Правая часть уравнения (9.41) может быть несколько упрощена, если за начало координат принять точку G и допустить третью аксиому Ньютона. Тогда, будем иметь уравнение

$$\frac{d^2R}{dt^2}=4T_c^*+2V_c+h_c, \tag{9.41'}$$

где T_c^* — живая сила точек G_i относительно G, h_c — постоянная, а V_c дается формулой

$$V_c=\sum_{i<j} R_{ij}^2 \int\limits_{(T_i)} \int\limits_{(T_j)} \frac{F_{ij}\,dm_i\,dm_j}{\Delta_{ij}}.$$

§ 3. Задача трех твердых тел. Частные решения

Здесь мы рассмотрим частный случай задачи многих тел, когда число тел равно трем, и покажем, что при выполнении некоторых дополнительных условий задача может допускать частные решения, аналогичные лагранжевым и эйлеровым решениям задачи трех материальных точек.

1. Итак, возвратимся к общим уравнениям (9.8)—(9.10) для случая $n=2$ и преобразуем уравнения поступательного движения к виду (9.22), т. е. возьмем за начало координат точку G_0, оставляя направления осей неизменными и параллельными абсолютным осям первоначальной системы координат.

Уравнения движения трех тел напишем, несколько изменяя обозначения § 1, в виде

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_1&=X_1, & \ddot{y}_1&=Y_1, & \ddot{z}_1&=Z_1,\\ \ddot{x}_2&=X_2, & \ddot{y}_2&=Y_2, & \ddot{z}_2&=Z_2, \end{aligned}\right\} \tag{9.42}$$

а уравнения вращательного движения оставим в прежнем виде

$$\left.\begin{aligned} A_i\dot{p}_i-(B_i-C_i)\,q_ir_i&=P_i,\\ B_i\dot{q}_i-(C_i-A_i)\,r_ip_i&=Q_i,\\ C_i\dot{r}_i-(A_i-B_i)\,p_iq_i&=R_i \end{aligned}\right\} \quad (i=0,\ 1,\ 2). \tag{9.43}$$

Условимся при этом, что за центры приведения тел взяты их центры масс, а за собственные оси каждого тела — его главные, центральные оси инерции, так что A_i, B_i, C_i — главные, центральные моменты инерции тела T_i.

По формулам § 1 этой главы мы можем представить правые части уравнений (9.42) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
X_1 &= \frac{1}{m_1}(X_{10}+X_{12}) - \frac{1}{m_0}(X_{01}+X_{02}),\\
Y_1 &= \frac{1}{m_1}(Y_{10}+Y_{12}) - \frac{1}{m_0}(Y_{01}+Y_{02}),\\
Z_1 &= \frac{1}{m_1}(Z_{10}+Z_{12}) - \frac{1}{m_0}(Z_{01}+Z_{02}),\\
X_2 &= \frac{1}{m_2}(X_{20}+X_{21}) - \frac{1}{m_0}(X_{01}+X_{02}),\\
Y_2 &= \frac{1}{m_2}(Y_{20}+Y_{21}) - \frac{1}{m_0}(Y_{01}+Y_{02}),\\
Z_2 &= \frac{1}{m_2}(Z_{20}+Z_{21}) - \frac{1}{m_0}(Z_{01}+Z_{02}).
\end{aligned}\right\} \tag{9.44}$$

