§ 4. Задача об устойчивости лагранжевых решений

Во второй части этой книги рассматривалась ограниченная задача трех тел-точек, общая относительно законов взаимодействий активных точек с пассивной.

В этой части мы рассматриваем неограниченные задачи, когда все тела-точки являются активно действующими и законы взаимодействий предполагаются, вообще говоря, наиболее общими.

В задаче трех тел-точек были обнаружены частные решения, аналогичные либрационным решениям ограниченной задачи, и теперь естественно перейти к рассмотрению вопроса об устойчивости этих частных решений в смысле Ляпунова.

Однако при самых общих предположениях относительно действующих сил эта задача, несомненно, весьма трудна, а поэтому мы ограничимся рассмотрением частного случая, когда все действующие силы одинаковы по своему характеру и зависят только от взаимного расстояния между точками.

Такая задача была поставлена еще Лапласом, который заметил, что лагранжевы и эйлеровы решения существуют также при произвольном законе притяжения.

Задача об устойчивости постоянного лагранжева решения для случая притяжения, пропорционального какой-либо степени расстояния, была рассмотрена в первом приближении Раусом еще в 1875 г.

Предполагая, что все три точки всегда остаются в одной плоскости, Раус пришел к следующему результату:

Если притяжение пропорционально произведению масс двух точек и обратно пропорционально N-й степени взаимного расстояния, то лагранжево решение задачи трех тел-точек при $N > 3$ всегда неустойчиво. Если же $N < 3$, то это движение устойчиво, если выполнено неравенство

$$\frac{(m_0 + m_1 + m_2)^2}{m_0 m_1 + m_0 m_2 + m_1 m_2} > 3\left(\frac{1+N}{3-N}\right)^2.$$

Для случая, когда взаимодействие определяется единым законом, зависящим только от расстояния, задачу об устойчивости лагранжева решения рассмотрел в 1889 г. А. М. Ляпунов, причем не только для случая постоянного движения, в котором точки M_1 и M_2 описывают окружности с центром в M_0, но и для более общего случая, когда невозмущенное движение оказывается непостоянным, а именно периодическим, как это имеет, например, место в случае закона Ньютона, когда точки M_1 и M_2 описывают эллипсы с фокусом в точке M_0.

В этом параграфе мы и изложим с некоторыми сокращениями результаты, полученные Ляпуновым (также в первом

приближении), из которых как частный случай получаются и результаты Рауса и результаты для классической, эллиптической задачи трех тел.

1. Рассмотрим уравнения (8.42′) и (8.43′), где функция F — закон взаимодействия — остается произвольной функцией, подчиненной только самым общим условиям, при которых указанные дифференциальные уравнения имеют единственное решение для каждой неособенной системы начальных условий.

В этом случае условия (8.45) заведомо выполняются и задача имеет лагранжево треугольное решение, в котором

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 = \omega_2 = \omega_1' = \omega_2' = 0, \\ \psi = \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{3}, \\ r_1 = r_2 = \Delta = \rho(t), \\ \omega_3 = \omega_3' = \omega(t), \end{aligned}\right\} \qquad (L)$$

где функции ρ и ω должны удовлетворять уравнениям (8.46), которые в рассматриваемом случае напишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\omega^2 + f(m_0 + m_1 + m_2)\cdot F(\rho) = 0, \\ \rho^2\omega = c, \end{aligned}\right\} \qquad (8.64)$$

где c, как всегда, есть произвольная постоянная.

Введем вместо t новую независимую переменную — полярный угол ϑ, определяемый формулой

$$\omega\, dt = c\frac{dt}{\rho^2} = d\vartheta, \qquad (8.65)$$

и положим для краткости

$$g = \frac{f(m_0 + m_1 + m_2)}{c^2}. \qquad (8.65')$$

Тогда первое из уравнений (8.64) примет вид

$$\frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\vartheta^2} + \frac{1}{\rho} = g\rho^2 F(\rho), \qquad (8.64')$$

а это есть не что иное, как уравнение типа Бине, определяющее ρ как функцию полярного угла ϑ, т. е. уравнение (8.64′) есть дифференциальное уравнение орбиты каждой из точек M_1 и M_2 относительно центра силы M_0.

