где, вследствие (9.45) и (9.46),

$$(\Delta_{ij}^2)_0 = (x_j - x_i + a_{11}^{(j)}x'_j + a_{12}^{(j)}y'_j - a_{11}^{(i)}x'_i - a_{12}^{(i)}y'_i)^2 + \\ + (y_j - y_i + a_{21}^{(j)}x'_j + a_{22}^{(j)}y'_j - a_{21}^{(i)}x'_i - a_{22}^{(i)}y'_i)^2 + (z'_j - z'_i)^2,$$

и величины $(\dot{\Delta}_{ij})_0$ и $(\ddot{\Delta}_{ij})_0$ не зависят вовсе от z'_i и z'_j.

Поэтому изменение знаков величин z'_i и z'_j не изменит значения величин $(\Delta_{ij})_0$, $(\dot{\Delta}_{ij})_0$, $(\ddot{\Delta}_{ij})_0$, а также и $(F_{ij})_0$, и, следовательно, все интегралы (9.60) будут равны нулю. А тогда равенства (9.59) будут удовлетворены и, таким образом, общие уравнения движения трех твердых тел будут допускать плоские решения, если каждое тело обладает плоскостью геометрической и динамической симметрии, проходящей через его центр масс.

В таком случае, если в начальный момент три тела расположены так, что их плоскости симметрии совпадают с плоскостью (xG_0y), то остальные начальные условия возможно назначить таким образом, что три центра масс G_0, G_1 и G_2 всегда будут оставаться в плоскости (xG_0y), а вращательное движение каждого тела сведется к вращению вокруг оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно к этой неизменной плоскости, в которой происходит движение точек G_1 и G_2.

§ 4. Лагранжевы и эйлеровы решения задачи трех твердых тел

1. Напишем теперь дифференциальные уравнения плоского движения трех тел, каждое из которых имеет плоскость симметрии и расположено описанным в предыдущем параграфе образом.

Чтобы получить эти уравнения в наиболее простой форме, заметим прежде всего, что в случае совпадения плоскости симметрии каждого из тел T_i с плоскостью (xG_0y) мы можем, без нарушения общности, принять

$$\psi_0 = \psi_1 = \psi_2 = 0,$$

вследствие чего будем иметь по формулам (9.6)

$$\begin{aligned} a_{11}^{(i)} &= \cos\varphi_i, & a_{21}^{(i)} &= \sin\varphi_i, \\ a_{12}^{(i)} &= -\sin\varphi_i, & a_{22}^{(i)} &= \cos\varphi_i \end{aligned} \qquad (i = 0,\ 1,\ 2).$$

Значения остальных пяти направляющих косинусов были уже выписаны выше.

Теперь из формул (9.44), (9.44′), (9.48) находим

$$(X_{ij})_0 = \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} dm_j \left[\frac{F_{ij}}{\Delta_{ij}}\right]_0 \cdot (\tilde{X}_{ij})_0;$$

$$(Y_{ij})_0 = \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} dm_j \left[\frac{F_{ij}}{\Delta_{ij}}\right]_0 \cdot (\tilde{Y}_{ij})_0,$$

$$(\tilde{X}_{ij})_0 = x_j - x_i + x_j' \cos\varphi_j - y_j' \sin\varphi_j - x_i' \cos\varphi_i + y_i' \sin\varphi_i,$$

$$(\tilde{Y}_{ij})_0 = y_j - y_i + x_j' \sin\varphi_j + y_j' \cos\varphi_j - x_i' \sin\varphi_i - y_i' \cos\varphi_i,$$

$$(P_{ij})_0 = \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} dm_j \left[\frac{F_{ij}}{\Delta_{ij}}\right]_0 \cdot (\tilde{P}_{ij})_0,$$

$$(Q_{ij})_0 = \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} dm_j \left[\frac{F_{ij}}{\Delta_{ij}}\right]_0 \cdot (\tilde{Q}_{ij})_0,$$

$$(R_{ij})_0 = \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} dm_j \left[\frac{F_{ij}}{\Delta_{ij}}\right]_0 \cdot (R_{ij})_0,$$

$$(\tilde{P}_{ij})_0 = [z_i'(x_j - x_i + x_j' \cos\varphi_j - y_j' \sin\varphi_j) \sin\varphi_i - \\ - z_i'(y_j - y_i + x_j' \sin\varphi_j + y_j \cos\varphi_j) \cos\varphi_i + z_j' y_j'],$$

$$(\tilde{Q}_{ij})_0 = [z_i'(x_j - x_i + x_j' \cos\varphi_j - y_j' \sin\varphi_j) \cos\varphi_j + \\ + z_i'(y_j - y_i + x_j' \sin\varphi_j + y_j' \cos\varphi_j) \sin\varphi_i - z_j' x_j'],$$

$$(\tilde{R}_{ij})_0 = [-(x_j - x_i + x_j' \cos\varphi_j - y_j' \sin\varphi_j)(x_i' \sin\varphi_i + y_i' \cos\varphi_i) + \\ + (y_j - y_i + x_j' \sin\varphi_j + y_j' \cos\varphi_j)(x_i' \cos\varphi_i - y_i' \sin\varphi_i)],$$

