Поэтому всякая функция типа (8.93) приводится к виду

$$\tilde{P}(t) + t\tilde{Q}(t), \tag{8.93'}$$

где $\tilde{P}(t)$ и $\tilde{Q}(t)$ — периодические функции t с периодом T.

Такого вида будут, следовательно, вообще функции $\bar{\xi}$ и $\bar{\eta}$, рассматриваемые как функции t.

Отсюда следует, что если признаком устойчивости считать (как это было принято выше) то обстоятельство, что в возмущенном движении стороны треугольника $(M_0M_1M_2)$ должны бесконечно мало отличаться от тех длин, которые им соответствовали бы в невозмущенном движении в тот же момент времени, то периодические лагранжевы движения вообще неустойчивы.

Это обстоятельство, впрочем, очевидно также из следующих соображений.

Когда мы переходим от одного периодического лагранжева движения к другому, то при этом вообще изменяется и период T, а отсюда следует, что если даже постоянные g и h, характеризующие новое движение, отличаются сколь угодно мало от своих прежних значений, то все же разности между одновременными длинами сторон треугольника в обоих движениях не могут оставаться всегда бесконечно малыми. Последнее возможно только при условии, что период T не изменился *).

Ляпунов замечает при этом, что возможно найти такой закон притяжения, для которого действительно период T не зависит от постоянных g и h. Оказывается, что такой закон выражается формулой (8.92'); для него, как было показано выше, функции $\bar{\xi}$ и $\bar{\eta}$ всегда содержат только периодические члены. Вдобавок непосредственное вычисление периода T дает в этом случае

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{\beta(m_0 + m_1 + m_2)}}.$$

Таким образом, период не зависит от произвольных постоянных интегрирования.

§ 5. Исследование устойчивости периодических движений

1. В предыдущем параграфе было показано, что всякое периодическое лагранжево движение вообще неустойчиво относительно величин ξ и η, а следовательно, если в начальный

*) Подобное же обстоятельство было уже отмечено нами в главе II при рассмотрении задачи об устойчивости эллиптического кеплеровского движения. Поэтому в случае кеплеровского движения можно говорить только об его орбитальной устойчивости. Нечто подобное мы имеем и в рассматриваемой задаче трех тел.

момент точки M_i находятся сколь угодно близко от вершин равностороннего треугольника, соответствующего периодическому лагранжеву решению, то в дальнейшем точки M_i не будут всегда оставаться вблизи этих вершин.

Поэтому для случая периодических движений *) задачу об устойчивости Ляпунов ставит несколько иным, более общим образом.

А именно, следуя Ляпунову, мы будем считать периодическое лагранжево движение устойчивым, когда после всяких сколь угодно малых численно начальных возмущений треугольник $(M_0M_1M_2)$ всегда бесконечно мало отличается от равностороннего, причем стороны его изменяются между пределами, бесконечно мало отличающимися от прежних.

Иными словами, будем рассматривать *задачу об орбитальной устойчивости* периодического лагранжева движения, так как при новой постановке вопроса орбиты двух точек M_1 и M_2 относительно M_0 в возмущенном движении будут сколь угодно мало отличаться от орбит этих точек в невозмущенном движении, хотя возмущенные и невозмущенные положения точек (и скорости, разумеется!) вовсе не будут оставаться близкими во всякий момент времени.

Для решения вопроса об устойчивости в этом смысле мы можем сравнивать возмущенное движение не с первоначальным невозмущенным движением, а с каким-либо другим периодическим лагранжевым движением, в котором постоянные g и h имеют значения, бесконечно мало отличающиеся от соответствующих значений в первоначальном невозмущенном движении.

А такая постановка вопроса равносильна предположению, что $\bar{\xi} = \bar{\eta} = 0$, откуда следует, что решение задачи зависит теперь исключительно от задачи об устойчивости нулевого решения системы (8.86′).

Теперь и обращаемся к этим уравнениям

$$\left.\begin{aligned} X'' - 2Y' &= (1-\lambda)uX, \\ Y'' + 2X' &= \lambda uY, \end{aligned}\right\} \tag{8.94}$$

где λ — положительная постоянная, заключающаяся между нулем и единицей, а u — известная периодическая функция ϑ с периодом Ω, который для случая ньютоновского закона притяжения равен просто 2π.