Функции X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij}, входящие в формулы (9.44), определяются следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned}
X_{ij} &= \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} dm_j \frac{F_{ij}}{\Delta_{ij}}\cdot \tilde{X}_{ij},\\
Y_{ij} &= \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} dm_i \frac{F_{ij}}{\Delta_{ij}}\cdot \tilde{Y}_{ij},\\
Z_{ij} &= \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} dm_j \frac{F_{ij}}{\Delta_{ij}}\cdot \tilde{Z}_{ij},
\end{aligned}\right\} \tag{9.44'}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{X}_{ij} &= x_j - x_i + a_{11}^{(j)}x_j' + a_{12}^{(j)}y_j' + a_{13}^{(j)}z_j' - a_{11}^{(i)}x_i' - a_{12}^{(i)}y_i' - a_{13}^{(i)}z_i',\\
\tilde{Y}_{ij} &= y_j - y_i + a_{21}^{(j)}x_j' + a_{22}^{(j)}y_j' + a_{23}^{(j)}z_j' - a_{21}^{(i)}x_i' - a_{22}^{(i)}y_i' - a_{23}^{(i)}z_i',\\
\tilde{Z}_{ij} &= z_j - z_i + a_{31}^{(j)}x_j' + a_{32}^{(j)}y_j' + a_{33}^{(j)}z_j' - a_{31}^{(i)}x_i' - a_{32}^{(i)}y_i' - a_{33}^{(i)}z_i'.
\end{aligned}\right\} \tag{9.45}$$

В этих формулах индексы i и j принимают значения 0, 1, 2 ($j \neq i$). Кроме того, нужно иметь в виду, что

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 0.$$

Взаимные расстояния Δ_{ij} определяются очевидными формулами

$$\Delta_{ij}^2 = \tilde{X}_{ij}^2 + \tilde{Y}_{ij}^2 + \tilde{Z}_{ij}^2, \tag{9.46}$$

откуда получаются также их производные по времени, причем при дифференцировании выражений (9.45) штрихованные координаты остаются постоянными, а производные от направляющих косинусов даются формулами (9.23′).

Примечание. В формулах (9.23′), (9.43) и им подобных величины p_i, q_i, r_i обозначают, как указывалось выше, проекции угловой скрости тела T_i на собственные оси, т. е. в рассматриваемом параграфе — на главные оси инерции тела T_i. Однако в предыдущем разделе мы обозначили буквой r_i радиус-вектор точки G_i и будем придерживаться этого же обозначения и дальше. Поэтому следует остерегаться спутать эти совершенно различные величины, для чего нужно только немного внимательности.

2. Величины P_i, Q_i, R_i в уравнениях (9.43) определяются формулами (9.7) для $i=0, 1, 2$, а L_i, M_i, N_i соответственно формулами (9.4′) и (9.4). Имея в виду указанные формулы, мы представим правые части в (9.43) следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} P_0 &= P_{01}+P_{02}, & Q_0 &= Q_{01}+Q_{02}, & R_0 &= R_{01}+R_{02},\\ P_1 &= P_{10}+P_{12}, & Q_1 &= Q_{10}+Q_{12}, & R_1 &= R_{10}+R_{12},\\ P_2 &= P_{20}+P_{21}, & Q_2 &= Q_{20}+Q_{21}, & R_2 &= R_{20}+R_{21}. \end{aligned}\right\} \quad (9.47)$$

Отдельные слагаемые в (9.47) даются следующими общими формулами:

$$\left.\begin{aligned} P_{ij} &= \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} dm_j \frac{F_{ij}}{\Delta_{ij}}\cdot \tilde{P}_{ij},\\ Q_{ij} &= \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} dm_j \frac{F_{ij}}{\Delta_{ij}}\cdot \tilde{Q}_{ij},\\ R_{ij} &= \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} dm_j \frac{F_{ij}}{\Delta_{ij}}\cdot \tilde{R}_{ij} \end{aligned}\right\} \quad (i,\ j=0,\ 1,\ 2;\ j\neq i), \qquad (9.47')$$