Из этого уравнения получаем обычным образом

$$d\vartheta \pm \frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\sqrt{h - \frac{1}{\rho^2} - 2g\int F(\rho)\,d\rho}}, \tag{8.64''}$$

где h — произвольная постоянная.

Постоянные g и h характеризуют движение, соответствующее частному решению (L).

Предположим теперь функцию $F(\rho)$ и постоянные g и h такими, чтобы уравнение

$$h - \frac{1}{\rho^2} - 2g\int F(\rho)\,d\rho = 0 \tag{8.64*}$$

имело в числе других два простых положительных корня ρ_0 и ρ_1 и чтобы для $\rho_0 < \rho < \rho_1$ всегда было

$$h - \frac{1}{\rho^2} - 2g\int F(\rho)\,d\rho > 0.$$

При этом если начальное значение ρ заключается между пределами ρ_0 и ρ_1, то ρ будет периодической функцией от ϑ с периодом

$$\Omega = 2\int_{\rho_0}^{\rho_1} \frac{d\rho}{\rho\sqrt{h\rho^2 - 1 - 2g\rho^2\int F(\rho)\,d\rho}}. \tag{8.64'''}$$

Такой случай мы имеем, например, в классической задаче, где

$$F(\rho) = \frac{1}{\rho^2}$$

и постоянные g и h таковы, что в уравнении кеплеровской орбиты

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\vartheta}$$

эксцентриситет $e < 1$.

Тогда

$$\rho_0 = a(1-e), \quad \rho_1 = a(1+e)$$

и ρ есть периодическая функция от ϑ с периодом

$$\Omega = 2\pi.$$

Но движение может быть периодическим и при других законах, отличных от ньютоновского.

Заметим еще, что если $F(\rho)$ всегда положительна, то уравнению (8.64′) удовлетворяет такое постоянное значение $\rho = a$, что мы имеем

$$ga^3F(a) = 1. \tag{8.65''}$$

В этом случае треугольник $(M_0M_1M_2)$ остается неизменным.

2. Переходим к рассмотрению вопроса об устойчивости лагранжева решения в том частном случае, который был предметом исследования А. М. Ляпунова. При этом согласно Ляпунову будем считать невозмущенное движение устойчивым, если во всяком возмущенном движении, начальные возмущения которого сколь угодно малы, треугольник во все время движения сколь угодно мало отличается от равностороннего.

Рассматривая какое-либо из треугольных лагранжевых движений как невозмущенное, составим прежде всего дифференциальные уравнения возмущенного движения.

Возьмем частное решение (L), где ρ и ω — известные функции времени, удовлетворяющие уравнениям (8.64), и поставим задачу об устойчивости этого частного решения в смысле Ляпунова относительно величин

$$r_1 - \rho,\ r_2 - \rho,\ \psi - \frac{\pi}{3},\ \omega_3 - \omega,\ \omega_1,\ \omega_2.$$

Положим для этого

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \rho(1+\xi), & r_2 &= \rho(1+\xi+x), \\ \psi &= \frac{\pi}{3} + y, & \omega_3 &= \omega(1+\eta), \end{aligned}\right\} \tag{8.66}$$

и будем считать величины x, y, ξ, η, ω_1, ω_2 и их производные по времени бесконечно малыми одного и того же порядка.

Очевидно, что в невозмущенном движении мы имеем

$$x = 0,\quad y = 0,\quad \xi = 0,\quad \eta = 0,\quad \omega_1 = 0,\quad \omega_2 = 0, \tag{8.66'}$$

вследствие чего наша задача приводится к задаче об устойчивости нулевого решения (8.66′) дифференциальных уравнений, которые получатся из уравнений (8.42′), (8.43′) после подстановки (8.66).

Сделаем эту подстановку, разлагая нелинейные члены полученных уравнений в ряды по степеням бесконечно малых возмущений (8.66′).