Известно (см. главу I), что решение системы (8.94) и одновременно решение задачи об устойчивости нулевого решения

*) Здесь будет предполагаться, что u — периодическая функция полярного угла ϑ, не приводящаяся к постоянной. В случае ньютоновского закона притяжения эта функция определяется формулой (8.76).

этой системы зависит от нахождения корней соответствующего характеристичного уравнения системы (8.94). Напомним, как составляется это уравнение. Пусть

$$X_i(\vartheta), \quad Y_i(\vartheta) \qquad (i=1, 2, 3, 4) \tag{8.95}$$

суть четыре независимые системы частных решений уравнений (8.94). Тогда функции $X_i(\vartheta+\Omega)$, $Y_i(\vartheta+\Omega)$ также образуют систему независимых частных решений, и мы имеем

$$X_i(\vartheta+\Omega)=\sum_{j=1}^{4} A_{ij}X_j(\vartheta), \quad Y_j(\vartheta+\Omega)=\sum_{j=1}^{4} A_{ij}Y_j(\vartheta), \tag{8.95'}$$

где A_{ij} — некоторые постоянные.

Тогда характеристичное уравнение системы (8.94) напишется в виде

$$D(q)=|\,\|A_{ij}\|-qE\,|=0, \tag{8.96}$$

где E — единичная матрица четвертого порядка.

Если уравнение (8.96) привести к виду

$$q^4+A_1q^3+A_2q^2+A_3q+A_4=0, \tag{8.96'}$$

то коэффициенты A_i будут инвариантами относительно группы независимых решений, и если эти инварианты известны, то, по крайней мере, форма общего решения системы (8.94) также известна. Действительно, зная инварианты A_i, мы знаем также корни q_i характеристичного уравнения (эти корни также являются инвариантами), после чего получим общее решение в виде

$$X=\sum_{i=1}^{4} C_iP_i(\vartheta)\,q_i^{\frac{\vartheta}{\Omega}}, \quad Y=\sum_{i=1}^{4} C_iQ_i(\vartheta)\,q_i^{\frac{\vartheta}{\Omega}}, \tag{8.97}$$

где $P_i(\vartheta)$ и $Q_i(\vartheta)$ — периодические функции с периодом Ω, а C_i — произвольные постоянные.

Поэтому функции X и Y будут оставаться ограниченными при произвольных начальных условиях и нулевое решение системы (8.94) будет устойчивым, если модули всех корней уравнения (8.96) равны или меньше единицы.

В случае кратных корней получатся еще дополнительные условия, если только они возможны, состоящие в том, чтобы кратный корень обращал в нуль все миноры определителя $D(q)$ до известного порядка.

К сожалению, задача о составлении определителя $D(q)$ настолько трудна, что можно дать способы только для приближенного вычисления его элементов, или инвариантов.

В нашем случае эта задача несколько упрощается благодаря специальному виду системы (8.94), которая легко может быть переписана в канонической форме. Но в части первой этой

книги была доказана важная теорема Ляпунова, утверждающая, что характеристичное уравнение канонической системы с периодическими коэффициентами всегда является *возвратным*.

Поэтому уравнение (8.96) (или, что то же, (8.96′)) можно написать следующим образом:

$$D(q) = q^4 - 2Aq^3 + 2Bq^2 - 2Aq + 1 = 0, \tag{8.98}$$

вследствие чего задача приводится к вычислению только двух инвариантов A и B.

Так как каждому корню q уравнения (8.98) соответствует корень $1/q$, то если среди корней этого уравнения имеются такие, модули которых не равны единице, то нулевое решение системы (8.94) будет заведомо *неустойчивым*.

Поэтому необходимым условием для устойчивости этого нулевого решения, а вместе с тем и периодического лагранжева решения в указанном смысле является условие, чтобы модули всех корней уравнения (8.98) были равны единице.

Найдем условия, которым должны удовлетворять для этого коэффициенты A и B.

Пусть все корни уравнения (8.98) имеют модули, равные единице. Представим эти корни в следующей форме:

$$e^{\theta_1 i}, \quad e^{-\theta_1 i}, \quad e^{\theta_2 i}, \quad e^{-\theta_2 i},$$

где e — неперово число, $i = \sqrt{-1}$, а θ_1 и θ_2 — вещественные числа.

