов типа (8.55) может служить случай, когда

$$F_{ij}(t;\ \Delta_{ij},\ \dot\Delta_{ij},\ \ddot\Delta_{ij}) = f_{ij}\cdot f(t)\cdot \Delta_{ij}^n\dot\Delta_{ij}^m\ddot\Delta_{ij}^p, \tag{8.58}$$

где f_{ij} — постоянные коэффициенты пропорциональности, имеющие одинаковую размерность, $f(t)$ — безразмерная функция времени (в частности, — постоянное число), а n, m, p — заданные вещественные числа.

В этом случае

$$\widetilde F_{ij}(x\Delta_{ij},\ x\dot\Delta_{ij},\ x\ddot\Delta_{ij}) = f_{ij}x^{n+m+p}\Delta_{ij}^n\dot\Delta_{ij}^m\ddot\Delta_{ij}^p,$$

так что

$$\Phi_{ij}(x) = f_{ij}x^{n+m+p}, \quad \Psi(z, \dot{z}, \ddot{z}) = z^n\dot{z}^m\ddot{z}^p,$$

и формулы (8.56) дают функции $P_i(\alpha)$ и $P_i^*(\alpha)$, после чего можем составить для каждого из прямолинейных решений (L_i) уравнение (8.56′). Эти уравнения в данном случае являются алгебраическими и могут быть написаны следующим образом:

$$\alpha[m_0f_{10} + m_1f_{01} - m_2f_{02}\alpha^{n+m+p} + m_2f_{12}(1+\alpha)^{n+m+p}] =$$
$$= (m_0f_{20} + m_2f_{02})\alpha^{n+m+p} - m_1f_{01} + m_1f_{21}(1+\alpha)^{n+m+p}; \qquad (L_1)$$

$$\alpha[m_0f_{10} + m_1f_{01} + m_2f_{02}\alpha^{n+m+p} - m_2f_{12}(\alpha-1)^{n+m+p}] =$$
$$= (m_0f_{20} + m_2f_{02})\alpha^{n+m+p} + m_1f_{01} + m_1f_{21}(\alpha-1)^{n+m+p}; \qquad (L_2)$$

$$\alpha[m_0f_{10} + m_1f_{01} + m_2f_{02}\alpha^{n+m+p} + m_2f_{12}(1-\alpha)^{n+m+p}] =$$
$$= (m_0f_{20} + m_2f_{02})\alpha^{n+m+p} + m_1f_{01} - m_1f_{21}(1-\alpha)^{n+m+p}. \qquad (L_3)$$

Существование необходимого для каждого из решений (L_i) корня α зависит теперь от числовых значений коэффициентов f_{ij} и от числа $n+m+p$.

В простейшем случае $n+m+p=1$. Тогда каждое из предыдущих уравнений превращается в линейное, вида

$$A_i\alpha = A_i^*, \qquad (8.59)$$

где A_i и A_i^* — билинейные комбинации масс и коэффициентов пропорциональности, легко выводимые из предыдущих уравнений.

Из (8.59) следует, что для существования прямолинейных решений в рассматриваемом случае необходимо, чтобы коэффициенты A_i и A_i^* имели (для данного номера i) одинаковые знаки.

Для решения (L_1) это условие является также и достаточным, но для (L_2) и (L_3) нужно, чтобы выполнялись еще дополнительные условия

$$|A_2| < |A_2^*|, \qquad |A_3| > |A_3^*|.$$

Отметим, что могут представиться случаи, когда уравнение (8.59) вырождается в тождество. Это будет иметь место, например, в случае

$$f_{ij} = f, \quad n = 1, \quad m = p = 0.$$

Тогда каждая точка прямой, проходящей через точки M_0 и M_1, является прямолинейной точкой либрации.

Такой же случай мы отметили и для ограниченной задачи, когда все действующие силы определяются единым законом — законом Гука.