где $\tilde{P}_{ij}$, $\tilde{Q}_{ij}$, $\tilde{R}_{ij}$ определяются следующими, довольно громоздкими, формулами:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{P}_{ij} &= (x_j - x_i + a_{11}^{(j)}x_j' + a_{12}^{(j)}y_j' + a_{13}^{(j)}z_j')(a_{13}^{(i)}y_i' - a_{12}^{(i)}z_i') +\\ &+ (y_j - y_i + a_{21}^{(j)}x_j' + a_{22}^{(i)}y_j' + a_{23}^{(j)}z_j')(a_{23}^{(i)}y_i' - a_{22}^{(i)}z_i') +\\ &+ (z_j - z_i + a_{31}^{(j)}x_j' + a_{32}^{(j)}y_j' + a_{33}^{(j)}z_j')(a_{33}^{(i)}y_i' - a_{32}^{(i)}z_i'),\\ \tilde{Q}_{ij} &= (x_j - x_i + a_{11}^{(j)}x_j' + a_{12}^{(j)}y_j' + a_{13}^{(j)}z_j')(a_{11}^{(i)}z_i' - a_{13}^{(i)}x_i') +\\ &+ (y_j - y_i + a_{21}^{(j)}x_j' + a_{22}^{(j)}y_j' + a_{23}^{(j)}z_j')(a_{21}^{(i)}z_i' - a_{23}^{(i)}x_i') +\\ &+ (z_j - z_i + a_{31}^{(j)}x_j' + a_{32}^{(j)}y_j' + a_{33}^{(j)}z_j')(a_{31}^{(i)}z_i' - a_{33}^{(i)}x_i'),\\ \tilde{R}_{ij} &= (x_j - x_i + a_{11}^{(j)}x_j' + a_{12}^{(j)}y_j' + a_{13}^{(j)}z_j')(a_{12}^{(i)}x_i' - a_{11}^{(i)}y_i') +\\ &+ (y_j - y_i + a_{21}^{(j)}x_j' + a_{22}^{(j)}y_j' + a_{23}^{(j)}z_j')(a_{22}^{(i)}x_i' - a_{21}^{(i)}y_1') +\\ &+ (z_j - z_i + a_{31}^{(j)}x_j' + a_{32}^{(j)}y_j' + a_{33}^{(j)}z_j')(a_{32}^{(i)}x_i' - a_{31}^{(i)}y_i'). \end{aligned}\right\} \quad (9.48)$$

В этих формулах, как и в предыдущих, $i, j=0, 1, 2, j \neq i$, и, кроме того,

$$x_0=0, \quad y_0=0, \quad z_0=0.$$

Приведенные подробные формулы (9.44)—(9.48) дают выражения для правых частей уравнений (9.42), (9.43), которые вместе с кинематическими уравнениями Эйлера позволяют определить 15 неизвестных функций

$$\left.\begin{array}{c} x_1, \quad y_1, \quad z_1; \quad x_2, \quad y_2, \quad z_2; \\ \psi_0, \ \vartheta_0, \ \varphi_0; \quad \psi_1, \ \vartheta_1, \ \varphi_1; \quad \psi_2, \ \vartheta_2, \ \varphi_2, \end{array}\right\} \tag{9.49}$$

определяющих поступательные движения тел T_1 и T_2 относительно тела T_0 и вращательные движения каждого из трех тел вокруг его центра инерции.

Уравнения Эйлера уже приводились в этой книге несколько раз. Однако чтобы иметь все необходимые формулы в одном месте, мы выпишем эти уравнения еще раз ($i=0, 1, 2$);

$$\left.\begin{aligned} p_i &= \dot{\psi}_i \sin\varphi_i \sin\vartheta_i + \dot{\vartheta}_i \cos\varphi_i, \\ q_i &= \dot{\psi}_i \cos\varphi_i \sin\vartheta_i - \dot{\vartheta}_i \sin\varphi_i, \\ r_i &= \dot{\psi}_i \cos\vartheta_i + \varphi_i, \end{aligned}\right\} \tag{9.50}$$

откуда имеем еще

$$\left.\begin{aligned} \dot{\psi}_i &= (p_i \sin\varphi_i + q_i \cos\varphi_i) \csc\vartheta_i, \\ \dot{\vartheta}_i &= p_i \cos\varphi_i - q_i \sin\varphi_i, \\ \dot{\varphi}_i &= r_i - (p_i \sin\varphi_i + q_i \cos\varphi_i) \operatorname{ctg}\vartheta_i. \end{aligned}\right\} \tag{9.50'}$$

3. Для установления частных решений задачи трех твердых тел удобнее всего воспользоваться вместо прямоугольных координат точек G_1 и G_2 относительно точки G_0 такими же переменными Ляпунова, которые были использованы в задаче о движении трех материальных точек.