На основании теоремы Виета мы имеем

$$A = \cos\theta_1 + \cos\theta_2, \quad B = 1 + 2\cos\theta_1\cos\theta_2, \tag{8.98′}$$

откуда следует, что $\cos\theta_1$ и $\cos\theta_2$ — корни квадратного уравнения

$$\zeta^2 - A\zeta + \frac{B-1}{2} = 0. \tag{8.99}$$

Условие, что корни этого уравнения вещественны и различны, выражается неравенством

$$A^2 - 2(B-1) > 0, \tag{8.99′}$$

а что они численно меньше единицы — неравенствами

$$\sqrt{A^2 - 2(B-1)} < 2 - A, \quad \sqrt{A^2 - 2(B-1)} < 2 + A.$$

Отсюда, во-первых, следует, что

$$2 - A > 0, \quad 2 + A > 0$$

или

$$A^2 < 4, \tag{8.99″}$$

и, во-вторых, что

$$B+1>2A>-B-1,$$

откуда

$$B+1>0, \quad A^2<\left(\frac{B+1}{2}\right)^2. \tag{8.99'''}$$

Условия (8.99′), (8.99″) и (8.99‴) равносильны следующим:

$$\left.\begin{aligned} &-1<B<3, \\ &2(B-1)<A^2<\left(\frac{B+1}{2}\right)^2. \end{aligned}\right\} \tag{8.100}$$

При этих условиях корни уравнения (8.99) вещественны, различны и по числовым значениям меньше единицы, а потому корни уравнения (8.98) различны и имеют модули, равные единице.

В предельных случаях неравенств (8.100) получается следующее.

При $B=3$ должно быть $A^2=4$ и оба корня уравнения (8.99) равны либо $+1$, либо -1, а следовательно, все четыре корня уравнения (8.98) равны также либо $+1$, либо -1.

При $B=-1$ должно быть $A=0$, а поэтому один корень уравнения (8.99) равен $+1$, а другой -1, и, следовательно, два корня уравнения (8.98) равны $+1$, а два остальных равны -1.

При $A^2=\left(\frac{B+1}{2}\right)^2$ один корень уравнения (8.99) равен ± 1, а другой представляет вообще правильную дробь. Следовательно, два корня уравнения (8.98) равны ± 1, а остальные два вообще отличны от ± 1.

При $A^2=2(B-1)$ корни уравнения (8.99) равны, будут вообще отличными от ± 1, и следовательно, уравнение (8.98) имеет две пары равных корней, вообще отличных от ± 1.

В непредельных случаях условий (8.100) нулевое решение системы (8.94), несомненно, устойчиво, а поэтому невозмущенное лагранжево движение будет устойчиво, по крайней мере в первом приближении.

Предельные случаи требуют еще дополнительных исследований, которых мы касаться не будем.

Вся наша задача приводится теперь к вычислению инвариантов A и B и проверке условий (8.100).

Мы и перейдем теперь к краткому изложению результатов А. М. Ляпунова, относящихся к этой последней задаче.

2. Как уже было отмечено, инварианты A и B могут быть вычислены только каким-нибудь приближенным способом. Например, для приближенного вычисления инвариантов мы можем воспользоваться общей теоремой Ляпунова, рассмотренной в главе I, согласно которой всякие функции, удовлетворяющие

предложенной системе линейных уравнений с периодическими коэффициентами, а также коэффициенты характеристичного уравнения суть голоморфные функции параметров, от которых зависят (голоморфным образом) коэффициенты системы.

Из этой теоремы вытекают для интересующей нас системы (8.94) два способа приближенного вычисления инвариантов A и B. Одним из этих способов можно пользоваться всегда, хотя практически он может быть полезен только в том случае, когда масса одной из точек весьма велика по сравнению с массами двух остальных: другим — когда рассматриваемое невозмущенное периодическое движение достаточно близко к постоянному. Для случая ньютонова закона притяжения, который нас главным образом интересует, второй способ дает, следовательно, возможность решить задачу об устойчивости, когда эксцентриситет орбит точек в лагранжевом движении достаточно близок к нулю.

Мы рассмотрим принципиальную сторону применения этих способов, не воспроизводя всех длинных и громоздких выкладок, с ними связанных, которые в мемуаре Ляпунова подробно выполнены.