5. Рассмотрим в заключение этого параграфа случай, когда все действующие силы определяются одним-единственным степенным законом, т. е. когда

$$F_{ij} = f \cdot \Delta_{ij}^n. \tag{8.60}$$

Этот случай, так же как и случай закона Гука, является частным случаем законов вида (8.58), когда

$$f_{ij} = f, \quad f(t) = 1, \quad m = p = 0. \tag{8.60'}$$

Уравнения, определяющие постоянную α, принимают в этом случае следующий вид:

$$L_1(\alpha) = (m_0 + m_1)\alpha - m_2\alpha^{n+1} + m_2\alpha(1+\alpha)^n - m_1(1+\alpha)^n + \\ + m_1 - (m_0 + m_2)\alpha^n = 0; \tag{8.61}$$

$$L_2(\alpha) = (m_0 + m_1)\alpha + m_2\alpha^{n+1} - m_2(\alpha - 1)^n \cdot \alpha - m_1(\alpha - 1)^n - \\ - m_1 - (m_0 + m_2)\alpha^n = 0; \tag{8.61'}$$

$$L_3(\alpha) = (m_0 + m_1)\alpha + m_2\alpha^{n+1} + m_2\alpha(1-\alpha)^n + m_1(1-\alpha)^n - \\ - m_1 - (m_0 + m_2)\alpha^n = 0. \tag{8.61''}$$

Из этих равенств имеем

$$L_1(0) = 0; \quad L_2(1) = 0, \quad L_3(0) = 0.$$

Эти равенства показывают, что если показатель n есть число положительное, то точка (L_1) совпадает с точкой (M_0), точка (L_2) совпадает с точкой (M_2) и точка (L_3) также совпадает с точкой (M_2).

Таким образом, при всяком $n > 0$ задача имеет всегда три прямолинейных решения. Но задача может иметь и другие точки либрации, отличные от очевидных указанных, примером чего служит отмеченный уже случай закона Гука, когда всякая точка прямой, проходящей через (M_0) и (M_2), дает решение задачи.

Если $n \neq 1$, то нужно тщательно исследовать написанные выше уравнения, что представляет нелегкую алгебраическую задачу, рассмотрение которой мы производить не будем.

Пусть теперь показатель степени закона (8.60) есть число отрицательное и положим для удобства $n = -N$ (в частности, $N = 2$ соответствует классической задаче с законом Ньютона).

Тогда уравнения, определяющие α, перепишем последовательно следующим образом:

$$L_1^*(\alpha) = (m_0 + m_1)\alpha^{N+1}(1+\alpha)^N + m_1\alpha^N(1+\alpha)^N - m_2\alpha(1+\alpha)^N + \\ + m_2\alpha^{N+1} - m_1\alpha^N - (m_0 + m_2)(1+\alpha)^N = 0, \tag{8.62}$$

откуда имеем

$$L_1^*(0) = -(m_0 + m_2) < 0; \quad L_1^*(1) = m_1(2^{N+1} - 1) + m_2 > 0.$$

Эти неравенства показывают, что уравнение $L_1^*(\alpha) = 0$ имеет корень (или вообще нечетное число корней) в промежутке $(0, 1)$.

Таким образом, если поместить точку (M_1) на прямой (M_0M_2) слева от точки (M_0) на расстоянии, большем чем $\overline{M_0M_2}$, то получим первое эйлерово решение.

Далее, имеем

$$L_2^*(\alpha) = (m_0 + m_1)\alpha^{N+1}(\alpha - 1)^N - m_1\alpha^N(\alpha - 1)^N + m_2\alpha(\alpha - 1)^N - \\ - m_2\alpha^{N+1} - m_1\alpha^N - (m_0 + m_2)(\alpha - 1)^N = 0. \quad (8.62')$$

Простое вычисление дает

$$L_2^*(1) = -m_0 - m_1 < 0, \quad L_2^*(2) = (m_0 + m_2)(2^{N+1} - 1) + m_1 2^{N+1} > 0.$$

Эти неравенства показывают, что в промежутке $1 < \alpha < 2$ написанное уравнение имеет по крайней мере один (или вообще нечетное число) корень. Таким образом, помещая точку (M_1) между точками (M_0) и (M_2), мы получим второе эйлерово решение.