Эти переменные обозначим здесь буквами

$$\rho_1, \quad \rho_2, \quad \gamma, \quad \omega_1, \quad \omega_2, \quad \omega_3, \tag{9.51}$$

где $\rho_1 = \overline{G_0G_1}$, $\rho_2 = \overline{G_0G_2}$ — расстояния точек G_1 и G_2 от точки G_0, γ — угол, образованный радиусами-векторами ρ_1 и ρ_2, наконец ω_1, ω_2, ω_3 — проекции угловой скорости ω на оси неизменного направления (xyz) системы, образованной прямой $\overline{G_0G_1}$, прямой $\overline{G_0G_1'}$, перпендикулярной к $\overline{G_0G_1}$ в плоскости треугольника $(G_0G_1G_2)$, и прямой $\overline{G_0G_1''}$, перпендикулярной к этой плоскости.

Величины ρ_1, ρ_2, γ полностью определяют треугольник $(G_0G_1G_2)$, так как два других угла этого треугольника γ_1, γ_2

($\gamma + \gamma_1 + \gamma_2 = 180°$) и третья сторона Δ определяется такими же формулами, как и в случае точечной задачи:

$$\left.\begin{aligned} &\sin\gamma_1 = \frac{\rho_2}{\Delta}\sin\gamma, \quad \sin\gamma_2 = \frac{\rho_1}{\Delta}\sin\gamma, \\ &\Delta = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos\gamma}\,. \end{aligned}\right\} \tag{9.51'}$$

Ориентацию плоскости треугольника $(G_0G_1G_2)$ относительно осей неизменного направления (xyz) определим так же, как и в главе VIII, следующими углами Эйлера: углом Ω, образуемым линией пересечения плоскости треугольника и плоскости (xy) с осью (G_0x); углом Φ, образуемым прямой $(\overline{G_0G_1})$ с линией узлов, и углом J, образуемым направлением $\overline{G_0G_1''}$ с осью (G_0z).

Эти три угла Эйлера связаны с ω_1, ω_2 и ω_3 теми же формулами (8.38), которые также выпишем еще раз:

$$\left.\begin{aligned} &\omega_1 = \sin\Phi\sin J\cdot\dot\Omega + \cos\Phi\cdot\dot J, \\ &\omega_2 = \cos\Phi\sin J\cdot\dot\Omega - \sin\Phi\cdot\dot J, \\ &\omega_3 = \cos J\cdot\dot\Omega + \dot\Phi. \end{aligned}\right\} \tag{9.52}$$

Мы введем также для симметрии и простоты проекции угловой скорости ω' системы, образованной прямой $\overline{G_0G_2}$, прямой $\overline{G_0G_2'}$, перпендикулярной к $\overline{G_0G_2}$ и лежащей в плоскости треугольника, и прямой, перпендикулярной к этой плоскости, на те же оси неизменного направления (xyz). Проекции угловой скорости ω' определятся очевидными формулами

$$\left.\begin{aligned} &\omega_1' = \sin(\Phi+\gamma)\sin J\cdot\dot\Omega + \cos(\Phi+\gamma)\cdot\dot J, \\ &\omega_2' = \cos(\Phi+\gamma)\sin J\cdot\dot\Omega - \sin(\Phi+\gamma)\cdot\dot J, \\ &\omega_3' = \cos J\cdot\dot\Omega + \dot\Phi + \dot\gamma. \end{aligned}\right\} \tag{9.52'}$$

