Следовательно, полная силовая функция всей системы тел, как показывает формула (9.12), также имеет простой вид

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i<j} f_{ij} m_i m_j R_{ij}^2, \tag{9.17}$$

т. е. зависит только от координат центров масс тел системы и вовсе не зависит от углов Эйлера. Отсюда опять можем получить уравнения (9.15) и (9.16), используя для этого уравнения (9.11) и формулы (9.13) и (9.13′).

Примечание. Силовая функция системы $n+1$ твердых тел, элементарные частицы которых взаимодействуют по закону Гука, имеет такой простой вид (9.17) только благодаря специальному выбору собственных систем координат. При произвольном выборе собственных систем силовая функция будет иметь более сложный вид, хотя и представится конечной формулой. Но эта формула будет содержать не только координаты центров масс G_i, но и эйлеровы углы, а поэтому уравнения движения всей системы уже не разделятся на уравнения поступательного и вращательного движения по отдельности.

§ 2. Случаи существования первых интегралов уравнений движения твердых тел

При произвольно заданных телах и законах действующих сил уравнения движения системы (9.8)—(9.10) не допускают каких-либо первых интегралов. Однако в некоторых случаях эта система уравнений, так же как и система уравнений движения системы материальных точек, может иметь первые интегралы, аналогичные классическим интегралам задачи многих тел, элементарные частицы которых взаимно притягиваются по закону Ньютона, что было показано нами в первой нашей книге.

1. Рассмотрим сначала систему уравнений (9.8), из которых выведем три следующих уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} m_i \ddot{\xi}_i &= \sum_{i=0}^{n} \Xi_i = \Xi^*, \\ \sum_{i=0}^{n} m_i \ddot{\eta}_i &= \sum_{i=0}^{n} \mathrm{H}_i = \mathrm{H}^*, \\ \sum_{i=0}^{n} m_i \ddot{\zeta}_i &= \sum_{i=0}^{n} \mathrm{Z}_i = \mathrm{Z}^*. \end{aligned}\right\} \tag{9.18}$$

Отсюда, так же как и в § 1 главы VIII, немедленно выводим, что для существования интегралов движения центра масс

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$F_{ji} = F_{ij} \qquad (i, j = 0, 1, \ldots, n), \tag{9.19}$$

указывающие, что в рассматриваемой системе должна выполняться третья аксиома ньютоновской механики.

Действительно, если условия (9.19) выполнены, то

$$\Xi^* \equiv 0, \quad \mathrm{H}^* \equiv 0, \quad \mathrm{Z}^* = 0$$

и из (9.18) мы имеем обычные интегралы движения центра масс

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{n} m_i \dot{\xi}_i = a_1, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i \xi_i = a_1 t + b_1, \\ &\sum_{i=0}^{n} m_i \dot{\eta}_i = a_2, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i \eta_i = a_2 t + b_2, \\ &\sum_{i=0}^{n} m_i \dot{\zeta}_i = a_3, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i \zeta_i = a_3 t + b_3, \end{aligned}\right\} \tag{9.20}$$

показывающие, что центр масс всей системы конечного числа абсолютно твердых тел движется относительно абсолютных осей прямолинейно и равномерно.

Если мы обозначим, как и в § 1 главы II, абсолютные координаты центра масс всей системы тел через $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$, то из (9.18), при отсутствии условий (9.19), получаем следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} &m\frac{d\bar{\xi}}{dt} = a_1 + \int_{t_0}^{t} \Xi^* \, dt, \quad m\bar{\xi} = a_1 t + b_1 + \int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} \Xi^* \, dt, \\ &m\frac{d\bar{\eta}}{dt} = a_2 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{H}^* \, dt, \quad m\bar{\eta} = a_2 t + b_2 + \int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} \mathrm{H}^* \, dt, \\ &m\frac{d\bar{\zeta}}{dt} = a_3 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{Z}^* \, dt, \quad m\bar{\zeta} = a_3 t + b_3 + \int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} \mathrm{Z}^* \, dt, \end{aligned}\right\} \tag{9.20'}$$

где

$$m = \sum_{i=0}^{n} m_i$$

есть полная масса всей системы $n+1$ тел T_i, а a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 — произвольные постоянные.

