

Г л а в а IX

ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ НЕИЗМЕНЯЕМЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

До сих пор мы рассматривали задачи о движении систем материальных точек, подразумевая под этим либо движения тел весьма малых размеров, либо тел, находящихся на весьма больших расстояниях друг от друга. Мы знаем также что однородные шары либо шары, обладающие сферической структурой, элементарные частицы которых взаимно притягиваются по закону Ньютона, ведут себя так же, как материальные точки, и притягиваются взаимно с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния между их центрами.

Но несферические тела взаимодействуют друг с другом, как это показывается в теории притяжения, по законам более сложным, даже в том случае, когда их элементарные частицы подчиняются закону Ньютона.

В этом случае силы притяжения вызывают также вращательные моменты, так что общее движение каждого из притягивающихся тел складывается из их поступательных движений, т. е. движений их центров масс, и из вращательных движений тел вокруг центров масс.

Так обстоит дело с неизменяемыми телами или системами, к которым относятся, например, абсолютно твердые тела или системы тел, а также системы материальных точек, находящихся на неизменных расстояниях друг от друга.

В настоящее время задача о поступательно-вращательном движении твердых тел (или тел, которые могут быть рассмотрены как абсолютно твердые) играет значительную роль в современной небесной механике, особенно в том ее разделе, который посвящен изучению движений искусственных небесных тел.

Поэтому включение основных положений теории движения твердых тел в нашу книгу вполне оправдано и даже необходимо.

При этом мы не будем ограничиваться рассмотрением случаев задач, основой которых является закон Ньютона. Мы будем рассматривать, так же как и в других частях этой книги, законы сил более общие, для которых закон Ньютона является одним из частных случаев.

Заметим еще, что для естественных (или искусственных) тел природы абсолютное твердое тело является также только моделью, представляющей собой следующий шаг на пути приближения к действительности. Следующим за этим шагом являлось бы рассмотрение нетвердых тел, например, идеально жидких, но построение такой теории пока еще далеко от осуществления и мы ее затрагивать вовсе не будем.

§ 1. Постановка задачи. Общие уравнения движения

1. Пусть нам задана система, состоящая из конечного числа абсолютно твердых тел T_0, T_1, \dots, T_n , каждое из которых имеет определенную, заданную структуру, неизменную форму и постоянную конечную массу m_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$). Каждое из этих тел может быть трехмерным, двумерным (материальная поверхность или простой слой) или одномерным (материальная линия; например, материальный отрезок прямой или материальная окружность).

Предположим, что каждая элементарная частица dm_i тела T_i , сосредоточенная в точке M_i , находится под действием силы, источником которой является элементарная частица dm_j тела T_j , сосредоточенная в точке M_j ($i, j = 0, 1, 2, \dots, n; j \neq i$).

Далее, будем предполагать, что эта сила всегда направлена по прямой, проходящей через точки M_i и M_j и пропорциональна произведению масс частиц $dm_i dm_j$ и некоторой функции F_{ij} от времени t , взаимного расстояния $\Delta_{ij} = M_i M_j$, а также вообще от двух первых его производных $\dot{\Delta}_{ij}$ и $\ddot{\Delta}_{ij}$. Постоянный, или зависящий от времени, множитель пропорциональности мы включим для упрощения в функцию, определяющую закон силы.

Частным случаем сил такого рода является, например, сила притяжения или отталкивания по закону Ньютона, когда

$$F_{ij} = \frac{f_{ij}}{\Delta_{ij}^2}.$$

Другим примером может служить закон Вебера, уже неоднократно нами упоминавшийся, когда

$$F_{ij} = \frac{f_{ij}}{\Delta_{ij}^2} \left[1 - \frac{\dot{\Delta}_{ij}^2}{\sigma_{ij}^2} + \frac{2\Delta_{ij}\ddot{\Delta}_{ij}}{\sigma_{ij}^2} \right].$$

Во всех случаях мы, вообще говоря, будем допускать, что третья аксиома ньютоновской механики может и не иметь места, т. е. что вообще

$$F_{ji} \neq F_{ij},$$

так что сила, с которой частица M_j действует на частицу M_i , вообще не равна силе, с которой частица M_i действует на M_j .