откуда вследствие допущенной симметрии тел T_i находим

$$(P_{ij})_0 = (Q_{ij})_0 = 0.$$

Заметим теперь, что так как при вычислении интегралов величины φ_0, φ_1, φ_2 остаются постоянными, играя роль параметров интегрирования, то мы можем ввести для каждого тела T_i новые собственные координаты, полагая

$$\bar{x}_i = x_i' \cos\varphi_i - y_i' \sin\varphi_i, \quad \bar{y}_i = x_i' \sin\varphi_i + y_i' \cos\varphi_i, \quad \bar{z}_i = z_i',$$

а тогда для взаимных расстояний $(\Delta_{ij})_0$ получим следующие выражения ($i, j = 0, 1, 2$):

$$(\Delta_{ij}^2)_0 = (x_j - x_i + \bar{x}_j - \bar{x}_i)^2 + (y_j - y_i + \bar{y}_j - \bar{y}_i)^2 + (\bar{z}_j - \bar{z}_i)^2$$

и выражения для $(X_{ij})_0$, $(Y_{ij})_0$, $(Z_{ij})_0$ напишутся следующим образом ($x_0 = y_0 = z_0 = 0$):

$$\left.\begin{aligned}
(X_{ij})_0 &= \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} dm_j \left[\frac{F_{ij}}{\Delta_{ij}}\right]_0 \cdot (x_j - x_i + \bar{x}_j - \bar{x}_i),\\
(Y_{ij})_0 &= \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} dm_j \left[\frac{F_{ij}}{\Delta_{ij}}\right]_0 \cdot (y_j - y_i + \bar{y}_j - \bar{y}_i),\\
(R_{ij})_0 &= \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} dm_j \left[\frac{F_{ij}}{\Delta_{ij}}\right]_0 \cdot [-(x_j - x_i + \bar{x}_j)\,\bar{y}_i +\\
&\qquad + (y_j - y_i + \bar{y}_j)\,\bar{x}_i].
\end{aligned}\right\} \tag{9.61}$$

Наконец формулы (9.53) дают

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \rho_1 \cos v, \quad x_2 = \rho_2 \cos(v + \psi),\\
y_1 &= \rho_1 \sin v, \quad y_2 = \rho_2 \sin(v + \psi),
\end{aligned}\right\} \tag{9.62}$$

а из уравнений (9.55) следует

$$p_i = 0, \quad q_i = 0, \quad r_i = \dot{\varphi}_i.$$

Таким образом, уравнения плоского движения приводятся к виду

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{\rho}_1 - \dot{v}^2\rho_1 = (X_1)_0 \cos v + (Y_1)_0 \sin v,\\
&\frac{d}{dt}(\dot{v}\rho_1^2) = \rho_1[-(X_1)_0 \sin v + (Y_2)_0 \cos v],\\
&\ddot{\rho}_2 - (\dot{v} + \dot{\psi})^2 \cdot \rho_2 = (X_2)_0 \cos(v + \psi) + (Y_2) \sin(v + \psi),\\
&\frac{d}{dt}[(\dot{v} + \dot{\psi})\rho_2^2] = \rho_2[-(X_2)_0 \sin(v + \psi) + (Y_2)_0 \cos(v + \psi)],
\end{aligned}\right\} \tag{9.63}$$

$$\left.\begin{aligned}
C_0\ddot{\varphi}_0 &= (R_{01})_0 + (R_{02})_0,\\
C_1\ddot{\varphi}_1 &= (R_{10})_0 + (R_{12})_0,\\
C_2\ddot{\varphi}_2 &= (R_{20})_0 + (R_{21})_0.
\end{aligned}\right\} \tag{9.64}$$

Эти семь уравнений второго порядка с семью неизвестными

$$\rho_1,\ \rho_2,\ \psi,\ v,\ \varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2 \tag{9.65}$$

образуют совместную систему уравнений, определяющих движение трех тел, каждое из которых обладает плоскостной симметрией, центры масс которых всегда остаются в плоскости (xG_0y). Центры масс G_1, G_2 тел T_1 и T_2 описывают в этой плоскости вокруг начала G_0 плоские кривые, а каждое тело вращается вокруг оси, проходящей через его центр масс, перпендикулярно к этой плоскости.

Угловые скорости этих вращательных движений суть

$$\dot{\varphi}_0,\ \dot{\varphi}_1,\ \dot{\varphi}_2.$$

Примечание. Уравнения (9.63) и (9.64) вообще не распадаются на две независимые системы, так как правые части уравнений (9.63) зависят также от углов φ_0, φ_1, φ_2 и их производных, а правые части уравнений (9.64) — от координат точек G_1 и G_2 и их производных. Кроме того, в самом общем случае правые части всех уравнений зависят также явно от времени t.

Заметим еще, что если действующие силы, т. е. функции F_{ij}, зависят только от Δ_{ij} и t или только от Δ_{ij}, то правые части уравнений плоского движения не будут содержать производных от координат точек G_1, G_2 и от углов φ_i тел T_i.