Выписывая только члены не выше первого порядка, мы имеем прежде всего

$$\left.\begin{aligned}
\Delta &= \rho\left(1+\xi+\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)+\ldots,\\
\cos\psi &= \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}y+\ldots,\\
\sin\psi &= \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}y+\ldots,\\
\cos\varphi_1 &= \frac{1}{2}-\frac{3}{4}x+\frac{\sqrt{3}}{4}y+\ldots,\\
\sin\varphi_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}x-\frac{1}{4}y+\ldots,\\
\cos\varphi_2 &= \frac{1}{2}+\frac{3}{4}x+\frac{\sqrt{3}}{4}y+\ldots,\\
\sin\varphi_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}x-\frac{1}{4}y+\ldots,\\
\omega_3' &= \omega(1+\eta)+\frac{dy}{dt},\\
\omega_1' &= \frac{1}{2}\omega_1+\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_2+\ldots,\\
\omega_2' &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_1+\frac{1}{2}\omega_2+\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{8.67}$$

Предполагая функцию $F(\rho_j)$ такой, чтобы функция $F(\rho+\zeta)$ для всех рассматриваемых значений ρ и для достаточно малых ζ была разложима в абсолютно сходящийся ряд по целым положительным степеням ζ, мы можем написать

$$F(\rho+\zeta)=F(\rho)+\zeta F'(\rho)+\ldots \tag{8.67'}$$

Вносим величины (8.67) и (8.67′) в уравнения (8.42′), (8.43′) и выписываем в последних только члены не выше первого порядка. Тогда уравнения эти, после сокращения членов нулевого порядка вследствие (8.64), примут следующий вид:

$$\frac{d^2(\rho\xi)}{dt^2}-\rho\omega^2\xi-2\rho\omega^2\eta+f(m_0+m_1+m_2)\rho F'(\rho)\xi-$$
$$-fm_2[F(\rho)-\rho F'(\rho)]\left(\frac{3}{4}x+\frac{\sqrt{3}}{4}y\right)+\ldots=0, \tag{8.68}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}[\rho^2\omega(2\xi+\eta)]+$$
$$+fm_2[F(\rho)-\rho F'(\rho)]\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}x+\frac{3}{4}y\right)+\ldots=0, \tag{8.68'}$$

$$\frac{d^2\rho(\xi+x)}{dt^2}-\rho\omega^2(\xi+x+2\eta)-2\rho\omega\frac{dy}{dt}+$$
$$+f(m_0+m_1+m_2)\rho F'(\rho)(\xi+x)+$$
$$+fm_1[F(\rho)-\rho F'(\rho)]\left(\frac{3}{4}x-\frac{\sqrt{3}}{4}y\right)+\ldots=0, \qquad (8.69)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left[\rho^2\left(2\omega(\xi+x)+\omega\eta+\frac{dy}{dt}\right)\right]-$$
$$-fm_1[F(\rho)-\rho F'(\rho)]\left(\frac{\sqrt{3}}{4}x+\frac{3}{4}y\right)+\ldots=0, \qquad (8.69')$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\omega_2)-\rho\omega\omega_1+\ldots=0, \qquad (8.70)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}[\rho^2(\omega_2-\sqrt{3}\omega_1)]-\rho\omega(\sqrt{3}\omega_2+\omega_1)+\ldots=0. \qquad (8.70')$$

В этой системе уравнения (8.69), (8.69′) и (8.70′) вследствие (8.68), (8.68′) и (8.70) приводятся к более простому виду:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2(\rho x)}{dt^2}-\rho\omega^2x-2\rho\omega\frac{dy}{dt}+f(m_0+m_1+m_2)\rho F'(\rho)x+\\
&+[F(\rho)-\rho F'(\rho)]\left[\frac{3}{4}f(m_1+m_2)x-\frac{\sqrt{3}}{4}f(m_1-m_2)y\right]+\ldots=0,\\
&\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left[\rho^2\left(2\omega x+\frac{dy}{dt}\right)\right]-\\
&-[F(\rho)-\rho F'(\rho)]\left[\frac{\sqrt{3}}{4}f(m_1-m_2)x+\frac{3}{4}f(m_1+m_2)y\right]+\ldots=0,\\
&\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\omega_1)+\rho\omega\omega_2=0.
\end{aligned}\right\} \qquad (8.71)$$

Наконец, при помощи (8.64) можно привести уравнения (8.68) и (8.71) к виду

$$\frac{d^2(\rho\xi)}{dt^2}-\xi\frac{d^2\rho}{dt^2}-2\rho\omega^2\eta-f(m_0+m_1+m_2)[F(\rho)-\rho F'(\rho)]\xi-$$
$$-fm_2[F(\rho)-\rho F'(\rho)]\left(\frac{3}{4}x+\frac{\sqrt{3}}{4}y\right)+\ldots=0,$$

$$\frac{d^2(\rho x)}{dt^2}-x\frac{d^2\rho}{dt^2}-2\rho\omega\frac{dy}{dt}-f(m_0+m_1+m_2)[F(\rho)-\rho F'(\rho)]x+$$
$$+[F(\rho)-\rho F'(\rho)]\left[\frac{3}{4}f(m_1+m_2)x-\frac{\sqrt{3}}{4}f(m_1-m_2)y\right]+\ldots=0.$$