Из (9.20′) следует, что если координаты всех точек G_i известны, то координаты общего центра масс G всей системы тел также будут известны.

Разумеется, что при выполнении условий (9.19) соотношения (9.20′) превращаются в интегралы (9.20).

Введем теперь относительную систему координат с началом в центре масс G_0 тела T_0 и с осями, соответственно параллельными абсолютным осям. Положим

$$x_i = \xi_i - \xi_0, \quad y_i = \eta_i - \eta_0, \quad z_i = \zeta_i - \zeta_0. \tag{9.21}$$

Тогда вместо уравнений (9.8) будем иметь следующие уравнения с неизвестными функциями (9.21):

$$\left.\begin{aligned} m_i\ddot{x}_i &= X_i = \Xi_i - \frac{m_i}{m_0}\Xi_0, \\ m_i\ddot{y}_i &= Y_i = \mathrm{H}_i - \frac{m_i}{m_0}\mathrm{H}_0, \\ m_i\ddot{z}_i &= Z_i = \mathrm{Z}_i - \frac{m_i}{m_0}\mathrm{Z}_0 \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{9.22}$$

правые части которых содержат только относительные координаты и эйлеровы углы (уравнения (9.9), очевидно, не изменяются), так же как и производные от этих величин первого и второго порядка.

Если вообразить на мгновение, что функции (9.21) и эйлеровы углы всех $n+1$ тел определены, то нужно будет еще определить абсолютные координаты точки G_0, интегрируя уравнения

$$m_0\ddot{\xi}_0 = \Xi_0, \quad m_0\ddot{\eta}_0 = \mathrm{H}_0, \quad m_0\ddot{\zeta}_0 = \mathrm{Z}_0, \tag{9.22′}$$

в которых ξ_i, η_i, ζ_i для $i \neq 0$ заменены через относительные координаты по формулам (9.21).

Найдя из (9.22′) абсолютные координаты точки G_0, мы можем найти и абсолютные координаты всех остальных точек опять-таки по формулам (9.21).

Заметим, однако, что главным образом и в большинстве случаев бывает нужно знать только относительные движения тел, т. е. точек G_i (центров масс или центров приведения) и вращения каждого из тел относительно его точки G_i. Поэтому в этих случаях задача об определении координат точки G_0 из уравнений (9.22′) оказывается ненужной.

2. Переходим теперь к рассмотрению главного вектора момента количества движения всей системы $n+1$ тел T_i.

Обозначим через c_1, c_2, c_3 проекции этого вектора на абсолютные оси $(O\xi)$, $(O\eta)$, $(O\zeta)$, т. е. положим

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \sum_{i=0}^{n}\left[m_i(\eta_i\dot{\zeta}_i - \zeta_i\dot{\eta}_i) + A_ip_ia_{11}^{(i)} + B_iq_ia_{12}^{(i)} + C_ir_ia_{13}^{(i)}\right],\\ c_2 &= \sum_{i=0}^{n}\left[m_i(\zeta_i\dot{\xi}_i - \xi_i\dot{\zeta}_i) + A_ip_ia_{21}^{(i)} + B_iq_ia_{22}^{(i)} + C_ir_ia_{23}^{(i)}\right].\\ c_3 &= \sum_{i=0}^{n}\left[m_i(\xi_i\dot{\eta}_i - \eta_i\dot{\xi}_i) + A_ip_ia_{31}^{(i)} + B_iq_ia_{32}^{(i)} + C_ir_ia_{33}^{(i)}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (9.23)$$

Дифференцируя выражения (9.23) по времени t, мы найдем

$$\frac{dc_1}{dt} = \hat{c}_1, \quad \frac{dc_2}{dt} = \hat{c}_2, \quad \frac{dc_3}{dt} = \hat{c}_3,$$