2. Частными случаями плоского движения, определяемого уравнениями (9.63) и (9.64), могут быть лагранжевы и эйлеровы движения, в которых точки G_0, G_1, G_2 образуют равносторонний треугольник, вращающийся вокруг G_0, или располагаются на одной прямой, также вращающейся вокруг начала G_0.

Но ясно, что для произвольно заданных тел, обладающих плоскостной симметрией, такого рода специальные движения существовать не будут, тем более при произвольно заданных законах действующих в рассматриваемой системе сил. Единственным известным исключением является случай, когда действующие силы определяются законом Гука (9.16). В этом случае уравнения поступательно-вращательного движения произвольно заданных тел (т. е. имеющих какую угодно форму и внутреннее строение) распадаются на две системы (9.15) и (9.16), не зависящие друг от друга. Система (9.15) описывает движение центров масс тел, т. е. системы материальных точек, массы которых равны соответствующим массам тел, а поэтому, как мы видели в главе VIII, для случая трех тел система (9.15) допускает и лагранжевы и эйлеровы движения. При этом каждое из трех тел вращается вокруг своего центра масс независимо от других тел, по законам Эйлера.

Если законы действующих сил отличаются от законов Гука и являются, например, законами Ньютона или законами Вебера, то для осуществления лагранжевых и эйлеровых движений эти законы, так же как и формы и структуры тел, должны удовлетворять дополнительным условиям.

Неизвестно, возможно ли получить эти условия, не делая заранее некоторые предположения.

Но рассмотрим случай, когда заранее известно, что каждое из тел T_i, кроме симметрии относительно плоскости, проходящей через его центр масс, обладает еще динамической и геометрической симметрией относительно оси, также проходящей

через центр масс, перпендикулярно к плоскости симметрии тела.

Таким образом, рассмотрим случай, когда внешняя поверхность тела есть поверхность вращения вокруг указанной оси, а плотность каждого тела является некоторой функцией от расстояния текущей точки до оси вращения и квадрата расстояния до плоскости симметрии, так что $(i = 0, 1, 2)$

$$\delta_i = \delta_i\left(x_i'^2 + y_i'^2;\ z_i'^2\right) = \delta_i\left(\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2;\ \bar{z}_i^2\right).$$

В этом случае любые две взаимно перпендикулярные плоскости, проходящие через ось симметрии тела, также являются плоскостями симметрии, в силу чего все интегралы типа $(k = i,\ j)$

$$\int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} dm_j \left[\frac{F_{ij}}{\Delta_{ij}}\right] \cdot \bar{x}_k, \qquad \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} dm_j \left[\frac{F_{ij}}{\Delta_{ij}}\right] \cdot \bar{y}_k$$

также равны нулю, как и интегралы, содержащие множителем величину $\bar{z}_k$, как было подробно показано несколько выше.

Следовательно, мы будем иметь

$$\left.\begin{aligned} &(R_{ij})_0 = 0, \\ &(X_{ij})_0 = (x_j - x_i) \cdot \tilde{F}_{ij}, \\ &(Y_{ij})_0 = (y_j - y_i) \cdot \tilde{F}_{ij}, \end{aligned}\right\} \tag{9.66}$$

где

$$\tilde{F}_{ij} = \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} dm_j \left[\frac{F_{ij}}{\Delta_{ij}}\right]_0. \tag{9.67}$$

Теперь из уравнений (9.64) следует

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{\varphi}_i = 0, \quad \dot{\varphi}_i = \dot{\varphi}_i^0 = \text{const}, \\ &\varphi_i = \varphi_i^0 + (t - t_0) \cdot \dot{\varphi}_i^0 \qquad (i = 0,\ 1,\ 2), \end{aligned}\right\} \tag{9.68}$$

так что каждое тело T_i вращается равномерно вокруг своей оси симметрии с угловой скоростью, не зависящей от поступательных движений тел, т. е. центров масс G_1 и G_2 в плоскости (xG_0y).

Выражения (9.67) зависят от величин ρ_1, ρ_2 и ψ, т. е. от величин, определяющих треугольник, вращающийся вокруг своей вершины G_0 с угловой скоростью $\dot{\vartheta}$.

Уравнения, определяющие форму и положение этого треугольника в его плоскости (xG_0y), мы получим из уравнений (9.63) при помощи формул (9.66) и простых упрощений в

следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{\rho}_1 - \dot{v}^2 \cdot \rho_1 = -\rho_1\left\{\frac{\tilde{F}_{01}}{m_0} + \frac{\tilde{F}_{10}}{m_1} + \frac{\tilde{F}_{12}}{m_1}\right\} + \rho_2\left\{\frac{\tilde{F}_{12}}{m_1} - \frac{\tilde{F}_{02}}{m_0}\right\}\cos\psi,\\
&\frac{d}{dt}(\dot{v}\rho_i^2) = \rho_1\rho_2\left\{\frac{\tilde{F}_{12}}{m_1} - \frac{\tilde{F}_{02}}{m_0}\right\}\sin\psi,\\
&\ddot{\rho}_2 - \rho_2(\dot{v} + \dot{\psi})^2 =\\
&\qquad = -\rho_2\left\{\frac{\tilde{F}_{02}}{m_0} + \frac{\tilde{F}_{20}}{m_2} + \frac{\tilde{F}_{21}}{m_2}\right\} + \rho_1\left\{\frac{\tilde{F}_{21}}{m_2} - \frac{\tilde{F}_{01}}{m_0}\right\}\cos\psi,\\
&\frac{d}{dt}[(\dot{v} + \dot{\psi})\rho_2^2] = \rho_1\rho_2\left\{\frac{\tilde{F}_{01}}{m_0} - \frac{\tilde{F}_{21}}{m_2}\right\}\sin\psi.
\end{aligned}\right\} \tag{9.69}$$