Введем во все эти уравнения новую независимую переменную — угол ϑ — подстановкой (8.65). Тогда, замечая, что вообще

$$\frac{d^2(\rho\zeta)}{dt^2}-\zeta\frac{d^2\rho}{dt^2}=\frac{c^2}{\rho^3}\frac{d^2\zeta}{d\vartheta^2},$$

и полагая для сокращения

$$\frac{f(m_0+m_1+m_2)}{c^2}=g, \quad g\rho^3[F(\rho)-\rho F'(\rho)]=u, \tag{8.72}$$

$$\frac{3}{4}\frac{m_1+m_2}{m_0+m_1+m_2}=\mu, \quad \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{m_1-m_2}{m_0+m_1+m_2}=\mu', \tag{8.72'}$$

мы получим окончательно следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{d\vartheta^2}-2\frac{dy}{d\vartheta}&=u[(1-\mu)x+\mu'y]+\ldots,\\ \frac{d^2y}{d\vartheta^2}+2\frac{dx}{d\vartheta}&=u[\mu'x+\mu y]+\ldots,\end{aligned}\right\} \tag{8.73}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{d\vartheta^2}-2\eta-u\xi&=\frac{\mu-\sqrt{3}\mu'}{2}u\left(\frac{y}{\sqrt{3}}+x\right)+\ldots,\\ \frac{d\eta}{d\vartheta}+2\frac{d\xi}{d\vartheta}&=\frac{\mu-\sqrt{3}\mu'}{2}u\left(\frac{x}{\sqrt{3}}-y\right)+\ldots,\end{aligned}\right\} \tag{8.74}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d(\rho^2\omega_1)}{d\vartheta}+\rho^2\omega_2&=0+\ldots,\\ \frac{d(\rho^2\omega_2)}{d\vartheta}-\rho^2\omega_1&=0+\ldots\end{aligned}\right\} \tag{8.75}$$

В этих уравнениях u есть известная функция от ϑ или некоторая постоянная. Для случая ньютоновского притяжения мы имеем

$$F(\rho)=\frac{1}{\rho^2}, \quad u=3g\rho. \tag{8.76}$$

Уравнения (8.73), (8.74) и (8.75) годятся также и для случая ограниченной задачи трех тел. В последнем случае нужно только положить $m_2=0$, вследствие чего уравнения (8.74) несколько упрощаются, так как коэффициент при линейных членах этих уравнений обращается в нуль.

3. Рассмотрение вопроса об устойчивости нулевого решения (8.66′) вышенаписанных уравнений зависит прежде всего от решения этой задачи в первом приближении, т. е. от исследования линейных уравнений, которые получаются из уравнений (8.73), (8.74) и (8.75) отбрасыванием в правых частях последних всех членов выше первого порядка.

Из полученных шести линейных уравнений последние два легко интегрируются и дают

$$\left.\begin{aligned}\rho^2\omega_1&=A\sin\vartheta+B\cos\vartheta,\\ \rho^2\omega_2&=-A\cos\vartheta+B\sin\vartheta,\end{aligned}\right\} \tag{8.75'}$$

где A и B — произвольные постоянные.

Отсюда видно, что ω_1 и ω_2 всегда остаются бесконечно малыми одного порядка со своими начальными значениями, если ρ никогда не обращается в нуль, что мы и будем впредь предполагать.

Таким образом, треугольное лагранжево решение оказывается устойчивым относительно величин ω_1 и ω_2 (по крайней мере в первом приближении!) и плоскость треугольника, образованного тремя точками M_i, всегда остается близкой к плоскости, образованной этими точками в начальный момент времени.

Поэтому остается рассмотреть только четыре уравнения, представляющие первое приближение уравнений (8.53) и (8.54). Эту последнюю задачу Ляпунов приводит весьма искусным приемом к рассмотрению только двух уравнений, образующих систему четвертого порядка.