В первом способе мы можем принять за параметр, входящий голоморфным образом в периодические коэффициенты исследуемых уравнений, постоянную λ, относительно которой коэффициенты системы (8.94) голоморфны при всех вещественных ее значениях.

Поэтому на основании упомянутой теоремы мы можем утверждать, что функции X и Y, удовлетворяющие системе (8.94), и инварианты A и B могут быть представлены рядами, расположенными по целым положительным степеням λ и абсолютно сходящимися для всякого значения λ. Положим поэтому

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n P_n(\vartheta), \quad Y = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n Q_n(\vartheta), \tag{8.101}$$

где P_n и Q_n — неопределенные коэффициенты.

Требуя, чтобы ряды (8.101) удовлетворяли уравнениям (8.94), мы получим для нахождения коэффициентов этих рядов следующие системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} P_0'' - 2Q_0' - uP_0 &= 0, \\ Q_0'' + 2P_0' \qquad &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{8.102}$$

и для $n > 0$:

$$\left.\begin{aligned} P_n'' - 2Q_n' - uP_n &= -uP_{n-1}, \\ Q_n'' + 2P_n' \qquad &= \quad uQ_{n-1}. \end{aligned}\right\} \tag{8.102'}$$

Но уравнения (8.102) имеют такой же вид, как и уравнения (8.80), и следовательно, интегрируются в квадратурах.

Поэтому и все функции P_n, Q_n $(n > 0)$ могут быть определены последовательно, в порядке возрастания n, путем квадратур. Произвольные постоянные, возникающие при интегрировании каждой из систем (8.102′), будем определять таким образом, чтобы

$$P_n(0) = P_n'(0) = Q_n(0) = Q_n'(0) = 0. \tag{8.103}$$

Постоянные же, введенные интегрированием системы (8.102), можно определить так, чтобы

$$P_0(0) = X_0, \quad P_0'(0) = X_0', \quad Q_0(0) = Y_0, \quad Q_0'(0) = Y_0', \tag{8.103′}$$

где X_0, Y_0, X_0', Y_0' — заданные начальные значения функций X, Y и их первых производных, соответствующие $\vartheta = 0$.

Тогда формулы, определяющие функции P_0 и Q_0, можно представить в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} P_0(\vartheta) &= X_0 + X_0'\frac{v'}{v_0''} + v'\int_0^{\vartheta}\frac{2C_1(v - v_0) + (v'' - v_0'')X_0}{v'^2}\,d\vartheta, \\ Q_0(\vartheta) &= Y_0 + C_1\vartheta - 2\int_0^{\vartheta} P_0\,d\vartheta, \end{aligned}\right\} \tag{8.104}$$

где

$$v,\ v',\ v'',\ v_0,\ v_0'',\quad C_1 = 2X_0 + Y_0' \tag{8.104′}$$

суть известные функции ϑ и известные постоянные.

Далее, для $n > 0$ имеем следующие формулы:

$$P_n(\vartheta) = v'\int_0^{\vartheta}\frac{S_n\,d\vartheta}{v'^2}, \quad Q_n(\vartheta) = \int_0^{\vartheta} R_n\,d\vartheta - 2\int_0^{\vartheta} P_n\,d\vartheta, \tag{8.105}$$

где положено для краткости

$$R_n = \int_0^{\vartheta} uQ_{n-1}\,d\vartheta, \quad S_n = \int_0^{\vartheta}(2R_n - uP_{n-1})\,v'\,d\vartheta. \tag{8.105′}$$

Из формул (8.104) и (8.105) выводятся формулы для определения постоянных $P_n(\Omega)$, $P_n'(\Omega)$, $Q_n(\Omega)$, $Q_n'(\Omega)$, которые необходимы для вычисления элементов матрицы $\|A_{ij}\|$, а следовательно, для вычисления инвариантов A и B.