Эти уравнения образуют совместную систему четырех дифференциальных уравнений второго порядка с четырьмя неизвестными функциями ρ_1, ρ_2, v, ψ и вполне аналогичны уравнениям плоского движения трех материальных точек, которые рассматривались в предыдущей главе.

Однако правые части этих уравнений выражаются через неизвестные функции и их производные гораздо более сложным образом, чем в задаче материальных точек.

Тем не менее, нетрудно обнаружить, что эти уравнения допускают частные решения такого же характера, которые были указаны в случае плоской задачи, и найти условия, при выполнении которых такие решения существуют.

В самом деле, посмотрим, при каких условиях уравнения (9.69) допускают треугольное решение, в котором

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho(t); \quad v = v(t); \quad \psi = \pm 60^\circ. \tag{9.70}$$

Для этого правая часть первого уравнения должна совпадать при значениях (9.70) с правой частью третьего уравнения и правая часть второго — с правой частью четвертого. Для этого, как легко видеть, при значениях (9.70) должны выполняться следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{m_0}\tilde{F}_{01} = \frac{1}{m_2}\tilde{F}_{21},\\
&\frac{1}{m_1}\tilde{F}_{10} = \frac{1}{m_2}\tilde{F}_{20},\\
&\frac{1}{m_1}\tilde{F}_{12} = \frac{1}{m_0}\tilde{F}_{02}.
\end{aligned}\right\} \tag{9.71}$$

Равенства (9.71) представляют собой необходимые и достаточные условия существования лагранжева решения в задаче трех твердых тел, обладающих плоско-осевой симметрией и вполне подобны условиям (8.45) в задаче трех материальных

точек. Однако условия (8.45) налагают некоторые ограничения только на законы действующих сил, а условия (9.71) налагают ограничения также и на структурные характеристики тел.

Если условия (9.71) выполнены, то две оставшиеся неизвестными функции ρ и v определяются уравнениями

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{\rho} - \rho\dot{v}^2 = -\rho\left\{\frac{\tilde{F}_{01}}{m_0} + \frac{\tilde{F}_{12}}{m_1} + \frac{\tilde{F}_{20}}{m_2}\right\}, \\ &\rho^2\dot{v} = c, \end{aligned}\right\} \tag{9.72}$$

где c — произвольная постоянная (постоянная площадей).

Так же как в главе VIII, мы имеем здесь два лагранжевых треугольных решения, в которых траектории точек G_1 и G_2 определяются уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} &\rho_1 = \rho(t;\ c,\ v_0,\ \rho_0,\ \dot{\rho}_0), \quad v_1 = v(t;\ c,\ v_0,\ \rho_0,\ \dot{\rho}_0), \\ &\rho_2 = \rho(t;\ c,\ v_0,\ \rho_0,\ \dot{\rho}_0), \quad v_2 = v + 60^\circ, \end{aligned}\right\} \tag{L_4}$$

$$\left.\begin{aligned} &\rho_1 = \rho(t;\ c,\ v_0,\ \rho_0,\ \dot{\rho}_0), \quad v_1 = v(t;\ c,\ v_0,\ \rho_0,\ \dot{\rho}_0), \\ &\rho_2 = \rho(t;\ c,\ v_0,\ \rho_0,\ \dot{\rho}_0), \quad v_2 = v - 60^\circ. \end{aligned}\right\} \tag{L_5}$$

Каждое из этих треугольных решений, которые мы вновь обозначили через (L_4) и (L_5), зависит от четырех произвольных постоянных и точки G_1 и G_2 описывают в каждом из этих решений подобные орбиты.

Если законы сил не зависят явно от времени, а выражение в фигурных скобках в формулах (9.72) окажется величиной положительной, то траектории в решениях (L_4) и (L_5) могут быть окружностями с центром в точке G_0. Тогда треугольник $(G_0G_1G_2)$ будет неизменным равносторонним треугольником, вращающимся с постоянной угловой скоростью вокруг вершины G_0, являющейся началом координат.

3. Перейдем к рассмотрению эйлеровых, или прямолинейных, решений. Посмотрим, при каких условиях точки G_1 и G_2 смогут всегда оставаться на одной прямой, проходящей через точку G_0 и вращающейся вокруг этой точки.