где положено для сокращения

$$\begin{aligned} \hat{c}_1 = \sum_{i=0}^{n}\Big[&m_i(\eta_i\ddot{\zeta}_i - \zeta_i\ddot{\eta}_i) + A_i\dot{p}_ia_{11}^{(i)} + B_i\dot{q}_ia_{12}^{(i)} + C_i\dot{r}_ia_{13}^{(i)} +\\ &+ A_ip_i\dot{a}_{11}^{(i)} + B_iq_i\dot{a}_{12}^{(i)} + C_ir_i\dot{a}_{13}^{(i)}\Big],\\ \hat{c}_2 = \sum_{i=0}^{n}\Big[&m_i(\zeta_i\ddot{\xi}_i - \xi_i\ddot{\zeta}_i) + A_i\dot{p}_ia_{21}^{(i)} + B_i\dot{q}_ia_{22}^{(i)} + C_i\dot{r}_ia_{23}^{(i)} +\\ &+ A_ip_i\dot{a}_{21}^{(i)} + B_iq_i\dot{a}_{22}^{(i)} + C_ir_i\dot{a}_{23}^{(i)}\Big],\\ \hat{c}_3 = \sum_{i=0}^{n}\Big[&m_i(\xi_i\ddot{\eta}_i - \eta_i\ddot{\xi}_i) + A_i\dot{p}_ia_{31}^{(i)} + B_i\dot{q}_ia_{32}^{(i)} + C_i\dot{r}_ia_{33}^{(i)} +\\ &+ A_ip_i\dot{a}_{31}^{(i)} + B_iq_i\dot{a}_{32}^{(i)} + C_ir_i\dot{a}_{33}^{(i)}\Big]. \end{aligned}$$

Заменим в этих формулах $\ddot{\xi}_i$, $\ddot{\eta}_i$, $\ddot{\zeta}_i$, $\dot{p}_i$, $\dot{q}_i$, $\dot{r}_i$ их выражениями из уравнений (9.8) и (9.9), а производные от направляющих косинусов их выражениями, которые можно взять из теории динамики твердого тела или вывести непосредственно из формул (9.6) простым дифференцированием и последующей заменой производных от эйлеровых углов их выражениями, получаемыми из кинематических уравнений Эйлера (9.10), которые, как легко видеть, дают

$$\dot{\psi}_i \sin\vartheta_i = p_i\sin\varphi_i + q_i\cos\varphi_i, \quad \dot{\vartheta}_i = p_i\cos\varphi_i - q_i\sin\varphi_i,$$

$$\dot{\varphi}_i = r_i - \dot{\psi}_i\cos\vartheta_i.$$

Таким образом, мы имеем следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{a}_{11}^{(i)} = r_ia_{12}^{(i)} - q_ia_{13}^{(i)}, \quad \dot{a}_{12}^{(i)} = p_ia_{13}^{(i)} - r_ia_{11}^{(i)}, \quad \dot{a}_{13}^{(i)} = q_ia_{11}^{(i)} - p_ia_{12}^{(i)},\\ &\dot{a}_{21}^{(i)} = r_ia_{22}^{(i)} - q_ia_{23}^{(i)}, \quad \dot{a}_{22}^{(i)} = p_ia_{23}^{(i)} - r_ia_{21}^{(i)}, \quad \dot{a}_{23}^{(i)} = q_ia_{21}^{(i)} - p_ia_{22}^{(i)},\\ &\dot{a}_{31}^{(i)} = r_ia_{32}^{(i)} - q_ia_{33}^{(i)}, \quad \dot{a}_{32}^{(i)} = p_ia_{33}^{(i)} - r_ia_{31}^{(i)}, \quad \dot{a}_{33}^{(i)} = q_ia_{31}^{(i)} - p_ia_{32}^{(i)}. \end{aligned}\right\}$$

(9.23′)

После всех указанных подстановок и необходимых упрощений мы получим следующие выражения для введенных выше величин $\hat{c}_1$, $\hat{c}_2$, $\hat{c}_3$:

$$\hat{c}_1 = \sum_{i=0}^{n} [\eta_i Z_i - \zeta_i H_i + P_i a_{11}^{(i)} + Q_i a_{12}^{(i)} + R_i a_{13}^{(i)}] = \sum_{i=0}^{n} [\eta_i Z_i - \zeta_i H_i + L_i],$$

$$\hat{c}_2 = \sum_{i=0}^{n} [\zeta_i \Xi_i - \xi_i Z_i + P_i a_{21}^{(i)} + Q_i a_{22}^{(i)} + R_i a_{22}^{(i)}] = \sum_{i=0}^{n} [\zeta_i \Xi_i - \xi_i Z_i + M_i],$$

$$\hat{c}_3 = \sum_{i=0}^{n} [\xi_i H_i - \eta_i \Xi_i + P_i a_{31}^{(i)} + Q_i a_{32}^{(i)} + R_i a_{33}^{(i)}] = \sum_{i=0}^{n} [\xi_i H_i - \eta_i \Xi_i + N_i].$$