Обозначим теперь через a_{sk} направляющие косинусы осей, связанных с треугольником $(G_0G_1G_2)$. Тогда, так же как в главе VIII, имеем

$$\left.\begin{aligned} &x_1 = a_{11}\rho_1, \quad x_2 = a_{11}\rho_2\cos\gamma + a_{12}\rho_2\sin\gamma \\ &y_1 = a_{21}\rho_1, \quad y_2 = a_{21}\rho_2\cos\gamma + a_{22}\rho_2\sin\gamma, \\ &z_1 = a_{31}\rho_1, \quad z_2 = a_{31}\rho_2\cos\gamma + a_{32}\rho_2\sin\gamma, \end{aligned}\right\} \tag{9.53}$$

направляющие косинусы a_{sk} выражаются через углы Ω, Φ и Θ формулами, совершенно подобными формулам (9.6), и мы их заново приводить не будем.

Обозначим далее через a_{sk}' направляющие косинусы второй системы осей, связанных с треугольником. Эти величины a_{sk}'

получаются из формул для a_{sk} простой заменой угла Φ на $\Phi+\gamma$ и также могут быть выписаны по формулам (9.6).

Формулы (9.53) могут быть также написаны, как это легко видеть, также в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a'_{11}\rho_1\cos\gamma + a'_{12}\rho_1\sin\gamma, & x_2 &= a'_{11}\rho_2,\\ y_1 &= a'_{21}\rho_1\cos\gamma + a'_{22}\rho_1\sin\gamma, & y_2 &= a'_{21}\rho_2,\\ z_1 &= a'_{31}\rho_1\cos\gamma + a'_{32}\rho_1\sin\gamma, & z_2 &= a'_{31}\rho_2. \end{aligned}\right\} \qquad (9.53')$$

Преобразуя теперь уравнения (9.42) и (9.43) общей задачи трех твердых тел к переменным Ляпунова, мы можем написать эти нужные нам уравнения следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\ddot\rho_1 - (\omega_2^2+\omega_3^2)\rho_1 = a_{11}X_1 + a_{21}Y_1 + a_{31}Z_1,\\ &\frac{d}{dt}(\omega_3\rho_1^2) + \omega_1\omega_2\rho_1^2 = \rho_1(a_{12}X_1 + a_{22}Y_1 + a_{32}Z_1),\\ &\frac{d}{dt}(\omega_2\rho_1^2) - \omega_1\omega_3\rho_1^2 = -\rho_1(a_{13}X_1 + a_{23}Y_1 + a_{33}Z_1), \end{aligned}\right\} \qquad (9.54)$$

$$\left.\begin{aligned} &\ddot\rho_2 - (\omega_2'^2+\omega_3'^2)\rho_2 = a'_{11}X_2 + a'_{21}Y_2 + a'_{31}Z_2,\\ &\frac{d}{dt}(\omega'_3\rho_2^2) + \omega'_1\omega'_2\rho_2^2 = \rho_2(a'_{12}X_2 + a'_{22}Y_2 + a'_{32}Z_2),\\ &\frac{d}{dt}(\omega'_2\rho_2^2) - \omega'_1\omega'_3\rho_2^2 = -\rho_2(a'_{13}X_2 + a'_{23}Y_2 + a'_{33}Z_2), \end{aligned}\right\} \qquad (9.54')$$

$$\left.\begin{aligned} A_i\dot p_i - (B_i - C_i)q_ir_i &= \sum_{j=0}^{2}{}' P_{ij},\\ B_i\dot q_i - (C_i - A_i)r_ip_i &= \sum_{j=0}^{2}{}' Q_{ij}\\ C_i\dot r_i - (A_i - B_i)p_iq_i &= \sum_{j=0}^{2}{}' R_{ij} \end{aligned}\right\} \quad (i=0,\ 1,\ 2,\ j\neq i), \qquad (9.55)$$

$$\left.\begin{aligned} p_i &= \dot\psi_i\sin\varphi_i\sin\vartheta_i + \dot\vartheta_i\cos\varphi_i,\\ q_i &= \dot\psi_i\cos\varphi_i\sin\vartheta_i - \dot\vartheta_i\sin\varphi_i,\\ r_i &= \dot\psi_i\cos\vartheta_i + \dot\varphi_i \end{aligned}\right\} \quad (i=0,\ 1,\ 2). \qquad (9.55')$$