2. Уравнения движения системы твердых тел составляются совершенно так же, как это было сделано в первой нашей книге «Небесная механика. Основные задачи и методы» (изд. 3-е, 1975), где принималось, что силы, действующие между всякими двумя частицами, определяются только законом Ньютона.

Выберем каким-либо образом декартову систему координат с началом в фиксированной точке O и с неизменными направлениями осей. Пусть ξ'_i , η'_i , ζ'_i обозначают абсолютные координаты точки M_i тела T_i в этой системе координат.

Тогда расстояние $\overline{M_i M_j}$ определится известной формулой

$$\Delta_{ij}^2 = (\xi'_j - \xi'_i)^2 + (\eta'_j - \eta'_i)^2 + (\zeta'_j - \zeta'_i)^2. \quad (9.1)$$

Проекции на оси ($O\xi$), ($O\eta$), ($O\zeta$) силы, действующей на точку M_i со стороны точки M_j , будут соответственно

$$F_{ij} \frac{\xi'_j - \xi'_i}{\Delta_{ij}} dm_i dm_j, \quad F_{ij} \frac{\eta'_j - \eta'_i}{\Delta_{ij}} dm_i dm_j, \quad F_{ij} \frac{\zeta'_j - \zeta'_i}{\Delta_{ij}} dm_i dm_j.$$

Выберем далее для каждого тела T_i некоторую точку G_i , неизменно связанную с телом (но не обязательно принадлежащую ему), координаты которой обозначим через ξ_i , η_i , ζ_i . Эту точку будем называть «центром приведения» для тела T_i . В частности, за точку G_i можно принять центр масс (или центр инерции) тела T_i , определяемый известными формулами

$$\xi_i = \frac{1}{m_i} \int_{(T_i)} \xi'_i dm_i, \quad \eta_i = \frac{1}{m_i} \int_{(T_i)} \eta'_i dm_i, \quad \zeta_i = \frac{1}{m_i} \int_{(T_i)} \zeta'_i dm_i. \quad (9.2)$$

Если, например, тело T_i есть шар или шаровой слой, то за точку G_i удобнее всего взять центр шара (шарового слоя). Если шар или слой однороден или обладает сферической структурой, то точка G_i в этом случае будет также и центром масс тела T_i . Но если шар неоднороден и структура его не обладает сферической симметрией, то центр шара не будет его центром масс и точка G_i будет только одним из возможных центров приведения.

Проекции момента силы, приложенной к точке M_i , относительно центра приведения G_i на оси абсолютной системы координат, будут соответственно

$$F_{ij} \times \frac{(\eta'_i - \eta_i)(\xi'_j - \xi'_i) - (\xi'_i - \xi_i)(\eta'_j - \eta'_i)}{\Delta_{ij}} dm_i dm_j,$$

$$F_{ij} \times \frac{(\zeta'_i - \zeta_i)(\xi'_j - \xi'_i) - (\xi'_i - \xi_i)(\zeta'_j - \zeta'_i)}{\Delta_{ij}} dm_i dm_j,$$

$$F_{ij} \times \frac{(\xi'_i - \xi_i)(\eta'_j - \eta'_i) - (\eta'_i - \eta_i)(\xi'_j - \xi'_i)}{\Delta_{ij}} dm_i dm_j.$$

Теперь можем составить проекции равнодействующей всех сил, действующих на частицы тела T_i , приложенной к центру приведения G_i . Эти проекции определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} \Xi_{ij} &= \int_{(T_i)} dm_i \int_{(T_j)} F_{ij} \frac{\xi'_j - \xi'_i}{\Delta_{ij}} dm_j, \\ H_{ij} &= \int_{(T_i)} dm_i \int_{(T_j)} F_{ij} \frac{\eta'_j - \eta'_i}{\Delta_{ij}} dm_j, \\ Z_{ij} &= \int_{(T_i)} dm_i \int_{(T_j)} F_{ij} \frac{\zeta'_j - \zeta'_i}{\Delta_{ij}} dm_j, \end{aligned} \right\} \quad (9.3)$$