Так же как и в главе VIII, мы будем различать три эйлеровых решения, характеризуемых следующими условиями:

$$\left.\begin{aligned} &\psi = 180^0, \quad \rho_1 = \rho, \quad \rho_2 = \alpha\rho, \\ &\Delta = (1+\alpha)\rho, \quad \alpha > 0 \end{aligned}\right\} \tag{L_1}$$

(центры масс тел T_i располагаются в порядке G_2, G_0, G_1);

$$\left.\begin{aligned} &\psi = 0, \quad \rho_1 = \rho, \quad \rho_2 = \alpha\rho, \\ &\Delta = (1-\alpha)\rho, \quad 0 < \alpha < 1 \end{aligned}\right\} \tag{L_2}$$

(центры масс располагаются в порядке G_0, G_2, G_1);

$$\left.\begin{aligned} \psi = 0, \quad \rho_1 = \rho, \quad \rho_2 = \alpha\rho, \\ \Lambda = (\alpha - 1)\rho, \quad \alpha > 1 \end{aligned}\right\} \qquad (L_2)$$

(центры масс располагаются в порядке G_0, G_1, G_2). Величина α есть некоторая постоянная, так что в каждом из прямолинейных решений отношения расстояний между центрами масс трех тел остаются постоянными. Функции ρ и v (v — угол, образуемый вращающейся прямой с неизменным направлением в плоскости (xG_0y)) определяются в каждом из трех решений следующими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \rho^2\dot{v} = c, \\ \ddot{\rho} - \rho\dot{v}^2 = -\rho\left[\frac{\tilde{F}^*_{01}}{m_0} + \frac{\tilde{F}^*_{12}}{m_1} + \frac{\tilde{F}_{10}}{m_1} \mp \alpha\left(\frac{\tilde{F}^*_{12}}{m_1} - \frac{\tilde{F}^*_{02}}{m_0}\right)\right] \end{aligned}\right\} \qquad (9.73)$$

(знак «—» нужно взять для решения (L_1) и знак «+» для решений (L_2) и (L_3)).

Условия существования эйлеровых решений мы получим из уравнений (9.69), требуя, чтобы эти уравнения удовлетворялись значениями (L_1), (L_2), (L_3).

Эти условия напишутся последовательно следующим образом: для (L_1)

$$(1+\alpha)\frac{\tilde{F}^*_{01}}{m_0} - \alpha(1+\alpha)\frac{\tilde{F}^*_{02}}{m_0} + \alpha\frac{\tilde{F}^*_{10}}{m_1} - \\ - \alpha\frac{\tilde{F}^*_{20}}{m_2} + \alpha(1+\alpha)\frac{\tilde{F}^*_{12}}{m_1} - (1+\alpha)\frac{\tilde{F}^*_{21}}{m_2} = 0 \qquad (9.74)$$

и для (L_2) и (L_3)

$$(1-\alpha)\frac{\tilde{F}^*_{01}}{m_1} + \alpha(1-\alpha)\frac{\tilde{F}^*_{02}}{m_0} + \alpha\frac{\tilde{F}^*_{20}}{m_2} - \\ - \alpha\frac{\tilde{F}^*_{10}}{m_1} - \alpha(1-\alpha)\frac{\tilde{F}^*_{12}}{m_1} - (1-\alpha)\frac{\tilde{F}^*_{21}}{m_2} = 0, \qquad (9.75)$$

где величины $\tilde{F}_{ij}$ определяются следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{F}^*_{01} = \tilde{F}_{01}(t;\ \rho,\ \dot{\rho},\ \ddot{\rho}), && \tilde{F}^*_{10} = \tilde{F}_{10}(t;\ \rho,\ \dot{\rho},\ \ddot{\rho}), \\ &\tilde{F}^*_{02} = \tilde{F}_{02}(t;\ \alpha\rho,\ \alpha\dot{\rho},\ \alpha\ddot{\rho}), && \tilde{F}^*_{20} = \tilde{F}_{20}(t;\ \alpha\rho,\ \alpha\dot{\rho},\ \alpha\ddot{\rho}), \\ &\tilde{F}^*_{12} = \tilde{F}_{12}(t;\ \pm(1\pm\alpha)\rho;\ \pm(1\pm\alpha)\dot{\rho};\ \pm(1\pm\alpha)\ddot{\rho}), \\ &\tilde{F}^*_{21} = \tilde{F}_{21}(t;\ \pm(1\pm\alpha)\rho;\ \pm(1\pm\alpha)\dot{\rho};\ \pm(1\pm\alpha)\ddot{\rho}), \end{aligned}\right\} \qquad (9.76)$$

причем для получения уравнения, определяющего (L_1), нужно в (9.76) взять знак «+» перед скобками и в скобках; для получения уравнения, определяющего (L_2) нужно взять знак «—»

перед скобками и внутри скобок. Наконец, для получения уравнения, определяющего (L_3), нужно взять знак «+» перед скобками и знак «—» внутри скобок.

Для нахождения самих прямолинейных решений вообще придется поступать следующим образом: нужно сначала найти решение уравнений (9.73), рассматривая в них α как параметр, затем подставить найденное значение ρ в уравнения (9.74) и (9.75), и если какое-либо из этих уравнений окажется содержащим только α, то определить его из полученного уравнения, а затем найденное значение α подставить в решение уравнений (9.73). Но эта процедура, очевидно, невыполнима, а поэтому найти эйлеровы решения задачи трех твердых тел удается только в некоторых простейших случаях.