Наконец, выписываем третье уравнение

$$L_3^*(\alpha) = (m_0 + m_1)\alpha^{N+1}(1-\alpha)^N - m_1\alpha^N(1-\alpha)^N - (m_1 + m_2)(1-\alpha)^N + \\ + m_2\alpha^{N+1} + m_2(1 - \alpha)^N + m_1\alpha^N = 0, \quad (8.62'')$$

откуда

$$L_3^*(0) = -m_1 < 0; \quad L_3^*(1) = m_1 + m_2 > 0,$$

т. е. последнее уравнение имеет один (или вообще нечетное число) корень в промежутке $0 < \alpha < 1$. Следовательно, если мы поместим точку (M_1) на прямой (M_0M_2) справа от (M_2), то получим третье эйлерово решение нашей задачи.

Полученные результаты справедливы для любого положительного N, каковы бы ни были массы точек m_0, m_1 и m_2.

При $N = -2$ каждое из трех последних уравнений превращается в уравнение Эйлера пятой степени классической задачи.

Уравнение, определяющее орбиты точек (M_1) и (M_2) относительно точки (M_0) в неизменной плоскости, получим для закона (8.60) из (8.57) в виде $(n = -N)$

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\rho} - \frac{c^2}{\rho^3} + \frac{fP_i(\alpha)}{\rho^N} = 0, \\ \rho^2 \frac{dv}{dt} = c, \end{aligned}\right\} \quad (8.63)$$

где v — угол, образуемый вращающейся прямой $(M_0M_1M_2)$ вокруг точки (M_0) с некоторым неизменным направлением в плоскости, в которой вращается прямая.

Постоянная $P_i(\alpha)$ вычисляется по формуле (8.56) и имеет, следовательно, для каждого из трех эйлеровых решений следующие значения:

$$\left.\begin{aligned} P_1(\alpha_1) &= m_0 + m_1 - \frac{m_2}{\alpha_1^N} + \frac{m_2}{(1+\alpha_1)^N}, \\ P_2(\alpha_2) &= m_0 + m_1 + \frac{m_2}{\alpha_2^N} - \frac{m_2}{(\alpha_2-1)^N}, \\ P_3(\alpha_3) &= m_0 + m_1 + \frac{m_2}{\alpha_3^N} + \frac{m_2}{(1-\alpha_3)^N}, \end{aligned}\right\} \qquad (8.63')$$

где α_i обозначает положительный корень уравнения

$$L_i^*(\alpha) = 0.$$

Уравнения (8.63) для каждого $i = 1, 2, 3$ можно, очевидно, рассматривать как уравнения движения материальной точки, находящейся под действием силы, обратно пропорциональной N-й степени расстояния до центра силы.

В частности, для $N = 2$, т. е. для случая закона Ньютона, уравнения (8.63) определяют кеплеровское движение и орбита каждой из точек M_1 и M_2 есть кривая второго порядка с фокусом в точке M_0. Главный интерес представляют, конечно, случаи, когда эта орбита есть окружность или эллипс.

Примечание. Для того чтобы лагранжево или эйлерово движения были возможны, очевидно, необходимо, чтобы начальное значение величины ρ удовлетворяло следующим условиям: для лагранжевых решений $\rho(t_0)$ должно быть больше наибольшей из величин

$$a_0 + a_1, \quad a_0 + a_2, \quad a_1 + a_2,$$

где a_i обозначает радиус наибольшего из сечений тела T_i плоскостью, перпендикулярной к оси симметрии тела.

Для эйлеровых решений $\rho(t_0)$ должно удовлетворять условиям:

для (L_1) должно быть $\quad a_0 + a_2 < \rho_1(t_0)$,

для (L_2) » » $\quad a_0 + a_2 < \rho_2(t_0) < \rho(t_0) - a_1 - a_2$,

для (L_3) » » $\quad \rho(t_0) + a_1 + a_2 < \rho_3(t_0)$.

Если какое-либо из этих условий выполняется, то соответствующее движение или продолжается сколь угодно долго, или два из трех тел сталкиваются в некоторый конечный момент $t = t_1$, после чего задача перестает иметь смысл.