Используя теперь формулы (9.3), (9.3′), (9.4), (9.4′), мы приведем предыдущие выражения к следующему виду:

$$\left.\begin{aligned}
\hat{c}_1 &= \sum_{i<j} \int_{(T_i)} dm_i \int_{(T_j)} (F_{ij} - F_{ji}) \frac{\eta_i' \zeta_j' - \zeta_i' \eta_j'}{\Delta_{ij}} dm_j, \\
\hat{c}_2 &= \sum_{i<j} \int_{(T_i)} dm_i \int_{(T_j)} (F_{ij} - F_{ji}) \frac{\zeta_i' \xi_j' - \xi_i' \zeta_j'}{\Delta_{ij}} dm_j, \\
\hat{c}_3 &= \sum_{i<j} \int_{(T_i)} dm_i \int_{(T_j)} (F_{ij} - F_{ji}) \frac{\xi_i' \eta_j' - \eta_i' \xi_j'}{\Delta_{ij}} dm_j.
\end{aligned}\right\} \qquad (9.24)$$

Из этих формул видим, что если в рассматриваемой системе выполняются условия (9.19), т. е. если имеет место третья аксиома Ньютона, то

$$\hat{c}_1 = 0, \quad \hat{c}_2 = 0, \quad \hat{c}_3 = 0,$$

вследствие чего проекции вектора количества движения, определяемые формулами (9.23), оказываются постоянными и равенства (9.23) являются точными интегралами, выражающими принцип сохранения момента количества движения нашей системы $n+1$ тел.

Если же условия (9.19) не выполняются, что и будет в самом общем случае, то величины c_1, c_2, c_3 не остаются постоянными и могут быть вычислены (при условии, что абсолютные движения всех тел T_i известны) по следующим формулам:

$$c_1 = c_1^{(0)} + \int_{t_0}^{t} \hat{c}_1 \, dt, \quad c_2 = c_2^{(0)} + \int_{t_0}^{t} \hat{c}_2 \, dt, \quad c_3 = c_3^{(0)} + \int_{t_0}^{t} \hat{c}_3 \, dt. \qquad (9.25)$$

В этой задаче мы также можем рассмотреть плоскость Лапласа, т. е. плоскость, проходящую через центр масс G всей

системы тел T_i и перпендикулярную к вектору момента количества движения.

Уравнение этой плоскости напишется, очевидно, в таком же виде, как и для системы материальных точек, т. е. в виде

$$c_1(\xi-\bar{\xi})+c_2(\eta-\bar{\eta})+c_3(\zeta-\bar{\zeta})=0. \qquad (9.25')$$

Если выполняются условия (9.19), т. е. если существуют интегралы момента количества движения (мы можем назвать их также «интегралами площадей»), то плоскость (9.25′) будет сохранять неизменную ориентацию относительно абсолютной системы координат.

3. Итак, при условии выполнимости третьей аксиомы Ньютона, уравнения поступательно-вращательного движения системы любого конечного числа неизменяемых твердых тел допускают такие же девять интегралов (шесть интегралов движения центра масс и три интеграла площадей), какие имеет и система материальных точек, находящихся под действием сил такого же характера. Мы увидим сейчас, что уравнения (9.8)—(9.10) могут допускать также и десятый интеграл — *интеграл живой силы*, если действующие между элементарными частицами тел силы, удовлетворяя условиям (9.19), обладают еще дополнительным свойством, выраженным в предыдущей главе соотношением (8.16), которое выполняется, когда каждая из функций F_{ij} подчиняется условию (4.20) главы IV.