Например, если законы сил не содержат явно времени, то уравнения (9.73) могут допускать решение $\rho = a = \text{const}$ и $\dot{v} = \text{const}$. Задавая для a какое-либо определенное значение, мы сможем из уравнений (9.74) и (9.75) найти соответствующее значение α. Тогда наша задача заведомо будет иметь решение, в котором точки G_1 и G_2 описывают окружности с центром в G_0 с радиусами a и αa соответственно и с постоянной угловой скоростью, равной c/a^2.

Разумеется, каждое из этих уравнений должно иметь по крайней мере один вещественный корень, больший нуля для (L_1), заключенный между нулем и единицей для (L_2) и больший единицы для (L_3).

Но в нашей задаче могут также существовать и непостоянные прямолинейные решения, в которых точки G_1 и G_2 движутся по некоторым замкнутым или незамкнутым кривым вокруг точки G_0 с постоянной секториальной скоростью. Таков будет, например, случай, аналогичный указанному в главе VIII, а именно тот случай, в котором функции будут таковы, что

$$\tilde{F}^*_{ij}(t;\ x\rho,\ x\dot{\rho},\ x\ddot{\rho}) = \Phi_{ij}(x)\cdot\Psi(t;\ \rho,\ \dot{\rho},\ \ddot{\rho}),$$

где функция Ψ не зависит от индексов i и j.

В этом случае уравнения (9.74) и (9.75) напишутся соответственно, как легко видеть, следующим образом:

$$(1+\alpha)\frac{\Phi_{01}(1)}{m_0} - \alpha(1+\alpha)\frac{\Phi_{02}(\alpha)}{m_0} + \alpha\frac{\Phi_{10}(1)}{m_1} -$$
$$-\alpha\frac{\Phi_{20}(\alpha)}{m_1} + \alpha(1+\alpha)\frac{\Phi_{12}(1+\alpha)}{m_1} - (1+\alpha)\frac{\Phi_{21}(1+\alpha)}{m_1} = 0, \qquad (9.74')$$

$$(1-\alpha)\frac{\Phi_{01}(1)}{m_1} + \alpha(1-\alpha)\frac{\Phi_{02}(\alpha)}{m_0} + \alpha\frac{\Phi_{20}(\alpha)}{m_2} - \alpha\frac{\Phi_{01}(1)}{m_1} -$$
$$-\alpha(1-\alpha)\frac{\Phi_{12}[\pm(1-\alpha)]}{m_1} - (1-\alpha)\frac{\Phi_{21}[\pm(1-\alpha)]}{m_2} = 0. \qquad (9.75')$$

Каждое из этих уравнений содержит единственную неизвестную α, определив которую, мы найдем положение точки G_2 в каждом из эйлеровых решений.

4. Фактическая проверка условий существования лагранжевых и эйлеровых решений для трех тел, обладающих плоско-осевой симметрией и движения которых управляются заданными силами, представляет весьма сложную задачу, требующую вычисления многократных интегралов от громоздких функций с различными областями интегрирования.

Это может быть сделано вообще только при помощи разложений интегралов в бесконечные ряды, вследствие чего искомые условия необходимо распадутся на бесчисленное множество условий, проверка всей совокупности которых может сделаться доступной только в некоторых простых случаях.

Посмотрим, как это может быть сделано при предположении, что элементарные частицы каждой пары из трех тел взаимно притягиваются по закону Ньютона с постоянным коэффициентом пропорциональности. Тогда мы будем иметь

$$F_{ij} = \frac{f}{\Delta_{ij}^2}, \tag{9.77}$$

где f — обычная постоянная ньютоновского притяжения.

Формула (9.67) дает в этом случае

$$\tilde{F}_{ij} = f \int\limits_{(T_i)} \int\limits_{(T_j)} \frac{dm_i\, dm_j}{[\Delta_{ij}^3]_0}. \tag{9.77'}$$

Для вычисления этого интеграла, в котором тела (T_i) и (T_j) предполагаются обладающими плоско-осевой симметрией, причем плоскости симметрии совпадают с плоскостью (xG_0y), можно поступить следующим образом. Обозначим, как обычно, через U_{ij} функцию сил двух указанных тел, расположенных указанным образом, т. е. положим

$$\tilde{U}_{ij} = f \int\limits_{(T_i)} \int\limits_{(T_j)} \frac{dm_i\, dm_j}{[\Delta_{ij}]_0}. \tag{9.78}$$

В рассматриваемом случае, т. е. когда центры масс тел находятся в плоскости (xG_0y), взаимные расстояния определяются следующими формулами:

$$\Delta_{01}^2 = \Delta_{10}^2 = \rho_1^2 + 2\rho_1(\bar{x}_1 - \bar{x}_0)\cdot\cos v_1 + 2\rho_1(\bar{y}_1 - \bar{y}_0)\cdot\sin v_1 + (\bar{z}_1 - \bar{z}_0)^2,$$

$$\Delta_{02}^2 = \Delta_{20}^2 = \rho_2^2 + 2\rho_2(\bar{x}_2 - \bar{x}_0)\cdot\cos v_2 + 2\rho_2(\bar{y}_2 - \bar{y}_0)\sin v_2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_0)^2,$$

$$\Delta_{12}^2 = \Delta_{21}^2 = \Delta^2 + 2\Delta(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)(\cos v_2 - \cos v_1) +$$
$$+ 2\Delta(\bar{y}_2 - \bar{y}_1)(\sin v_2 - \sin v_1) + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2$$