В самом деле, покажем, следуя Ляпунову, что если известны функции x и y, удовлетворяющие уравнениям первого приближения системы (8.73), то функции ξ, η, удовлетворяющие уравнениям первого приближения системы (8.74), найдутся при помощи квадратур и дифференцирований.

Для этого отметим прежде всего следующее свойство уравнений первого приближения системы (8.73), т. е. уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{d\vartheta^2} - 2\frac{dy}{d\vartheta} &= u\left[(1-\mu)x + \mu' y\right], \\ \frac{d^2y}{d\vartheta^2} + 2\frac{dx}{d\vartheta} &= u(\mu' x + \mu y). \end{aligned}\right\} \tag{8.77}$$

Если сделать в этих уравнениях подстановку

$$x + ay = x_1, \quad y - ax = y_1,$$

где a — какая-либо постоянная, то для определения новых переменных x_1 и y_1 получатся уравнения такого же вида:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{d\vartheta^2} - 2\frac{dy_1}{d\vartheta} &= u\left[(1-\mu_1)x_1 + \mu_1' y_1\right], \\ \frac{d^2y_1}{d\vartheta^2} + 2\frac{dx_1}{d\vartheta} &= u\left[\mu_1' x_1 + \mu_1 y_1\right], \end{aligned}\right\} \tag{8.77'}$$

где

$$\mu_1 = \frac{\mu - 2\mu' a + (1-\mu)a^2}{1+a^2}, \quad \mu_1' = \frac{\mu' + (2\mu - 1)a - \mu' a^2}{1+a^2}.$$

Определим a и новую постоянную b из условия

$$\mu_1' x_1 + \mu_1 y_1 = b\left(\frac{x}{\sqrt{3}} - y\right), \tag{8.78}$$

что дает для них уравнения

$$\mu_1 + \mu_1' a = -b, \quad \mu_1' - \mu_1 a = \frac{b}{\sqrt{3}}, \tag{8.78'}$$

вследствие которых будем также иметь

$$-\mu_1 x_1 + \mu_1' y_1 = b\left(\frac{y}{\sqrt{3}} + x\right). \tag{8.78''}$$

Из уравнений (8.78′) находим

$$a = \frac{\mu + \mu'\sqrt{3}}{\mu' + (1-\mu)\sqrt{3}}, \quad b = -\frac{\mu - \mu^2 - \mu'^2}{\mu' + (1-\mu)\sqrt{3}}\sqrt{3}.$$

Теперь вследствие (8.77′), (8.78) и (8.78″) уравнения первого приближения системы (8.74) примут вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{d\vartheta^2} - 2\eta - u\xi &= \frac{\mu - \sqrt{3}\mu'}{2b}\left(\frac{d^2x_1}{d\vartheta^2} - 2\frac{dy_1}{d\vartheta} - ux_1\right), \\ \frac{d\eta}{d\vartheta} + 2\frac{d\xi}{d\vartheta} &= \frac{\mu - \sqrt{3}\mu'}{2b}\left(\frac{d^2y_1}{d\vartheta^2} + 2\frac{dx_1}{d\vartheta}\right). \end{aligned}\right\} \tag{8.79}$$

Из уравнений (8.79) видно, что функции ξ и η определяются формулами

$$\xi = \frac{\mu - \sqrt{3}\mu'}{2b}x_1 + \bar{\xi}, \quad \eta = \frac{\mu - \sqrt{3}\mu'}{2b}\frac{dy_1}{d\vartheta} + \bar{\eta}, \tag{8.79'}$$

где $\bar{\xi}$ и $\bar{\eta}$ представляют общее решение системы

$$\frac{d^2\bar{\xi}}{d\vartheta^2} - 2\bar{\eta} - u\bar{\xi} = 0, \quad \frac{d\bar{\eta}}{d\vartheta} + 2\frac{d\bar{\xi}}{d\vartheta} = 0, \tag{8.80}$$

которую можно проинтегрировать в квадратурах.

Для этого исключим из выражения (8.72) для u функцию $F(\rho)$ с помощью равенства (8.64′), что даст следующее выражение:

$$u = 4 + \frac{v'''}{v'}, \tag{8.81}$$

где штрихи обозначают дифференцирования по ϑ и положено $v = \rho^{-2}$.