Уравнения (9.54), (9.54′), (9.55), (9.55′) образуют совместную систему 30-го порядка с 15-ю неизвестными функциями, которые при произвольно заданных законах сил не допускают вообще никаких интегралов.

Однако если исходные уравнения (9.8)—(9.10) таковы, что для них существуют 10 интегралов, аналогичных классическим, то уравнения (9.42), (9.43), которые выводятся из исходных для

$n = 2$, будут допускать четыре первых интеграла, и столько же интегралов будут допускать уравнения нашей задачи трех тел в переменных Ляпунова. Эти интегралы можно, конечно, написать, но они имеют в переменных Ляпунова довольно сложный и громоздкий вид и, кроме того, для нашей цели выявление частных решений не играет никакой роли, а поэтому мы их приводить здесь не будем.

4. Посмотрим теперь прежде всего, при каких условиях вышенаписанная система уравнений может допускать решения, которые мы назовем *плоскими решениями*.

Мы будем называть решение наших уравнений и соответствующее ему движение трех твердых тел плоским решением (плоским движением), если три центра масс G_0, G_1, G_2 всегда остаются в неизменной плоскости, проходящей, конечно, через общий центр масс G.

В задаче трех тел-точек, в которой действующие силы всегда направлены по прямым, проходящим через каждую пару точек, плоские решения всегда существуют. Действительно, если векторы начальных скоростей трех точек лежат в плоскости, образованной начальными положениями этих точек, то точки всегда будут оставаться в этой начальной плоскости, так как в этом случае не будет никаких причин, которые могли бы вывести какую-либо из трех точек из этой начальной плоскости, которая, очевидно, является плоскостью Лапласа.

Но в нашей задаче точки G_0, G_1, G_2 являются центрами масс трех твердых тел и если даже начальные скорости поступательных движений лежат в начальной плоскости, образованной начальными положениями центров масс, то мы не можем сказать, будут ли эти точки оставаться в начальной плоскости или нет.

В самом деле, вращательные движения тел ввиду взаимной связи уравнений поступательного и вращательного движений, несомненно, влияют на поступательные движения центров масс.

Поэтому если плоское движение трех тел возможно, то для этого должны выполняться какие-то условия, определяющие форму тел и их внутреннее строение.

Итак, допустим, что в начальный момент t_0 точки G_1 и G_2 лежат в плоскости (G_0xy) (что, очевидно, не нарушает общности) и что их начальные скорости также лежат в этой плоскости.

В каком случае, или в каких случаях, точки G_1 и G_2 всегда будут оставаться в плоскости (G_0xy)?

Предположим, что условия

$$z_1 = z_2 = \dot{z}_1 = \dot{z}_2 = 0, \tag{9.56}$$

выполняющиеся в начальный момент t_0, будут выполняться в дальнейшем для всякого значения $t \geqslant t_0$.