В самом деле, обозначим буквой T кинетическую энергию поступательно-вращательного движения $n+1$ тел в абсолютных осях, т. е. положим

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\left[m_i(\dot{\xi}_i^2+\dot{\eta}_i^2+\dot{\zeta}_i^2)+(A_ip_i^2+B_iq_i^2+C_ir_i^2)\right]. \qquad (9.26)$$

Дифференцируя равенство (9.26) по времени t, мы имеем при помощи уравнений (9.8) и (9.9)

$$\frac{dT}{dt}=W, \qquad (9.26')$$

где временно для краткости положено

$$W=\sum_{i=0}^{n}\left[\dot{\xi}_i\Xi_i+\dot{\eta}_i\mathrm{H}_i+\dot{\zeta}_i\mathrm{Z}_i+p_iP_i+q_iQ_i+r_iR_i\right]. \qquad (9.27)$$

Преобразуем теперь выражение (9.27) по частям, разбивая W на две части (координатную и моментную), принимая

$$W=W_1+W_2 \qquad (9.27')$$

и заменяя составляющие сил и проекции моментов их выражениями (9.3′) и (9.7). Мы получим прежде всего

$$W_1 = \sum_{i=0}^{n} (\dot{\xi}_i \Xi_i + \dot{\eta}_i \mathrm{H}_i + \dot{\zeta}_i \mathrm{Z}_i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} \frac{F_{ij}}{\Delta_{ij}} [(\xi_j' - \xi_i') \dot{\xi}_i + (\eta_j' - \eta_i') \dot{\eta}_i + (\zeta_j' - \zeta_i') \dot{\zeta}_i] dm_j.$$

Далее получаем

$$W_2 = \sum_{i=0}^{n} (p_i P_i + q_i Q_i + r_i R_i) = \sum_{i=0}^{n} [(p_i a_{11}^{(i)} + q_i a_{12}^{(i)} + r_i a_{13}^{(i)}) L_i +$$

$$+ (p_i a_{21}^{(i)} + q_i a_{22}^{(i)} + r_i a_{23}^{(i)}) M_i + (p_i a_{31}^{(i)} + q_i a_{32}^{(i)} + r_i a_{33}^{(i)}) N_i] =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} \{(\xi_j' - \xi_i') [(p_i a_{21}^{(i)} + q_i a_{22}^{(i)} + r_i a_{23}^{(i)}) (\zeta_i' - \zeta_i) -$$

$$- (p_i a_{31}^{(i)} + q_i a_{32}^{(i)} + r_i a_{33}^{(i)}) (\eta_i' - \eta_i)] +$$

$$+ (\eta_j' - \eta_i') [(p_i a_{31}^{(i)} + q_i a_{32}^{(i)} + r_i a_{33}^{(i)}) (\xi_i' - \xi_i) -$$

$$- (p_i a_{11}^{(i)} + q_i a_{12}^{(i)} + r_i a_{13}^{(i)}) (\zeta_i' - \zeta_i)] +$$

$$+ (\zeta_j' - \zeta_i') [(p_i a_{11}^{(i)} + q_i a_{12}^{(i)} + r_i a_{13}^{(i)}) (\eta_i' - \eta_i) -$$

$$- (p_i a_{21}^{(i)} + q_i a_{22}^{(i)} + r_i a_{23}^{(i)}) (\xi_i' - \xi_i)]\} \frac{F_{ij}\, dm_j}{\Delta_{ij}}.$$

Преобразуем каждое из выражений в квадратных скобках при помощи формул (9.5). Достаточно рассмотреть какое-нибудь из трех этих выражений. Например, имеем

$$(p_i a_{21}^{(i)} + q_i a_{22}^{(i)} + r_i a_{23}^{(i)}) (a_{31}^{(i)} x_i' + a_{32}^{(i)} y_i' + a_{33}^{(i)} z_i') -$$

$$- (p_i a_{31}^{(i)} + q_i a_{32}^{(i)} + r_i a_{33}^{(i)}) (a_{11}^{(i)} x_i' + a_{12}^{(i)} y_i' + a_{13}^{(i)} z_i') =$$

$$= x_i' (r_i a_{12}^{(i)} - q_i a_{13}^{(i)}) + y_i' (p_i a_{13}^{(i)} - r_i a_{11}^{(i)}) + z_i' (q_i a_{11}^{(i)} - p_i a_{12}^{(i)}) =$$

$$= \dot{a}_{11}^{(i)} x_i' + \dot{a}_{12}^{(i)} y_i' + \dot{a}_{13}^{(i)} z_i' = \dot{\xi}_i' - \dot{\xi}_i.$$

