Примечание. Условия (9.83) были получены автором и напечатаны в 1974 г. в журнале «Небесная механика». Те же условия были получены В. Б. Видякиным совершенно другим способом в работе, опубликованной в 1972 г. в Астрономическом журнале АН СССР.

§ 5. Некоторые замечания об устойчивости лагранжевых и эйлеровых решений

Приближенным рассмотрением задачи о движении небесных тел, рассматриваемых как твердые или даже как жидкие, астрономы и математики занимались со времен Эйлера и Лагранжа.

Однако в строго математической постановке эта задача стала трактоваться только во второй половине XX в. и почти исключительно в предположении справедливости закона Ньютона.

Тем не менее, некоторые авторы (в том числе и автор этой книги) обратили свое внимание и на более общую задачу, в которой закон взаимодействия между элементарными частицами двух различных тел остается более или менее произвольным.

Таким образом, были выявлены условия, при наличии которых могут существовать частные решения задачи трех твердых тел, аналогичные классическим лагранжевым и эйлеровым решениям задачи трех материальных точек, взаимно притягивающихся по закону Ньютона.

Но задача об устойчивости этих частных решений задачи трех твердых тел стала рассматриваться только в самое последнее время и существенного развития еще не получила.

Чтобы не оставлять без внимания этот вопрос, мы решили включить в эту главу некоторые предварительные результаты об устойчивости частных решений задачи трех твердых тел, ограничиваясь случаем круговой ограниченной задачи с законом Лапласа, т. е. с законом взаимодействия, зависящим только от взаимного расстояния.

1. Рассмотрим задачу, описываемую уравнениями (9.42) и (9.43), но в предположении, что тело T_2 является пассивным, в том же смысле, как это предполагалось ранее, т. е. что элементарные частицы тела T_2 не оказывают никакого действия на элементарные частицы тел T_0 и T_1.

Такую задачу мы называем (так же как и в случае материальных точек) *ограниченной* задачей трех твердых тел.

Предполагаем, далее, что каждое из трех тел обладает плоско-осевой симметрией, что центры масс тел T_1 и T_2 всегда остаются в неизменной плоскости, проходящей через G_0 и начальные положения G_1 и G_2, и что каждое тело вращается

вокруг своей оси симметрии, перпендикулярной к неизменной плоскости треугольника (xG_0y).

Такую задачу, в отличие от задачи, в которой тела T_i произвольны по форме и структуре, мы будем называть *специальной ограниченной задачей.*

Наконец, мы рассмотрим здесь только тот случай, в котором центр масс G_1 тела T_1 описывает в плоскости треугольника окружность с центром в точке G_0 и с постоянной угловой скоростью.

Такую задачу мы называем, как и в классическом случае, *круговой ограниченной задачей*, и эта задача имеет смысл, так как, по предположению, тела T_i обладают плоско-осевой симметрией и центры масс всех трех тел всегда находятся в одной плоскости.

Итак, наша специальная плоская круговая ограниченная задача трех твердых тел, расположенных указанным образом, приводится к задаче о движении пассивно-действующей точки G_2 под действием сил, зависящих только от расстояний между центрами масс тел, исходящих от неподвижной точки G_0 и от точки G_1, описывающей круговую орбиту вокруг центра G_0.

Введем, как мы это делали и в ограниченной задаче материальных точек, вращающуюся систему координат, ось абсцисс которой направлена к точке G_1, и перейдем теперь к безразмерным (или «пульсирующим») координатам Нехвила совершенно таким же преобразованием, которое мы рассматривали в главе VIII.

Тогда уравнения плоского движения в круговой ограниченной задаче, подобно тому как мы это делали в главе VIII, напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{d\tau^2} - 2\frac{d\eta}{d\tau} &= \nu\cdot\Xi, \\ \frac{d^2\eta}{d\tau^2} + 2\frac{d\xi}{d\tau} &= \nu\cdot\mathrm{H}, \end{aligned}\right\} \tag{9.84}$$

где τ в круговой задаче просто пропорциональна времени t, так что

$$\tau = \omega t, \quad \nu = \frac{1}{\omega^2}, \tag{9.84'}$$

ξ и η — отношения координат точки G_2 во вращающейся системе к радиусу a круговой орбиты точки G_1, а ω — угловая скорость кругового движения точки G_1. Наконец, правые части определяются следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} \Xi &= \tilde{F}\cdot\xi - \frac{\xi}{m_2}\cdot\tilde{F}_{20} + (1-\xi)\frac{\tilde{F}_{21}}{m_2} - \frac{\tilde{F}_{01}}{m_0}, \\ \mathrm{H} &= \eta\left(\tilde{F} - \frac{1}{m_2}\tilde{F}_{20} - \frac{1}{m_2}\tilde{F}_{21}\right), \end{aligned}\right\} \tag{9.85}$$

где, как и в предыдущем параграфе,

$$\tilde{F}_{ij} = \int\limits_{(T_i)} \int\limits_{(T_j)} \left[\frac{F_{ij}}{\Delta_{ij}}\right] dm_i\, dm_j, \tag{9.86}$$

причем здесь мы будем рассматривать только тот случай (который мы назвали законом Лапласа), когда

$$\tilde{F}_{ij} = F_{ij}(\Delta_{ij}). \tag{9.86'}$$

Величина $\tilde{F}$, определяемая формулой

$$\tilde{F} = \frac{\tilde{F}_{01}}{m_0} + \frac{\tilde{F}_{01}}{m_1} = \tilde{F}(a) = \omega^2, \tag{9.86''}$$

есть положительная постоянная.