где каждый интеграл распространен на всю массу тела T_i и всю массу тела T_j . Если T_i и T_j — тела объемные, то каждый интеграл в (9.3) есть шестикратный. Если каждое тело есть материальная линия, то каждый интеграл в (9.3) — двукратный. Таким образом, каждый из этих интегралов может иметь, в зависимости от рода тел T_i и T_j , любую кратность, не меньшую 2 и не большую 6.

Формулы (9.3) определяют силу, приложенную к точке G_i тела T_i , вызванную присутствием тела T_j . Поэтому, чтобы получить равнодействующую всех сил, действующих на тело T_i от всех других n тел, нужно выражения (9.3) просуммировать по индексу j , что дает проекции полной силы, действующей на тело T_i , приложенной к G_i :

$$\Xi_i = \sum_{j=0}^n \Xi_{ij}, \quad H_i = \sum_{j=0}^n H_{ij}, \quad Z_i = \sum_{j=0}^n Z_{ij}. \quad (9.3')$$

Проекции момента силы (9.3), действующей на T_i , относительно центра приведения G_i даются следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} L_{ij} &= \int_{(T_i)} dm_i \int_{(T_j)} F_{ij} \frac{(\eta'_i - \eta'_i)(\xi'_j - \xi'_i) - (\xi'_i - \xi'_i)(\eta'_j - \eta'_i)}{\Delta_{ij}} dm_i dm_j, \\ M_{ij} &= \int_{(T_i)} dm_i \int_{(T_j)} F_{ij} \frac{(\xi'_i - \xi'_i)(\xi'_j - \xi'_i) - (\xi'_i - \xi'_i)(\zeta'_j - \zeta'_i)}{\Delta_{ij}} dm_i dm_j, \\ N_{ij} &= \int_{(T_i)} dm_i \int_{(T_j)} F_{ij} \frac{(\xi'_i - \xi'_i)(\eta'_j - \eta'_i) - (\eta'_i - \eta'_i)(\xi'_j - \xi'_i)}{\Delta_{ij}} dm_i dm_j, \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

а проекции момента равнодействующей всех сил (9.3') относительно центра приведения тела T_i будут соответственно

$$L_i = \sum_{j=0}^n L_{ij}, \quad M_i = \sum_{j=0}^n M_{ij}, \quad N_i = \sum_{j=0}^n N_{ij}. \quad (9.4')$$

Все интегралы в формулах (9.3) и (9.4) являются функциями от координат точек G_i , G_j , а также от их производных первого и второго порядка. Эти интегралы могут также содержать явно время t , если последнее входит в законы сил.

3. Введем теперь для каждого тела T_i «собственную систему координат» $(G_i x'_i y'_i z'_i)$ с началом в центре приведения G_i и с осями, неизменно связанными с телом T_i .

Тогда абсолютные координаты любой точки M_i тела T_i выражаются через координаты x'_i , y'_i и z'_i той же точки в собственной системе координат следующими очевидными формулами:

$$\left. \begin{aligned} \xi'_i &= \xi_i + a_{11}^{(i)}x'_i + a_{12}^{(i)}y'_i + a_{13}^{(i)}z'_i, \\ \eta'_i &= \eta_i + a_{21}^{(i)}x'_i + a_{22}^{(i)}y'_i + a_{23}^{(i)}z'_i, \\ \zeta'_i &= \zeta_i + a_{31}^{(i)}x'_i + a_{32}^{(i)}y'_i + a_{33}^{(i)}z'_i, \end{aligned} \right\} \quad (9.5)$$