Исключая теперь из уравнений (8.80) переменную $\bar{\eta}$ и заменяя u выражением (8.81), мы получим

$$v'\bar{\xi}'' - v'''\bar{\xi} = 2C_1 v', \tag{8.82}$$

где C_1 — произвольная постоянная. Интегрируя равенство (8.82), имеем

$$v'\bar{\xi}' - v''\bar{\xi} = 2C_1 v + C_2, \tag{8.82'}$$

где C_2 — вторая произвольная постоянная.

Интегрируя, наконец, линейное уравнение (8.82′), мы будем иметь общее решение системы (8.80) в виде

$$\left.\begin{aligned} \bar{\xi} &= v' \int \frac{2C_1 v + C_2}{v'^2}\, d\vartheta + C_3 v', \\ \bar{\eta} &= -2\bar{\xi} + C_1, \end{aligned}\right\} \tag{8.83}$$

где C_3 — третья произвольная постоянная.

Таким образом, если x_1 и y_1 известны, то ξ и η найдутся по формулам (8.83) и (8.79′).

Последние, если в них подставить вместо x_1, y_1, a, b их значения и заменить μ, μ' их выражениями (8.72′), примут вид

$$\left.\begin{aligned} \xi &= -\frac{(2m_0 + m_1)\, m_2 x + \sqrt{3}\, m_1 m_2 y}{2\,(m_0 m_1 + m_0 m_2 + m_1 m_2)} + \bar{\xi}, \\ \eta &= -\frac{(2m_0 + m_1)\, m_2 y' - \sqrt{3}\, m_1 m_2 x'}{2\,(m_0 m_1 + m_0 m_2 + m_1 m_2)} + \bar{\eta}. \end{aligned}\right\} \tag{8.84}$$

Притом, если мы положим здесь $\bar{\xi} = \bar{\eta} = 0$, то это будет только равносильно предположению, что вместо первоначального невозмущенного лагранжева движения берется для сравнения с возмущенным некоторое другое, тоже лагранжево, в котором постоянные g и h бесконечно мало отличаются от своих прежних значений *).

Возвращаемся теперь к уравнениям (8.77). При помощи приведенной выше подстановки преобразовываем их к виду (8.77′) и, пользуясь неопределенностью параметра a, приводим их к более простому виду. Для этого выберем a так, чтобы было $\mu_1' = 0$, что дает для a уравнение

$$\mu' a^2 - (2\mu - 1)\, a - \mu' = 0.$$

Обозначая соответствующую величину μ_1 через λ, найдем для нее, в силу этого уравнения, следующее выражение:

$$\lambda = \mu - \mu' a.$$

Поэтому для определения λ получим уравнение

$$\lambda^2 - \lambda + \mu - \mu^2 - \mu'^2 = 0,$$

которое вследствие формул (8.72′) приводится к виду

$$\lambda^2 - \lambda + \frac{3}{4}\, \frac{m_0 m_1 + m_0 m_2 + m_1 m_2}{(m_0 + m_1 + m_2)^2} = 0. \tag{8.85}$$

---

*) Действительно, при $\bar{\xi} = \bar{\eta} = 0$, ξ и η определятся уравнениями вида (8.80), если $x_1 = y_1 = 0$. Но тогда также $x = y = 0$, что ввиду (8.66) доказывает сказанное.

Если теперь обозначим величины x_1 и y_1, соответствующие принятому определению a, через X и Y, то будем иметь следующие уравнения:

$$X = x + \frac{\mu - \lambda}{\mu'} y, \quad Y = y - \frac{\mu - \lambda}{\mu'} x, \tag{8.86}$$

$$\left.\begin{aligned} X'' - 2Y' &= (1 - \lambda) uX, \\ Y'' + 2X' &= \lambda u Y. \end{aligned}\right\} \tag{8.86'}$$

Таким образом, наша задача об устойчивости приводится к задаче об устойчивости нулевого решения системы (8.86′).

В этих уравнениях λ есть какой-либо из корней уравнения (8.85), которые, как нетрудно убедиться, всегда вещественны и заключаются один между 0 и $\frac{1}{2}$, другой между $\frac{1}{2}$ и 1. Притом этих пределов они могут достигать только в двух случаях: когда масса одной из точек бесконечно велика сравнительно с массами двух остальных или когда массы всех трех точек равны между собой. В первом случае корни уравнения (8.85) суть 0 и 1, во втором оба корня равны $1/2$.