Окончательные формулы для этих постоянных имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
&P_0(\Omega)=X_0,\\
&P_0'(\Omega)=X_0v_0''\int\limits_0^\Omega\frac{4(v-v_0)+v''-v_0''}{v'^2}\,d\vartheta+\\
&\qquad\qquad+X_0'+2Y_0'v_0''\int\limits_0^\Omega\frac{(v-v_0)\,d\vartheta}{v'^2},\\
&Q_0(\Omega)=2X_0\int\limits_0^\Omega\frac{(v-v_0)\left[4(v-v_0)+v''-v_0''\right]d\vartheta}{v'^2}+\\
&\qquad\qquad+Y_0+Y_0'\left\{\Omega+4\int\limits_0^\Omega\frac{(v-v_0)^2\,d\vartheta}{v'^2}\right\},
\end{aligned}\right\}\tag{8.106}$$

$$\left.\begin{aligned}
&Q_0'(\Omega)=Y_0',\\
&P_n(\Omega)=-\frac{1}{v_0''}\int\limits_0^\Omega(2R_n-uP_{n-1})\,v'\,d\vartheta,\\
&P_n'(\Omega)=\int\limits_0^\Omega(2R_n-uP_{n-1})(1+V_1v')\,d\vartheta-\\
&\qquad\qquad-V_1(\Omega)\int\limits_0^\Omega(2R_n-uP_{n-1})\,v'\,d\vartheta,\\
&Q_n(\Omega)=\int\limits_0^\Omega R_n\,d\vartheta-2\int\limits_0^\Omega(2R_n-uP_{n-1})\,Vv'\,d\vartheta+\\
&\qquad\qquad+2V(\Omega)\int\limits_0^\Omega(2R_n-uP_{n-1})\,v'\,d\vartheta,\\
&Q_n'(\Omega)=R_n(\Omega)+\frac{2}{v_0''}\int\limits_0^\Omega(2R_n-uP_{n-1})\,v'\,d\vartheta,
\end{aligned}\right\}\tag{8.106'}$$

где положено вдобавок для краткости

$$V(\vartheta)=\int\limits_0^\vartheta\frac{(v-v_0)\,d\vartheta}{v'^2},\qquad V_1(\vartheta)=\int\limits_0^\vartheta\frac{(v''-v_0'')\,d\vartheta}{v'^2}.\tag{8.106''}$$

Когда все постоянные (8.106) и (8.106′), которые будут линейными однородными функциями X_0, X_0', Y_0, Y_0', найдены, инварианты A и B определятся следующим образом. Пусть

$$\left.\begin{aligned} P_n(\Omega) &= (a, a)_n X_0 + (a, a')_n X_0' + (a, b)_n Y_0 + (a, b')_n Y_0', \\ P_n'(\Omega) &= (a', a)_n X_0 + (a', a')_n X_0' + (a', b)_n Y_0 + (a', b')_n Y_0', \\ Q_n(\Omega) &= (b, a)_n X_0 + (b, a')_n X_0' + (b, b)_n Y_0 + (b, b')_n Y_0', \\ Q_n'(\Omega) &= (b', a)_n X_0 + (b', a')_n X_0' + (b', b)_n Y_0 + (b', b')_n Y_0', \end{aligned}\right\} \tag{8.107}$$

где все коэффициенты $(a, a)_n$, $(a, a')_n$, ... — известные постоянные.

Тогда инварианты A_{ij} характеристичного уравнения, соответствующего периоду Ω, представятся рядами вида

$$A_{11} = \sum_{n=0}^{\infty} (a, a)_n \lambda^n, \quad A_{12} = \sum_{n=0}^{\infty} (a', a)_n \lambda^n, \ \ldots, \quad A_{44} = \sum_{n=0}^{\infty} (b', b')_n \lambda^n,$$

а развертывая определитель $D(q)$, получим также инварианты A и B в виде рядов такого же вида.

Предыдущие формулы могут служить для решения вопроса об устойчивости при достаточно малых значениях λ, для чего достаточно составить только немногие первые члены разложений A и B по степеням λ *).

Покажем, как получить такие формулы. Из формул (8.106) имеем

$$(a, a)_0 = (a', a')_0 = (b, b)_0 = (b', b')_0 = 1,$$

вследствие чего характеристичное уравнение (8.96′) может быть представлено в виде

$$(1-q)^4 + \sum_{n=1}^{\infty} \{K_n (1-q)^3 + L_n (1-q)^2 + M_n (1-q) + N_n\} \lambda^n = 0, \tag{8.108}$$

где K_n, L_n, M_n, N_n — величины, не зависящие ни от q, ни от λ.