Теперь из (9.78) мы выводим, например,

$$\frac{\partial \tilde{U}_{01}}{\partial \rho_1} = \frac{\partial \tilde{U}_{10}}{\partial \rho_1} = -\int\limits_{(T_0)}\int\limits_{(T_1)} \frac{dm_0\, dm_1}{\Delta_{01}^2} \frac{\partial \Delta_{01}}{\partial \rho_1}.$$

Но

$$\Delta_{01} \frac{\partial \Delta_{01}}{\partial \rho_1} = \rho_1 + (\bar{x}_1 - \bar{x}_0)\cos v_1 + (\bar{y}_1 - \bar{y}_0)\sin v_1,$$

откуда вследствие (9.77′) и замечая, что интегралы, содержащие множителем $\bar{x}_k$ или $\bar{y}_k$, равны нулю, мы получим

$$\left.\begin{aligned} \tilde{F}_{01} &= \tilde{F}_{10} = -\left(\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial \tilde{U}_{01}}{\partial \rho_1}\right)_0, \\ \tilde{F}_{02} &= \tilde{F}_{20} = -\left(\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial \tilde{U}_{02}}{\partial \rho_2}\right)_0, \\ \tilde{F}_{12} &= \tilde{F}_{21} = -\left(\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \tilde{U}_{12}}{\partial \Delta}\right)_0 \end{aligned}\right\} \tag{9.79}$$

Так как в лагранжевом решении должно быть

$$\rho_1 = \rho_2 = \Delta = \rho,$$

то условия (9.71) напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{m_1}\frac{\partial U_{10}}{\partial \rho} &= \frac{1}{m_2}\frac{\partial U_{20}}{\partial \rho}, \\ \frac{1}{m_1}\frac{\partial U_{12}}{\partial \rho} &= \frac{1}{m_0}\frac{\partial U_{02}}{\partial \rho}, \\ \frac{1}{m_0}\frac{\partial U_{01}}{\partial \rho} &= \frac{1}{m_2}\frac{\partial U_{21}}{\partial \rho}, \end{aligned}\right\} \tag{9.80}$$

и наша задача приводится к проверке этих условий, т. е. к установлению формы и структуры тел, обладающих плоско-осевой симметрией, для которых условия (9.80) действительно выполняются.

Заметим прежде всего, что эти условия заведомо выполняются, если все три тела одинаковы по форме и структуре и имеют одинаковые массы.

Но условия (9.80) могут выполняться и для неодинаковых тел. Действительно, пусть каждое тело T_i есть шар, однородный или обладающий сферической структурой. Тогда, как нам известно из теории притяжения, мы имеем ($R_{ij} = \overline{G_iG_j}$)

$$U_{ij} = f\,\frac{m_i m_j}{R_{ij}},$$

и условия (9.80) выполняются, каковы бы ни были радиусы и массы трех шаров.

Если тела, не являясь шарами, обладают динамической и геометрической симметрией относительно оси и плоскости, ей перпендикулярной, то силовая функция двух таких тел при совпадении их плоскостей симметрии будет зависеть только от расстояния между их центрами масс и определится классическим разложением следующего вида:

$$U_{ij} = f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_{ij}^{(2n)}}{R_{ij}^{2n+1}}, \tag{9.81}$$

где $U_{ij}^{(2n)}$ — постоянные коэффициенты, зависящие от формы и структуры этих двух тел.

Первые из этих коэффициентов определяются следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} U_{ij}^{(0)} &= m_i m_j, \\ U_{ij}^{(2)} &= \frac{1}{2} m_i (A_j - C_j) + \frac{1}{2} m_j (A_i - C_i), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right\} \tag{9.81'}$$

где A_i и C_i — главные, центральные моменты инерции тел T_i.

Остальные структурные коэффициенты выражаются через моменты инерции высших порядков. Выражения для $U_{ij}^{(4)}$ и $U_{ij}^{(6)}$ вычислены автором и приведены в его работе, напечатанной в международном журнале «Небесная механика», т. 14, 1976 г.

Теперь, как видно из (9.80), условия существования лагранжевых решений для трех тел указанного вида приводятся к бесчисленному множеству условий вида ($n = 0, 1, 2, \ldots$)

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{m_1} U_{10}^{(2n)} &= \frac{1}{m_2} U_{02}^{(2n)}, \\ \frac{1}{m_1} U_{12}^{(2n)} &= \frac{1}{m_0} U_{02}^{(2n)}, \\ \frac{1}{m_0} U_{01}^{(2n)} &= \frac{1}{m_2} U_{21}^{(2n)}. \end{aligned}\right\} \tag{9.82}$$

Для $n = 0$ эти условия, очевидно, выполняются. Для $n = 1$ они приводятся, как нетрудно проверить, к следующему виду:

$$\frac{A_0 - C_0}{m_0} = \frac{A_1 - C_1}{m_1} = \frac{A_2 - C_2}{m_2}. \tag{9.82'}$$

Условия (9.82′) являются необходимыми условиями существования лагранжевых решений для трех тел, обладающих каждое плоско-осевой симметрией, плоскости симметрии которых совпадают.