4. Уравнения (8.86′) легко интегрируются, когда u — величина постоянная. Общее решение этих уравнений может быть написано в этом случае в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} X &= A_1 \cos(k_1\vartheta + \alpha_1) + A_2 \cos(k_2\vartheta + \alpha_2), \\ Y &= -\frac{k_1^2 + (1-\lambda) u}{2k_1} A_1 \sin(k_1\vartheta + \alpha_1) - \\ &\qquad - \frac{k_2^2 + (1-\lambda) u}{2k_2} A_2 \sin(k_2\vartheta + \alpha_2), \end{aligned}\right\} \tag{8.87}$$

где A_1, A_2, α_1, α_2 — произвольные постоянные, а k_1^2 и k_2^2 — корни квадратного относительно k^2 уравнения

$$k^4 - (4 - u) k^2 + \lambda (1 - \lambda) u^2 = 0. \tag{8.88}$$

Кроме того, непосредственное интегрирование уравнений (8.80) дает

$$\left.\begin{aligned} \bar{\xi} &= C_1 + C_2 \cos\left(\sqrt{4 - u}\,\vartheta + \gamma\right), \\ \bar{\eta} &= -2\bar{\xi} + \frac{4 - u}{2} C_1, \end{aligned}\right\} \tag{8.87'}$$

где C_1, C_2 и γ — произвольные постоянные.

Из формул (8.87′) непосредственно следует, что для устойчивости необходимо условие

$$4 - u > 0, \tag{8.89}$$

а из формул (8.87) видно, что для этого еще необходимо, чтобы оба корня квадратного (относительно k^2) уравнения (8.88)

были вещественными, положительными и различными. Поэтому, кроме условия (8.89), имеем еще следующее:

$$\left(\frac{4-u}{u}\right)^2 - 4\lambda(1-\lambda) > 0 \tag{8.90}$$

при добавочном условии, что $\lambda(1-\lambda)u^2$ не есть нуль.

Величина u может быть постоянной в двух случаях: во-первых, для всякой функции $F(\rho)$ (т. е. для всякого закона притяжения, включая, конечно, и закон Ньютона), если рассматриваемое невозмущенное лагранжево движение есть постоянное (ρ и ω постоянны); во-вторых, для всякого лагранжева движения, но при некотором определенном типе функции $F(\rho)$.

В первом случае, когда ρ — постоянная величина, формулы (8.72) и (8.65″) дают

$$u = 1 - \frac{\rho F'(\rho)}{F(\rho)},$$

а поэтому условия (8.89) и (8.90), с использованием уравнения (8.85), приводятся к следующему виду:

$$3 + \frac{\rho F'(\rho)}{F(\rho)} > 0,$$

$$\frac{(m_0+m_1+m_2)^2}{m_0m_1+m_0m_2+m_1m_2} > 3\left[\frac{1-\dfrac{\rho F'(\rho)}{F(\rho)}}{3+\dfrac{\rho F'(\rho)}{F(\rho)}}\right]^2. \tag{8.91}$$

При законе $F(\rho) = \rho^{-N}$ эти условия совпадают с условиями Рауса, а для закона Ньютона превращаются в

$$\frac{(m_0+m_1+m_2)^2}{m_0m_1+m_0m_2+m_1m_2} > 27,$$

откуда при $m_2 = 0$, полагая $\frac{m_1}{m_0+m_1} = \mu$, получим уже известное нам условие устойчивости треугольных точек либрации ограниченной круговой задачи.

Заметим, что первое из них есть условие возможности периодических лагранжевых движений, бесконечно близких к рассматриваемому постоянному.

Во втором случае из условия, что

$$u = g\rho^3[F(\rho) - \rho F'(\rho)] = \text{const} \tag{8.92}$$

для всякого ρ, находим

$$F(\rho) = \frac{\alpha}{\rho^3} + \beta\rho, \tag{8.92'}$$

где α и β — постоянные.

Нетрудно убедиться, что в этом случае лагранжевы движения будут периодическими, только когда $1 - g\alpha > 0$ и $\beta > 0$.

Неравенство (8.91) в этом случае имеет следующий вид:

$$\frac{(m_0+m_1+m_2)^2}{m_0m_1+m_0m_2+m_1m_2} > 3\left(\frac{ga}{1-ga}\right)^2 \tag{8.92''}$$

и представляет условие устойчивости этих периодических движений.