При выполнении последнего преобразования мы использовали свойство направляющих косинусов, которое заключается в том, что если рассматривать таблицу (9.5′) как определитель, то каждый элемент этого определителя равен своему алгебраическому дополнению. Кроме того, приняты во внимание формулы, дающие производные от направляющих косинусов. Преобразуя подобным же образом остальные две квадратные

скобки в выражении для W_2, мы получим

$$W_2=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} \frac{F_{ij}\,dm_j}{\Delta_{ij}}[(\xi_j'-\xi_i')(\dot\xi_i'-\dot\xi_i)+$$
$$+(\eta_j'-\eta_i')(\dot\eta_i'-\dot\eta_i)+(\zeta_j'-\zeta_i')(\dot\zeta_i'-\dot\zeta_i)].$$

Складывая выражения для W_1 и W_2, мы найдем по формуле (9.27′) такое выражение:

$$W=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} \frac{F_{ij}\,dm_j}{\Delta_{ij}}[(\xi_j'-\xi_i')\dot\xi_i'+(\eta_j'-\eta_i')\dot\eta_i'+(\zeta_j'-\zeta_i')\dot\zeta_i'],$$

которое можно переписать в следующей форме:

$$W=\sum_{i<j}\int\limits_{(T_i)}\int\limits_{(T_j)} \frac{dm_i\,dm_j}{\Delta_{ij}}[(\xi_j'-\xi_i')(F_{ij}\dot\xi_i'-F_{ji}\dot\xi_j')+$$
$$+(\eta_j'-\eta_i')(F_{ij}\dot\eta_i'-F_{ji}\dot\eta_j')+(\zeta_j'-\zeta_i')(F_{ij}\dot\zeta_i'-F_{ji}(\dot\zeta_j')]. \quad (9.28)$$

В самом общем случае, когда условия (9.19) не выполняются, это выражение для W не поддается дальнейшему упрощению и не представляется в виде точной производной по t.

Допустим теперь, что условия (9.19) выполняются для каждой пары индексов i и j. Тогда формула (9.28) приводится к виду

$$W=-\sum_{i<j}\frac{F_{ij}\,dm_i\,dm_j}{\Delta_{ij}}[(\xi_j'-\xi_i')(\dot\xi_j'-\dot\xi_i')+$$
$$+(\eta_j'-\eta_i')(\dot\eta_j'-\dot\eta_i')+(\zeta_j'-\zeta_i')(\dot\zeta_j'-\dot\zeta_i')].$$

Но, дифференцируя по t формулу (9.1), мы имеем

$$\Delta_{ij}\dot\Delta_{ij}=(\xi_j'-\xi_i')(\dot\xi_j'-\dot\xi_i')+(\eta_j'-\eta_i')(\dot\eta_j'-\dot\eta_i')+(\zeta_j'-\zeta_i')(\dot\zeta_j'-\dot\zeta_i'),$$

вследствие чего предыдущее выражение для W примет следующий весьма простой вид:

$$W=-\sum_{i<j}\int\limits_{(T_i)}\int\limits_{(T_j)} F_{ij}\dot\Delta_{ij}\,dm_i\,dm_j. \quad (9.28')$$

Если, наконец, каждая из функций F_{ij} удовлетворяет соотношению (4.20), то существует для нее такая функция Φ_{ij}, что мы будем иметь

$$-F_{ij}(t;\,\Delta_{ij},\,\dot\Delta_{ij}\,\ddot\Delta_{ij})\cdot\dot\Delta_{ij}=\frac{d}{dt}\Phi_{ij}(t;\,\Delta_{ij},\,\dot\Delta_{ij}). \quad (9.29)$$

Тогда формула (9.28′) примет вид

$$W = \frac{d}{dt} \sum_{i<j} \int\limits_{(T_i)} \int\limits_{(T_j)} \Phi_{ij}\, dm_i\, dm_j. \tag{9.29′}$$

Полагая теперь

$$\Phi = \sum_{i<j} \int\limits_{(T_i)} \int\limits_{(T_j)} \Phi_{ij}\, dm_i\, dm_j \tag{9.30}$$

и интегрируя равенство (9.26′), мы получим интеграл уравнений поступательно-вращательного движения системы $n+1$ твердых тел в виде

$$T = \Phi + h. \tag{9.31}$$

Равенство (9.31) можно назвать *интегралом живой силы* или *интегралом энергии*. Однако уравнение (9.31), вообще говоря, не выражает принцип сохранения энергии, а только дает выражение для кинетической энергии T в виде функции координат точек приведения G_i, эйлеровых углов тел T_i, первых производных от этих величин и вообще времени t, которое может входить явно.