где $a_{sk}^{(i)}$ — направляющие косинусы, определяющие ориентацию собственной системы координат тела T_i , а следовательно, и самого тела T_i , относительно абсолютной системы по следующей схеме:

	x'_i	y'_i	z'_i
ξ	$a_{11}^{(i)}$	$a_{12}^{(i)}$	$a_{13}^{(i)}$
η	$a_{21}^{(i)}$	$a_{22}^{(i)}$	$a_{23}^{(i)}$
ζ	$a_{31}^{(i)}$	$a_{32}^{(i)}$	$a_{33}^{(i)}$

(9.5')

Эти девять направляющих косинусов (для каждого тела T_i) выражаются, как известно, через три независимых угла, за которые мы примем здесь опять углы Эйлера: угол прецессии ψ_i , угол нутации ϑ_i и угол собственного вращения ϕ_i .

Тогда мы имеем следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}^{(i)} &= \cos \psi_i \cos \varphi_i - \sin \psi_i \sin \varphi_i \cos \theta_i, \\ a_{21}^{(i)} &= \sin \psi_i \cos \varphi_i + \cos \psi_i \sin \varphi_i \cos \theta_i, \\ a_{31}^{(i)} &= \sin \varphi_i \sin \theta_i, \\ a_{12}^{(i)} &= -\cos \psi_i \sin \varphi_i - \sin \psi_i \cos \varphi_i \cos \theta_i, \\ a_{22}^{(i)} &= -\sin \psi_i \sin \varphi_i + \cos \psi_i \cos \varphi_i \cos \theta_i, \\ a_{32}^{(i)} &= \cos \varphi_i \sin \theta_i, \\ a_{13}^{(i)} &= \sin \psi_i \sin \theta_i, \\ a_{23}^{(i)} &= -\cos \psi_i \sin \theta_i, \\ a_{33}^{(i)} &= \cos \theta_i. \end{aligned} \right\} \quad (9.6)$$

В выражения, стоящие под знаками кратных интегралов в формулах (9.3) и (9.4), координаты центров приведения G_i и G_j и эйлеровы углы двух собственных систем координат $(G_i x'_i y'_i z'_i)$ и $(G_j x'_j y'_j z'_j)$ входят непосредственно и через взаимные расстояния по формулам (9.1), (9.5) и (9.6).

Кроме того, так как функции F_{ij} вообще могут зависеть от времени и от производных $\dot{\Delta}_{ij}$ и $\ddot{\Delta}_{ij}$, то подынтегральные выражения будут также содержать первые и вторые производные от координат и эйлеровых углов обоих тел.

Таким образом, каждый интеграл в (9.3) и (9.4) является функцией 37 параметров, которые при вычислении интегралов рассматриваются как величины постоянные. Надо также иметь в виду, что указанные интегралы зависят еще от характеристических постоянных, определяющих формы тел и их внутренние строения.

Такими характеристическими постоянными являются массы тел, координаты точек G_i и G_j , моменты инерции различных порядков и геометрические характеристики внешних поверхностей.

Координаты «текущих» точек M_i и M_j являются переменными интегрирования, и если тело T имеет три измерения, то для него координаты x' , y' , z' являются независимыми. Если же тело T есть материальная поверхность или материальная линия, то координаты точки M связаны одним, соответственно двумя уравнениями и могут быть выражены через две независимые поверхностные координаты или через одну независимую линейную.

Обозначим теперь через P_i , Q_i , R_i проекции момента равнодействующей всех сил, действующих на теле T_i , на собственные

оси этого тела, т. е. положим

$$\left. \begin{aligned} P_i &= L_i a_{11}^{(i)} + M_i a_{21}^{(i)} + N_i a_{31}^{(i)}, \\ Q_i &= L_i a_{12}^{(i)} + M_i a_{22}^{(i)} + N_i a_{32}^{(i)}, \\ R_i &= L_i a_{13}^{(i)} + M_i a_{23}^{(i)} + N_i a_{33}^{(i)}. \end{aligned} \right\} \quad (9.7)$$

Эти величины, так же как и величины (9.3), являются функциями времени и 18 величин, изменяющихся с течением времени при поступательно-вращательном движении тела T_i .