Полезно напомнить еще раз, что все приведенные нами условия устойчивости являются только достаточными условиями устойчивости лагранжева движения по первому приближению и что никаких заключений об устойчивости вообще из этих условий вывести нельзя.

Если u не является постоянной величиной, то исследование вопроса об устойчивости даже в первом приближении делается чрезвычайно сложной и трудной задачей.

Мы будем рассматривать в дальнейшем только тот случай, когда исследуемое невозмущенное лагранжево движение является периодическим, что в случае закона притяжения Ньютона соответствует случаю, когда каждая из трех масс описывает эллиптическую орбиту (с одним и тем же эксцентриситетом) вокруг общего центра масс всей системы.

Вообще будем предполагать, что ρ есть периодическая функция ϑ с периодом Ω, определяемым формулой (8.64''). Для этого необходимо, чтобы величины ρ_0 и ρ_1 (из которых первая не есть нуль, а вторая есть число конечное) были простыми корнями уравнения (8.64*) и чтобы ρ всегда заключалось между пределами ρ_0 и ρ_1.

Условиями устойчивости рассматриваемого невозмущенного периодического движения являются, очевидно, условия, при которых функции ξ, η, x, y остаются конечными для всякого вещественного значения t.

Рассмотрим прежде всего выражения (8.83). Нетрудно убедиться, что функции $\bar{\xi}$ и $\bar{\eta}$, определяемые этими формулами, вообще следующего типа:

$$P(\vartheta)+\vartheta Q(\vartheta), \tag{8.93}$$

где $P(\vartheta)$ и $Q(\vartheta)$ — периодические функции от ϑ с периодом Ω. Но из уравнения (8.65) (в котором будем считать для определенности постоянную c положительной) следует, что ϑ есть непрерывная возрастающая функция времени, получающая приращение Ω, когда t получает приращение

$$T=\frac{1}{c}\int_0^{\Omega}\rho^2\,d\vartheta.$$

Поэтому всякая функция типа (8.93) приводится к виду

$$\tilde{P}(t) + t\tilde{Q}(t), \tag{8.93'}$$

где $\tilde{P}(t)$ и $\tilde{Q}(t)$ — периодические функции t с периодом T.

Такого вида будут, следовательно, вообще функции $\bar{\xi}$ и $\bar{\eta}$, рассматриваемые как функции t.

Отсюда следует, что если признаком устойчивости считать (как это было принято выше) то обстоятельство, что в возмущенном движении стороны треугольника $(M_0M_1M_2)$ должны бесконечно мало отличаться от тех длин, которые им соответствовали бы в невозмущенном движении в тот же момент времени, то периодические лагранжевы движения вообще неустойчивы.

Это обстоятельство, впрочем, очевидно также из следующих соображений.

Когда мы переходим от одного периодического лагранжева движения к другому, то при этом вообще изменяется и период T, а отсюда следует, что если даже постоянные g и h, характеризующие новое движение, отличаются сколь угодно мало от своих прежних значений, то все же разности между одновременными длинами сторон треугольника в обоих движениях не могут оставаться всегда бесконечно малыми. Последнее возможно только при условии, что период T не изменился *).

Ляпунов замечает при этом, что возможно найти такой закон притяжения, для которого действительно период T не зависит от постоянных g и h. Оказывается, что такой закон выражается формулой (8.92'); для него, как было показано выше, функции $\bar{\xi}$ и $\bar{\eta}$ всегда содержат только периодические члены. Вдобавок непосредственное вычисление периода T дает в этом случае

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{\beta(m_0 + m_1 + m_2)}}.$$

Таким образом, период не зависит от произвольных постоянных интегрирования.

§ 5. Исследование устойчивости периодических движений

1. В предыдущем параграфе было показано, что всякое периодическое лагранжево движение вообще неустойчиво относительно величин ξ и η, а следовательно, если в начальный

*) Подобное же обстоятельство было уже отмечено нами в главе II при рассмотрении задачи об устойчивости эллиптического кеплеровского движения. Поэтому в случае кеплеровского движения можно говорить только об его орбитальной устойчивости. Нечто подобное мы имеем и в рассматриваемой задаче трех тел.