Если, в частности, всякая функция F_{ij} зависит только от соответствующего расстояния Δ_{ij}, то простым интегрированием мы можем найти для каждой пары тел T_i и T_j соответствующую функцию сил из соотношения

$$-F_{ij}(\Delta_{ij})\, d\Delta_{ij} = dU_{ij}(\Delta_{ij}).$$

Тогда, как уже было указано выше (см. формулы (9.12′) и (9.12)), мы можем составить функцию сил

$$U = \sum_{i<j} \int\limits_{(T_i)} \int\limits_{(T_j)} U_{ij}\, dm_i\, dm_j$$

и интеграл (9.31) принимает типичный вид интеграла энергии

$$T = U + h. \tag{9.31′}$$

В качестве примера, где функция сил отсутствует, можно опять привести случай с законом Вебера. Тогда выражение (9.30) для функции Φ напишется в виде

$$\Phi = \sum_{i<j} f_{ij} \int\limits_{(T_i)} \int\limits_{(T_j)} \left(1 - \frac{\dot{\Delta}_{ij}^2}{\sigma_{ij}^2}\right) \frac{dm_i\, dm_j}{\Delta_{ij}}, \tag{9.30′}$$

и интеграл (9.31) можно назвать только интегралом живой силы.

Примечание. Может случиться, что нам представится, так сказать, промежуточный случай, когда некоторые из функций F_{ij} удовлетворяют уравнению (4.20), а остальные не удовлетворяют такому уравнению. Тогда выражение (9.28) для функции W представится в виде суммы двух слагаемых, одно из которых будет точной производной, а другое — в виде производной не представляется. Например, можем иметь случай, когда

$$W = \frac{d}{dt} \sum_{i<j<k} \int\limits_{(T_i)} \int\limits_{(T_j)} \Phi_{ij}\, dm_i\, dm_j - \sum_{k<i<j} \int\limits_{(T_i)} \int\limits_{(T_j)} F_{ij} \dot{\Delta}_{ij}\, dm_i\, dm_j,$$

где k — некоторое целое число, меньшее n.

4. Покажем в заключение этого параграфа, что для системы конечного числа неизменяемых твердых тел можно получить уравнение такого же типа, какое мы рассматривали в § 1 главы VIII и которое широко известно в классической небесной механике под названием *уравнения Лагранжа — Якоби*. Это же название мы сохраняем и для систем материальных точек, управляемых законом, отличным от закона Ньютона, и сохраним его также и для рассматриваемого случая системы твердых тел, материальные частицы которых взаимодействуют по какому угодно закону такого же типа, которые рассматривались в этой книге в предыдущих главах.

Обращаясь теперь к уравнениям (9.8) и применяя к ним ту же процедуру, которую мы применяли к уравнениям (8.2), мы имеем

$$\sum_{i=0}^{n} m_i (\xi_i \ddot{\xi}_i + \eta_i \ddot{\eta}_i + \zeta_i \ddot{\zeta}_i) = \sum_{i=0}^{n} (\xi \Xi_i + \eta_i \mathrm{H}_i + \zeta_i \mathrm{Z}_i), \qquad (9.32)$$

что можно написать (так же, как и в главе VIII) в виде

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=0}^{n} m_i (\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2) - \sum_{i=0}^{n} m_i (\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2) =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} (\xi_i \Xi_i + \eta_i \mathrm{H}_i + \zeta_i \mathrm{Z}_i).$$

Положим теперь

$$r_i^2 = \xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2, \quad J = \sum_{i=0}^{n} m_i r_i^2, \qquad (9.33)$$

так что r_i есть радиус-вектор центра приведения G_i тела T_i в абсолютной системе координат и J есть момент инерции относительно начала O системы материальных точек G_i, в каждой из которых сосредоточена масса соответствующего тела T_i.