4. Обозначим теперь через p_i, q_i, r_i проекции угловой скорости тела T_i на оси собственной для него системы координат и через A_i, B_i, C_i — моменты инерции этого тела относительно его собственных осей.

Тогда уравнения движения всей системы $n+1$ тел напишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} m_i \ddot{\xi}_i &= \Xi_i, \\ m_i \ddot{\eta}_i &= H_i, \\ m_i \ddot{\zeta}_i &= Z_i, \end{aligned} \right\} \quad (9.8)$$

$$\left. \begin{aligned} A_i \dot{p}_i - (B_i - C_i) q_i r_i &= P_i, \\ B_i \dot{q}_i - (C_i - A_i) r_i p_i &= Q_i, \\ C_i \dot{r}_i - (A_i - B_i) p_i q_i &= R_i. \end{aligned} \right\} \quad (9.9)$$

К этим уравнениям нужно еще присоединить кинематические уравнения Эйлера, выражающие p_i, q_i, r_i через углы Эйлера и их первые производные:

$$\left. \begin{aligned} p_i &= \psi_i \sin \varphi_i \sin \theta_i + \dot{\vartheta}_i \cos \varphi_i, \\ q_i &= \dot{\psi}_i \cos \varphi_i \sin \theta_i - \dot{\vartheta}_i \sin \varphi_i, \\ r_i &= \dot{\psi}_i \cos \theta_i + \dot{\vartheta}_i \end{aligned} \right\} \quad (9.10)$$

$(i = 0, 1, 2, \dots, n).$

Уравнения (9.8) — (9.10) образуют полную систему $6(n+1)$ уравнений второго порядка с таким же числом неизвестных. Этими неизвестными являются координаты центров приведений и эйлеровы углы $n+1$ тел. Но уравнения вообще не разрешены относительно вторых производных от этих неизвестных функций, а поэтому определение всех $6(n+1)$ неизвестных как функций времени и надлежащего числа произвольных постоянных, число которых должно быть равно общему порядку системы, т. е. $12(n+1)$, представляет аналитически неразрешимую задачу.

Если функции F_{ij} не зависят от вторых производных взаимных расстояний, то вторые производные от координат и эйлеровых углов не будут входить в правые части уравнений (9.8) и (9.9) и система всех уравнений легко разрешима относительно вторых производных.

Простейший случай представится тогда, когда функции F_{ij} зависят только от взаимных расстояний, как это имеет место, например, когда система управляема одним законом Ньютона.

Тогда уравнения поступательно-вращательного движения нашей системы $n + 1$ абсолютно твердых тел приводятся к виду

$$\left. \begin{aligned} m_i \ddot{\xi}_i &= \frac{\partial U}{\partial \dot{\xi}_i}, & m_i \ddot{\eta}_i &= \frac{\partial U}{\partial \dot{\eta}_i}, & m_i \ddot{\zeta}_i &= \frac{\partial U}{\partial \dot{\zeta}_i}, \\ \ddot{\psi}_i &= \Psi_i, & \ddot{\phi}_i &= \Phi_i, & \ddot{\theta}_i &= \Theta_i, \end{aligned} \right\} \quad (9.11)$$

где U — общая силовая функция всей системы, определяемая формулой

$$U = \sum_{i < j} U_{ij}, \quad (9.12)$$

а U_{ij} есть силовая функция двух тел, T_i и T_j , элементарные частицы которых взаимодействуют по закону, определяемому функцией F_{ij} , зависящей только от взаимного расстояния между частицами Δ_{ij} . Таким образом, имеем

$$U_{ij} = \int_{(T_i)} \int_{(T_j)} dm_i dm_j F_{ij}(\Delta_{ij}) d\Delta_{ij}. \quad (9.12')$$

Действительно, легко проверить, что в этом случае мы имеем

$$\Xi_i = \frac{\partial U}{\partial \dot{\xi}_i}, \quad H_i = \frac{\partial U}{\partial \dot{\eta}_i}, \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial \dot{\zeta}_i}, \quad (9.13)$$