Тогда для всякого t будем иметь

$$J = 0, \quad \dot{J} = 0,$$

а линия узлов будет, очевидно, неопределенной и, не нарушая общности, мы можем считать, что для всякого t будем иметь также

$$\Omega = 0, \quad \dot{\Omega} = 0.$$

Уравнения (9.52) и (9.52′) дадут в этом случае

$$\left.\begin{aligned} &\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega = \dot{\Phi}, \\ &\omega_1' = 0, \quad \omega_2' = 0, \quad \omega_3' = \omega + \dot{\psi}. \end{aligned}\right\} \tag{9.57}$$

Следовательно, угол Φ будет долготой точки G_1 в плоскости (xG_0y), предполагаемой как плоскость движения, а долгота точки G_2 будет равна, очевидно, $v + \psi$. Поэтому направляющие косинусы a_{sk} и a'_{sk}, входящие в формулы (9.53) и (9.53′), будут иметь следующие значения:

$$\left.\begin{aligned} &a_{11} = \cos v, && a_{21} = \sin v, && a_{31} = 0, \\ &a_{12} = -\sin v, && a_{22} = \cos v, && a_{32} = 0, \\ &a_{13} = 0, && a_{23} = 0, && a_{33} = 1, \\ &a'_{11} = \cos(v + \psi), && a'_{21} = \sin(v + \psi), && a'_{31} = 0, \\ &a'_{12} = -\sin(v + \psi), && a'_{22} = \cos(v + \psi), && a'_{32} = 0, \\ &a'_{13} = 0, && a'_{23} = 0, && a'_{33} = 1. \end{aligned}\right\} \tag{9.57′}$$

Обращаясь к уравнениям (9.54), мы увидим, что плоское движение, если таковое допустимо, должно определяться уравнениями

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{\rho}_1 - \dot{v}^2\rho_1 = X_1 \cos v + Y_1 \sin v, \\ &\frac{d}{dt}(\dot{v}\rho_1^2) = \rho_1(-X_1 \sin v + Y_1 \cos v), \\ &0 = Z_1, \\ &\ddot{\rho}_2 - (\dot{v} + \dot{\psi})^2 \rho_2 = X_2 \cos(v + \psi) + Y_2 \sin(v + \psi), \\ &\frac{d}{dt}[(\dot{v} + \dot{\psi})\rho_2^2] = \rho_2[-X_2 \sin(v + \psi) + Y_2 \cos(v + \psi)], \\ &0 = Z_2. \end{aligned}\right\} \tag{9.58}$$

Следовательно, в плоском движении мы должны иметь тождественно

$$Z_1 \equiv 0, \quad Z_2 \equiv 0$$

или в силу формул (9.44)

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{m_1}(Z_{10}+Z_{12})&\equiv\frac{1}{m_0}(Z_{01}+Z_{02}),\\ \frac{1}{m_2}(Z_{20}+Z_{21})&\equiv\frac{1}{m_0}(Z_{01}+Z_{02}).\end{aligned}\right\}\qquad(9.59)$$

Остается установить условия, при которых равенства (9.59) могут быть выполнены в плоском движении (если таковое существует) для всякого значения t.

Формулы (9.44) и (9.44′) нам дадут при $z_1=z_2=0$

$$\left.\begin{aligned}(Z_{ij})_0&=\int\limits_{(T_i)}dm_i\int\limits_{(T_j)}dm_j\left[\frac{F_{ij}}{\Delta_{ij}}\right]_0\times(\tilde{Z}_{ij})_0,\\ (\tilde{Z}_{ij})_0&=a_{31}^{(j)}x_j'+a_{32}^{(j)}y_j'+a_{33}^{(j)}z_j'-a_{31}^{(i)}x_i'-a_{32}^{(i)}y_i'-a_{33}^{(i)}z_i'.\end{aligned}\right\}\qquad(9.60)$$