Уравнения (9.85) имеют совершенно такой же вид, как и уравнения плоской круговой ограниченной задачи трех материальных точек, которую мы рассматривали во второй части этой книги.

Различие заключается только в том, что в классической или в обобщенной классической задаче правые части уравнений движения определялись конечными формулами и в ряде случаев могли быть выражены простыми алгебраическими функциями от координат Нехвила.

В нашем же случае координаты ξ и η входят в правые части уравнений (9.84) как параметры интегралов (9.86) и представляют собой весьма сложные функции этих параметров, зависящие от формы и структуры тел, и могут быть выражены только при помощи бесконечных рядов. Исключение, как всегда и ранее, составляет случай, когда (9.86′) есть закон Гука, но это единственный случай, который мы знаем, когда задача о движении любого числа тел всегда решается элементарным образом.

Заметим еще для большей ясности, что уравнения (9.84) совершенно не зависят от вращательных движений тел T_i, каждое из которых вращается независимо друг от друга вокруг своей оси симметрии с постоянной угловой скоростью, различной, вообще говоря, для каждого из тел и определяемой только начальными условиями, касающимися углов Эйлера.

2. Как было отмечено в § 2 этой главы, законы действующих сил, определяемые формулой (9.86′), допускают функцию сил, так что, полагая ($i = 0, 1$)

$$\Phi_{2i}(\Delta_{2i}) = \int F_{2i}(\Delta_{2i})\, d\Delta_{2i} \tag{9.87}$$

и вводя функцию Φ по формуле

$$\Phi(\xi, \eta) = -\frac{1}{am_2} \int\limits_{(T_1)} \int\limits_{(T_0)} \Phi_{20}\, dm_2\, dm_0 - \frac{1}{am_2} \int\limits_{(T_2)} \int\limits_{(T_1)} \Phi_{21}\, dm_2\, dm_1, \tag{9.87'}$$

мы можем положить

$$\Omega = \nu \left\{ \frac{1}{2} (\xi^2 + \eta^2) \cdot \tilde{F} - \frac{\tilde{F}_{01}}{m_0} \cdot \xi + \Phi(\xi, \eta) \right\}, \tag{9.88}$$

вследствие чего уравнения движения (9.84) могут быть написаны в эквивалентной форме следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{d\tau^2} - 2\frac{d\eta}{d\tau} &= \frac{\partial\Omega}{\partial\xi}, \\ \frac{d^2\eta}{d\tau^2} + 2\frac{d\xi}{d\tau} &= \frac{\partial\Omega}{\partial\eta}. \end{aligned}\right\} \tag{9.89}$$

Уравнения (9.89) всегда, т. е. каковы бы ни были тела T_i, лишь бы они обладали плоско-осевой симметрией, допускают интеграл, соответствующий классическому интегралу Якоби в круговой плоской ограниченной задаче трех материальных точек. Этот интеграл, как легко можно установить, имеет вид

$$\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^2 = 2\Omega(\xi, \eta) + 2h, \tag{9.90}$$

где h — произвольная постоянная («постоянная Якоби»).

Интеграл Якоби (9.90) возможно использовать, так же как и в классической задаче, для качественного анализа движения, определяемого уравнениями (9.89), для чего нужно рассматривать «кривые Хилла» или кривые нулевой скорости, определяемые уравнением

$$\Omega(\xi, \eta) = -h \qquad (h < 0). \tag{9.90'}$$

Однако, так как Ω как функция координат ξ, η может быть представлена только бесконечным рядом, то это исследование, затруднительное уже в ограниченной задаче материальных точек, с законом, отличным от закона Ньютона, делается практически неосуществимым и может быть только частично проведено весьма приближенным образом, что для качественного исследования движения является почти бесполезным.

Единственно, что мы можем сделать на этом пути — это определить особые точки кривых (9.90'), т. е. точки либрации, соответствующие частным лагранжевым и эйлеровым решениям нашей задачи, и рассмотреть задачу об устойчивости этих решений в смысле Ляпунова, что и является предметом настоящего параграфа.

3. Так как тело (T_2) является в рассматриваемой задаче пассивно-действующим, то

$$F_{12} = F_{02} \equiv 0$$

для всех точек тела T_2.