Но уравнение (8.108) должно приводиться к виду (8.98), вследствие чего между четырьмя величинами K_n, L_n, M_n, N_n должно существовать два соотношения

$$K_n + L_n = -\frac{M_n}{2} = N_n, \tag{8.108′}$$

так что для каждого значения n достаточно вычислить только две величины K_n и N_n.

---

*) Заметим, что при $\lambda = 0$ уравнения (8.94) приводятся к виду (8.80), откуда следует, что в этом случае имеем неустойчивость. Но это не исключает возможности устойчивости для достаточно малых значений λ, так как при $\lambda = 0$ все четыре корня характеристичного уравнения равны единице.

Нетрудно видеть, что первая определяется формулой

$$K_n = (a, a)_n + (a', a')_n + (b, b)_n + (b', b')_n. \tag{8.109}$$

Что же касается второй, то, замечая, что из (8.106′) следует

$$(a, a')_0 = 0, \quad (a, b)_0 = 0, \quad (a, b')_0 = 0, \quad (a', b)_0 = 0,$$
$$(b, a')_0 = 0, \quad (b', a)_0 = 0, \quad (b', a')_0 = 0, \quad (b', b)_0 = 0,$$

получаем для определения ее тождественное относительно λ равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} N_n \lambda^n = \| A_{ij}(\lambda) \| - \| A_{ij}(0) \|. \tag{8.110}$$

Из этого равенства находим $N_1 = 0$,

$$N_2 = \begin{vmatrix} (a', a)_0, & (b, a)_0 \\ (a', b')_0, & (b, b')_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} (a, a')_1, & (a, b)_1 \\ (b', a')_1, & (b', b)_1 \end{vmatrix} \tag{8.110'}$$

и так далее.

Теперь, имея в виду (8.108′), находим для инвариантов A и B следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} A &= 2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} K_n \lambda^n, \\ B &= 3 + K_1 \lambda + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (2K_n + N_n) \lambda^n. \end{aligned}\right\} \tag{8.111}$$

Вследствие этого условия устойчивости (8.100) приводятся к виду

$$\left.\begin{aligned} -4 < K_1 \lambda + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (2K_n + N_n) \lambda^n < 0, \\ N_2 \lambda^2 + \left(\frac{1}{4} K_1 N_2 + N_3\right) \lambda^3 + \ldots > 0, \\ \left(\frac{1}{4} K_1^2 - N_2\right) \lambda^2 + \left(\frac{1}{2} K_1 K_2 - N_3\right) \lambda^3 + \ldots > 0, \end{aligned}\right\} \tag{8.112}$$

где невыписанные члены содержат степени λ выше третьей.

Отсюда видно, что условиями устойчивости периодических лагранжевых движений при достаточно малых значениях λ вообще служат неравенства

$$K_1 < 0, \quad 0 < N_2 < \frac{1}{4} K_1^2. \tag{8.112'}$$

Если же $N_2 = 0$, то условия устойчивости имеют вид

$$K_1 < 0, \quad N_3 > 0. \tag{8.112''}$$

Заметим, что $\lambda = 0$, когда $m_0 = \infty$. Поэтому достаточно малые значения λ мы будем получать, когда масса m_0 достаточно велика по сравнению с массами m_1 и m_2. Это обстоятельство и имеет обычно место в астрономических задачах.

Если применить приведенные формулы для случая закона Ньютона, когда невозмущенное движение является эллиптическим, то в результате получим следующие выражения величин, входящих в условия устойчивости:

$$N_2 = 0, \tag{8.113}$$

$$K_1 = -\frac{36\pi^2(1+e^2)}{(1-e^2)^{5/2}} < 0, \tag{8.113'}$$

$$N_3 = \left[\frac{36\pi^2}{e^2(1-e^2)}\left(\frac{1+e^2}{\sqrt{1-e^2}} - 1\right)\right]^2 > 0. \tag{8.113''}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае выполняются условия (8.112′) и мы приходим к следующему результату:

В случае притяжения, обратно пропорционального квадрату расстояния, всякое периодическое лагранжево движение устойчиво, если масса одной из точек достаточно велика по сравнению с массами двух остальных.