Пусть каждое из тел T_i есть однородный эллипсоид вращения, для которого a_i — экваториальная полуось и c_i — полярная.

Тогда, как известно из теоретической механики, имеем

$$A_i = \frac{a_i^2 + c_i^2}{5} m_i, \quad C_i = \frac{2a_i^2}{5} m_i$$

и условия (9.82′) примут следующий вид:

$$a_0^2 - c_0^2 = a_1^2 - c_1^2 = a_2^2 - c_2^2. \tag{9.83}$$

Для трех эллипсоидов эти условия оказываются не только необходимыми, но и достаточными, т. е. если эти условия выполнены, то все остальные условия (9.82) для $n = 2, 3, \ldots$ в случае трех однородных эллипсоидов будут выполнены автоматически. В самом деле, автором показано в цитированной выше работе, что структурные коэффициенты для двух однородных эллипсоидов имеют следующую форму:

$$U_{ij}^{(2n)} = m_i m_j V^{(2n)} (a_i^2 - c_i^2,\ a_j^2 - c_j^2), \tag{9.83′}$$

где $V^{(2n)}$ есть однородный многочлен степени $2n$ относительно величин $a_i^2 - c_i^2$ и $a_j^2 - c_j^2$, откуда и следует высказанное утверждение.

Таким образом, три однородных эллипсоида вращения (сжатых или вытянутых) могут быть расположены так, чтобы их центры, являющиеся одновременно центрами масс, находились в вершинах равностороннего треугольника в общей плоскости симметрии.

Тогда начальные скорости центров масс возможно назначить таким образом, что точки G_0, G_1, G_2 всегда будут образовывать равносторонний треугольник, а каждый эллипсоид будет вращаться с постоянно угловой скоростью ω_i вокруг своей полярной оси (оси симметрии). Эти угловые скорости вовсе не зависят от начальных скоростей центров масс и могут быть назначены произвольно, независимо друг от друга. В частности, какая-нибудь из этих величин ω_i (или даже все три) может быть взята равной нулю.

Траектории центров масс эллипсоидов T_1 и T_2 вокруг точки G_0 суть подобные кривые, замкнутые или незамкнутые, в зависимости от величин начальных скоростей точек G_1 и G_2. В частности, эти траектории могут оказаться окружностями с центром в точке G_0.

Начальный равносторонний треугольник может быть задан совершенно произвольно, но, разумеется, его сторона должна быть больше наибольшей из величин

$$a_0 + a_1, \quad a_0 + a_2, \quad a_1 + a_2.$$

Приведенными примерами мы здесь и ограничимся.

Примечание. Условия (9.83) были получены автором и напечатаны в 1974 г. в журнале «Небесная механика». Те же условия были получены В. Б. Видякиным совершенно другим способом в работе, опубликованной в 1972 г. в Астрономическом журнале АН СССР.

§ 5. Некоторые замечания об устойчивости лагранжевых и эйлеровых решений

Приближенным рассмотрением задачи о движении небесных тел, рассматриваемых как твердые или даже как жидкие, астрономы и математики занимались со времен Эйлера и Лагранжа.

Однако в строго математической постановке эта задача стала трактоваться только во второй половине XX в. и почти исключительно в предположении справедливости закона Ньютона.

Тем не менее, некоторые авторы (в том числе и автор этой книги) обратили свое внимание и на более общую задачу, в которой закон взаимодействия между элементарными частицами двух различных тел остается более или менее произвольным.

Таким образом, были выявлены условия, при наличии которых могут существовать частные решения задачи трех твердых тел, аналогичные классическим лагранжевым и эйлеровым решениям задачи трех материальных точек, взаимно притягивающихся по закону Ньютона.

Но задача об устойчивости этих частных решений задачи трех твердых тел стала рассматриваться только в самое последнее время и существенного развития еще не получила.

Чтобы не оставлять без внимания этот вопрос, мы решили включить в эту главу некоторые предварительные результаты об устойчивости частных решений задачи трех твердых тел, ограничиваясь случаем круговой ограниченной задачи с законом Лапласа, т. е. с законом взаимодействия, зависящим только от взаимного расстояния.

1. Рассмотрим задачу, описываемую уравнениями (9.42) и (9.43), но в предположении, что тело T_2 является пассивным, в том же смысле, как это предполагалось ранее, т. е. что элементарные частицы тела T_2 не оказывают никакого действия на элементарные частицы тел T_0 и T_1.

Такую задачу мы называем (так же как и в случае материальных точек) *ограниченной* задачей трех твердых тел.

Предполагаем, далее, что каждое из трех тел обладает плоско-осевой симметрией, что центры масс тел T_1 и T_2 всегда остаются в неизменной плоскости, проходящей через G_0 и начальные положения G_1 и G_2, и что каждое тело вращается