а проекции равнодействующей момента сил, приложенного к центру приведения G_i , найдутся по формулам

$$\left. \begin{aligned} P_i &= \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\psi}_i} - \cos \vartheta_i \frac{\partial U}{\partial \dot{\phi}_i} \right) \frac{\sin \varphi_i}{\sin \theta_i} + \cos \varphi_i \frac{\partial U}{\partial \dot{\theta}_i}, \\ Q_i &= \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\psi}_i} - \cos \vartheta_i \frac{\partial U}{\partial \dot{\phi}_i} \right) \frac{\cos \varphi_i}{\sin \theta_i} - \sin \varphi_i \frac{\partial U}{\partial \dot{\theta}_i}, \\ R_i &= \frac{\partial U}{\partial \dot{\phi}_i}. \end{aligned} \right\} \quad (9.13')$$

Если правые части уравнений (9.9) заменить выражениями (9.13'), воспользоваться затем уравнениями (9.10) и, наконец, разрешить полученные равенства относительно вторых производных от углов Эйлера, то мы получим вторую строчку уравнений (9.11) и вместе с тем выражения их правых частей Ψ_i ,

Φ_i, Θ_i через координаты точек G_i , эйлеровы углы и их первые производные.

Эти формулы мы здесь приводить не будем. Они имеют совершенно такой же вид, как и формулы, приведенные на стр. 391 3-го издания первой нашей книги «Небесная механика. Основные задачи и методы» (1975).

Там только закон взаимодействия определялся законом Ньютона, общим для всей системы, определяемым силовой функцией каждой пары тел

$$U_{ij} = f \int_{(T_i)} \int_{(T_j)} \frac{dm_i dm_j}{\Delta_{ij}}.$$

В рассматриваемом здесь случае функции F_{ij} не обязательно одинаковы, а поэтому и силовые функции (9.12') являются аналитически более сложными.

5. Уравнения поступательно-вращательного движения в самом общем случае настолько аналитически сложны, что их решение возможно только приближенными методами или путем численных интегрирований, также в этом случае сложных.

Поэтому полезно отметить по крайней мере один случай, когда эти уравнения настолько упрощаются, что иногда их возможно даже проинтегрировать до конца.

Это уже отмечавшийся неоднократно в предыдущих главах случай, когда все действующие силы подчиняются одному и тому же закону Гука, т. е. когда имеем

$$F_{ij} = f_{ij} \times \Delta_{ij}, \quad (9.14)$$

где множители пропорциональности могут быть различными и вообще могут быть функциями времени.

При рассмотрении этого случая предположим для большей простоты, что центр приведения G_i тела T_i совпадает с его центром масс, а собственные оси тела T_i совпадают с главными осями инерции этого тела.

Тогда мы можем воспользоваться формулами (9.2) и соотношениями, выражющими свойства осей инерции:

$$\int_{(T_i)} \eta'_i \zeta'_i dm_i = \int_{(T_i)} \xi'_i \xi'_i dm_i = \int_{(T_i)} \xi'_i \eta'_i dm_i = 0.$$

Теперь формулы (9.3), как легко видеть, дают

$$\Xi_{ij} = f_{ij} (\xi_j - \xi_i) m_i m_j, \quad H_{ij} = f_{ij} (\eta_j - \eta_i) m_i m_j,$$

$$Z_{ij} = f_{ij} (\zeta_j - \zeta_i) m_i m_j,$$

а из формул (9.4) при помощи свойств центра масс и главных осей инерции получим

$$L_{ij} = 0, \quad M_{ij} = 0, \quad N_{ij} = 0.$$

Поэтому уравнения движения напишутся в этом случае в виде

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi}_i &= \sum_{i < j} f_{ij} m_i m_j (\xi_j - \xi_i), \\ \ddot{\eta}_i &= \sum_{i < j} f_{ij} m_i m_j (\eta_j - \eta_i), \\ \ddot{\zeta}_i &= \sum_{i < j} f_{ij} m_i m_j (\zeta_j - \zeta_i), \end{aligned} \right\} \quad (9.15)$$

$$\left. \begin{aligned} A_i \dot{p}_i - (B_i - C_i) q_i r_i &= 0, \\ B_i \dot{q}_i - (C_i - A_i) r_i p_i &= 0, \\ C_i \dot{r}_i - (A_i - B_i) p_i q_i &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.16)$$