3. В заключение рассмотрим вкратце, как решается задача об устойчивости, когда невозмущенное движение достаточно близко к постоянному лагранжеву движению. При этом будем предполагать, что тела, движения которых нас интересуют, притягиваются по закону Ньютона. Тогда функция u в уравнениях (8.94) определяется формулой

$$u = 3g\rho, \tag{8.114}$$

где

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\vartheta}, \tag{8.114'}$$

причем a есть большая полуось эллиптической орбиты, которую описывает каждая из масс m_1 и m_2 вокруг массы m_0.

Как известно, ρ может быть представлено в виде ряда, расположенного по степеням эксцентриситета орбиты e, абсолютно сходящегося при всех действительных значениях ϑ, пока $0 \leqslant e < \bar{e} = 0{,}6627\ldots$

Отсюда следует на основании теоремы Ляпунова, которой мы уже пользовались в предыдущем разделе по отношению к параметру λ, что функции X, Y, удовлетворяющие уравнениям (8.94), а также инварианты A и B характеристичного уравнения также могут быть представлены в виде рядов, расположенных по степеням эксцентриситета e, абсолютно сходящихся при $e < \bar{e}$.

Таким образом, будем иметь

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} e^n X_n(\vartheta), \qquad Y = \sum_{n=0}^{\infty} e^n Y_n(\vartheta) \tag{8.115}$$

и подобным же образом

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} e^n A_n, \qquad B = \sum_{n=0}^{\infty} e^n B_n. \tag{8.116}$$

Для нахождения решения (8.115) нужно проделать вычисления, совершенно аналогичные тем, которые были необходимы в предыдущем разделе, а затем таким же образом, как и ранее, составить характеристичное уравнение и вывести условия устойчивости. Все эти вычисления и выкладки проделаны в мемуаре Ляпунова для общего случая, когда закон притяжения остается произвольным, а затем из полученных условий выведены условия для интересующего нас случая.

Но если рассматривать только ньютонов закон притяжения, как мы и предполагаем, то общие выкладки Ляпунова оказываются здесь ненужными и окончательный результат можно получить совершенно элементарным путем.

Действительно, положим сначала $e = 0$, т. е. рассмотрим постоянное (круговое) лагранжево движение.

Тогда

$$\left.\begin{aligned} \rho &= a, \\ u &= 3ga = \text{const}, \end{aligned}\right\} \tag{8.117}$$

и общее решение уравнений (8.94) дается формулами (8.87), в которых k_1 и k_2 определяются из биквадратного уравнения (8.88).

Рассматривая круговое движение как периодическое с периодом 2π, мы можем определить соответствующие ему инварианты A_0 и B_0 из формул (8.78′), где, по свойствам характеристических показателей, нужно положить $\theta_1 = 2\pi k_1$, $\theta_2 = 2\pi k_2$. Тогда найдем

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \cos 2\pi k_1 + \cos 2\pi k_2, \\ B_0 &= 1 + 2\cos 2\pi k_1 \cos 2\pi k_2. \end{aligned}\right\} \tag{8.118}$$

Выше было показано, что круговое лагранжево движение будет устойчивым, если выполняется условие

$$\frac{(m_0 + m_1 + m_2)^2}{m_0 m_1 + m_0 m_2 + m_1 m_2} > 27, \tag{8.119}$$

и в этом случае k_1^2 и k_2^2 вещественны, различны и положительны.

Тогда из самого факта устойчивости при условии (8.119) или непосредственно из формул (8.118) найдем, что инварианты A_0 и B_0 удовлетворяют условиям (8.110).

Но A_0 и B_0 — значения инвариантов A и B при $e = 0$. Поэтому при $e = 0$ условия устойчивости (8.110) выполняются.

Но так как A и B — непрерывные функции эксцентриситета орбиты (8.114′), то условия (8.110), выполняясь при $e = 0$, будут, по непрерывности, выполняться и при значениях эксцентриситета, не равных нулю, но достаточно малых.

Поэтому можем утверждать, что

Если массы трех тел удовлетворяют условию (8.119), *то при законе притяжения, обратно пропорционального квадрату расстояния, всякое лагранжево периодическое движение, достаточно близкое к постоянному, остается устойчивым.*

Примечание. Полезно еще раз напомнить, что в случае периодических лагранжевых движений имеется в виду орбитальная устойчивость в определенном выше смысле и что задача об устойчивости рассмотрена только в первом приближении.