Значок «0» в индексе указывает, что в выражении, заключенном в квадратные скобки, нужно положить также

$$\dot{z}_1=\dot{z}_2=\ddot{z}_1=\ddot{z}_2=0.$$

Предположим теперь, что каждое из трех тел T_i обладает динамической и геометрической симметрией относительно своей собственной плоскости $z_i'=0$, так что внешняя поверхность тела T_i симметрична относительно этой плоскости, и что, вдобавок, плотность каждого тела есть четная функция от z_i', т. е., что

$$\delta=\delta_i\left(x_i',\ y_i',\ z_i'^2\right)\qquad(i=0,\ 1,\ 2).$$

Установим каждое тело в начальный момент так, чтобы его плоскость симметрии совпадала с плоскостью (xG_0y). Тогда начальные значения углов нутации будут равны нулю и если мы будем иметь

$$\vartheta_0=\vartheta_1=\vartheta_2$$

также для всякого значения t, то каждое тело T_i будет вращаться вокруг оси неизменного направления, перпендикулярной к плоскости (xG_0y) и проходящей через точку G_i, которая, очевидно, будет тогда всегда находиться в этой плоскости. Но тогда мы будем иметь также для всякого значения t

$$a_{31}^{(i)}=0,\quad a_{32}^{(i)}=0,\quad a_{33}^{(i)}=1,$$
$$a_{13}^{(i)}=0,\quad a_{23}^{(i)}=0\qquad(i=0,\ 1,\ 2)$$

и формулы (9.60) приведутся к виду

$$(Z_{ij})_0=\int\limits_{(T_i)}dm_i\int\limits_{(T_j)}dm_j\left[\frac{F_{ij}}{\Delta_{ij}}\right]_0(z_j'-z_i')\qquad(9.60')$$

где, вследствие (9.45) и (9.46),

$$(\Delta_{ij}^2)_0 = (x_j - x_i + a_{11}^{(j)}x'_j + a_{12}^{(j)}y'_j - a_{11}^{(i)}x'_i - a_{12}^{(i)}y'_i)^2 + \\ + (y_j - y_i + a_{21}^{(j)}x'_j + a_{22}^{(j)}y'_j - a_{21}^{(i)}x'_i - a_{22}^{(i)}y'_i)^2 + (z'_j - z'_i)^2,$$

и величины $(\dot{\Delta}_{ij})_0$ и $(\ddot{\Delta}_{ij})_0$ не зависят вовсе от z'_i и z'_j.

Поэтому изменение знаков величин z'_i и z'_j не изменит значения величин $(\Delta_{ij})_0$, $(\dot{\Delta}_{ij})_0$, $(\ddot{\Delta}_{ij})_0$, а также и $(F_{ij})_0$, и, следовательно, все интегралы (9.60) будут равны нулю. А тогда равенства (9.59) будут удовлетворены и, таким образом, общие уравнения движения трех твердых тел будут допускать плоские решения, если каждое тело обладает плоскостью геометрической и динамической симметрии, проходящей через его центр масс.

В таком случае, если в начальный момент три тела расположены так, что их плоскости симметрии совпадают с плоскостью (xG_0y), то остальные начальные условия возможно назначить таким образом, что три центра масс G_0, G_1 и G_2 всегда будут оставаться в плоскости (xG_0y), а вращательное движение каждого тела сведется к вращению вокруг оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно к этой неизменной плоскости, в которой происходит движение точек G_1 и G_2.

§ 4. Лагранжевы и эйлеровы решения задачи трех твердых тел

1. Напишем теперь дифференциальные уравнения плоского движения трех тел, каждое из которых имеет плоскость симметрии и расположено описанным в предыдущем параграфе образом.

Чтобы получить эти уравнения в наиболее простой форме, заметим прежде всего, что в случае совпадения плоскости симметрии каждого из тел T_i с плоскостью (xG_0y) мы можем, без нарушения общности, принять

$$\psi_0 = \psi_1 = \psi_2 = 0,$$

вследствие чего будем иметь по формулам (9.6)

$$\begin{aligned} a_{11}^{(i)} &= \cos\varphi_i, & a_{21}^{(i)} &= \sin\varphi_i, \\ a_{12}^{(i)} &= -\sin\varphi_i, & a_{22}^{(i)} &= \cos\varphi_i \end{aligned} \qquad (i = 0,\ 1,\ 2).$$

Значения остальных пяти направляющих косинусов были уже выписаны выше.