Затем положим

$$T_0^* = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i\left(\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2\right), \tag{9.34}$$

так что T_0^* есть кинетическая энергия системы точек G_i и, как видно из формулы (9.26), представляет собой «поступательную» часть полной кинетической энергии системы тел T_i.

Наконец, правую часть равенства (9.32) обозначим через V, т. е. положим

$$V = \sum_{i=0}^{n}\left(\xi_i \Xi_i + \eta_i \mathrm{H}_i + \zeta_i \mathrm{Z}_i\right). \tag{9.35}$$

Тогда уравнение (9.32) приведется к следующему виду:

$$\frac{d^2 J}{dt^2} = 4T_0^* + 2V. \tag{9.36}$$

Уравнение (9.36) может быть названо *первой формой уравнения Лагранжа — Якоби* для поступательно-вращательного движения системы неизменяемых твердых тел.

Чтобы получить вторую форму уравнения Лагранжа — Якоби, обозначим через R момент инерции системы точек G_i с массами m_i относительно общего центра масс G этой системы. Тогда, как известно,

$$J = R + m\bar{r}^2, \tag{9.37}$$

где

$$\bar{r} = \sqrt{\bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2 + \bar{\zeta}^2} \tag{9.38}$$

есть радиус-вектор точки G, а R определяется формулой

$$R = \frac{1}{m}\sum_{i<j} m_i m_j R_{ij}^2, \tag{9.39}$$

причем

$$R_{ij}^2 = (\xi_j - \xi_i)^2 + (\eta_j - \eta_i)^2 + (\zeta_j - \zeta_i)^2, \tag{9.40}$$

так что $R_{ij} = \overline{G_i G_j}$ есть расстояние между центрами приведения тел T_i и T_j.

Исключая из (9.36) величину J, мы получим вторую форму уравнения Лагранжа — Якоби, в котором левая часть не зависит от выбора абсолютной системы координат:

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = 4T_0^* + 2V - m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}. \tag{9.41}$$

Правая часть уравнения (9.41) может быть несколько упрощена, если за начало координат принять точку G и допустить третью аксиому Ньютона. Тогда, будем иметь уравнение

$$\frac{d^2R}{dt^2}=4T_c^*+2V_c+h_c, \tag{9.41'}$$

где T_c^* — живая сила точек G_i относительно G, h_c — постоянная, а V_c дается формулой

$$V_c=\sum_{i<j} R_{ij}^2 \int\limits_{(T_i)} \int\limits_{(T_j)} \frac{F_{ij}\,dm_i\,dm_j}{\Delta_{ij}}.$$

§ 3. Задача трех твердых тел. Частные решения

Здесь мы рассмотрим частный случай задачи многих тел, когда число тел равно трем, и покажем, что при выполнении некоторых дополнительных условий задача может допускать частные решения, аналогичные лагранжевым и эйлеровым решениям задачи трех материальных точек.

1. Итак, возвратимся к общим уравнениям (9.8)—(9.10) для случая $n=2$ и преобразуем уравнения поступательного движения к виду (9.22), т. е. возьмем за начало координат точку G_0, оставляя направления осей неизменными и параллельными абсолютным осям первоначальной системы координат.

Уравнения движения трех тел напишем, несколько изменяя обозначения § 1, в виде

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_1&=X_1, & \ddot{y}_1&=Y_1, & \ddot{z}_1&=Z_1,\\ \ddot{x}_2&=X_2, & \ddot{y}_2&=Y_2, & \ddot{z}_2&=Z_2, \end{aligned}\right\} \tag{9.42}$$

а уравнения вращательного движения оставим в прежнем виде

$$\left.\begin{aligned} A_i\dot{p}_i-(B_i-C_i)\,q_ir_i&=P_i,\\ B_i\dot{q}_i-(C_i-A_i)\,r_ip_i&=Q_i,\\ C_i\dot{r}_i-(A_i-B_i)\,p_iq_i&=R_i \end{aligned}\right\} \quad (i=0,\ 1,\ 2). \tag{9.43}$$

Условимся при этом, что за центры приведения тел взяты их центры масс, а за собственные оси каждого тела — его главные, центральные оси инерции, так что A_i, B_i, C_i — главные, центральные моменты инерции тела T_i.