Уравнения (9.15) полностью совпадают с уравнениями (8.2'), которые описывают движение системы $n + 1$ материальных точек, взаимодействующих взаимно по закону Гука (8.4'). Таким образом, система $n + 1$ совершенно произвольных по форме и структуре неизменяемых твердых тел, материальные частицы которых также взаимодействуют по закону Гука, движется так, как если бы масса каждого тела была сконцентрирована в его центре масс. При этом уравнения (9.15) совершенно не зависят от уравнений (9.16), т. е. поступательные и вращательные движения тел вовсе не зависят друг от друга.

Кроме того, уравнения (9.16) показывают, что каждое из тел T_i вращается независимо друг от друга по законам Эйлера движения твердого тела вокруг неподвижной точки при отсутствии внешних сил.

Таким образом, уравнения движения системы $n + 1$ тел в этом случае могут быть полностью проинтегрированы и задача разрешается до конца.

Заметим еще, что силовая функция двух тел T_i и T_j в случае закона (9.14) и при указанном выборе собственных систем координат принимает, как легко проверить, вид

$$U_{ij} = \frac{1}{2} f_{ij} m_i m_j R_{ij}^2,$$

где

$$R_{ij}^2 = (\xi_j - \xi_i)^2 + (\eta_j - \eta_i)^2 + (\zeta_j - \zeta_i)^2$$

есть расстояние между центрами масс тел в абсолютной системе координат.

Следовательно, полная силовая функция всей системы тел, как показывает формула (9.12), также имеет простой вид

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i < j} f_{ij} m_i m_j R_{ij}^2, \quad (9.17)$$

т. е. зависит только от координат центров масс тел системы и вовсе не зависит от углов Эйлера. Отсюда опять можем получить уравнения (9.15) и (9.16), используя для этого уравнения (9.11) и формулы (9.13) и (9.13').

П р и м е ч а н и е. Силовая функция системы $n + 1$ твердых тел, элементарные частицы которых взаимодействуют по закону Гука, имеет такой простой вид (9.17) только благодаря специальному выбору собственных систем координат. При произвольном выборе собственных систем силовая функция будет иметь более сложный вид, хотя и представится конечной формулой. Но эта формула будет содержать не только координаты центров масс G_i , но и эйлеровы углы, а поэтому уравнения движения всей системы уже не разделятся на уравнения поступательного и вращательного движения по отдельности.

§ 2. Случай существования первых интегралов уравнений движения твердых тел

При произвольно заданных телах и законах действующих сил уравнения движения системы (9.8)–(9.10) не допускают каких-либо первых интегралов. Однако в некоторых случаях эта система уравнений, так же как и система уравнений движения системы материальных точек, может иметь первые интегралы, аналогичные классическим интегралам задачи многих тел, элементарные частицы которых взаимно притягиваются по закону Ньютона, что было показано нами в первой нашей книге.

1. Рассмотрим сначала систему уравнений (9.8), из которых выведем три следующих уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^n m_i \ddot{\xi}_i &= \sum_{i=0}^n \Xi_i = \Xi^*, \\ \sum_{i=0}^n m_i \ddot{\eta}_i &= \sum_{i=0}^n H_i = H^*, \\ \sum_{i=0}^n m_i \ddot{\zeta}_i &= \sum_{i=0}^n Z_i = Z^*. \end{aligned} \right\} \quad (9.18)$$

Отсюда, так же как и в § 1 главы VIII, немедленно выводим, что для существования интегралов движения центра масс