Отсюда следует также, что

$$\tilde{F}_{12} = \tilde{F}_{02} = 0, \tag{9.91}$$

а поэтому для того, чтобы наша задача допускала лагранжевы решения, необходимо и достаточно, чтобы из условий (9.71) выполнялись еще два первые, т. е. чтобы тела T_i и законы (9.86′) удовлетворяли условиям

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{m_0}\tilde{F}_{01} &= \frac{1}{m_2}\tilde{F}_{21}, \\ \frac{1}{m_1}\tilde{F}_{10} &= \frac{1}{m_2}\tilde{F}_{20}. \end{aligned}\right\} \tag{9.92}$$

Действительно, при этих условиях и формулы (9.86′) уравнения (9.84) допускают решение, в котором три точки, G_0, G_1 и G_2, образуют постоянный равносторонний треугольник, вращающийся равномерно вокруг вершины G_0.

Чтобы упростить возможно более все последующие выкладки и формулы, мы примем сторону треугольника, т. е. радиус круговой орбиты точки G_1, за единицу расстояний и, кроме того, единицу времени выберем так, чтобы ω также равнялось единице.

Тогда постоянное лагранжево решение уравнений (9.84) определится следующими значениями координат точки G_2:

$$\xi = \xi_0 = \frac{1}{2}, \quad \eta = \eta_0 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{L}$$

Теперь заметим, что независимо от существования (или несуществования) лагранжева решения (L) уравнения (9.84) могут допускать также эйлерово решение, в котором точка G_2 будет лежать на прямой (G_0G_1), т. е. на оси абсцисс вращающейся системы координат. Положение точки (G_2) в этом решении определяется следующими координатами:

$$\xi = \xi_0, \quad \eta = \eta_0 = 0, \tag{E}$$

где ξ_0 — корень (вещественный, само собой разумеется) следующего уравнения:

$$\tilde{F}\cdot\xi_0 - \frac{\tilde{F}_{20}}{m_2}\cdot\xi_0 + (1-\xi_0)\frac{\tilde{F}_{21}}{m_2} - \frac{\tilde{F}_{01}}{m_0} = 0. \tag{9.93}$$

Так же как и в общей задаче трех твердых тел, мы вообще будем иметь три эйлеровых решения, которые, как и ранее, бу-

дем обозначать символами (L_1), (L_2) и (L_3). Для решения (L_1) точка G_2 помещается на прямой (G_0G_1) слева от точки G_0 и имеет, следовательно, отрицательную абсциссу ξ_0. В решении (L_2) точка G_2 находится между точками G_0 и G_1 и для нее $0 < \xi_0 < 1$. Наконец в решении (L_3) точка G_2 находится правее точки G_1 и для нее $\xi_0 > 1$.

Пять точек (L_1), (L_2), (L_3), (L_4) и (L_5) являются также особыми точками кривой Хилла (9.90′), так как частные производные Ω'_ξ и Ω'_η в каждой из этих пяти точек обращаются в нуль. Однако характер этих особых точек кривой Хилла остается, конечно, пока не выясненным, так как значения вторых частных производных нам еще не известны.

Заметим, что мы можем утверждать, что при выполнении условий (9.92) лагранжевы точки (L_4) и (L_5) заведомо существуют. Что же касается эйлеровых точек, то без исследования уравнения (9.93) мы ничего определенного утверждать не можем.

В зависимости от закона (9.86′) и формы, а также структуры плоско-осесимметричных тел T_i каждая из эйлеровых точек может существовать, но может и не существовать. Кроме того, мы не можем утверждать, что если какая-либо из трех эйлеровых точек существует, то она единственна. В самом деле, мы уже ранее, в ограниченной задаче трех точек, видели, что если все действующие силы управляются законом Гука, то любая точка бесконечной прямой, проходящей через точки G_0 и G_1, является эйлеровой точкой. Подобное положение может осуществиться и в рассматриваемой задаче.

Приведем теперь значения постоянной Якоби для каждой из пяти особых точек кривой Хилла. Мы имеем

$$h_1 = -\Omega(\xi_{01}, 0), \quad h_2 = -\Omega(\xi_{02}, 0), \quad h_3 = -\Omega(\xi_{03}, 0),$$
$$h_4 = -\Omega\left(\frac{1}{2}, +\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad h_5 = -\Omega\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

причем ξ_{0i} обозначает абсциссу точки (L_i) $(i = 1, 2, 3)$, если, разумеется, такая точка существует.

4. Для рассмотрения вопроса об устойчивости какого-либо из пяти частных решений уравнений (9.84), в предположении, что таковое решение существует, необходимо прежде всего составить уравнения первого приближения (уравнения в вариациях), которые для плоской круговой задачи заведомо будут иметь постоянные коэффициенты.

Пусть существует частное решение

$$\xi = \xi_0 = \text{const}, \quad \eta = \eta_0 = \text{const}. \tag{9.94}$$

Положим теперь

$$\xi = \xi_0 + x, \quad \eta = \eta_0 + y, \tag{9.95}$$

где буквами x и y будем обозначать в этом параграфе отклонения близкого к (9.94) решения системы (9.84), или *возмущения* по терминологии Ляпунова.

Эти возмущения в силу уравнений (9.84) и при условии, что $\nu = \frac{1}{\omega^2} = 1$, определятся следующими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} - 2\frac{dy}{d\tau} &= X(x, y) = \frac{\partial W}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{d\tau^2} + 2\frac{dx}{d\tau} &= Y(x, y) = \frac{\partial W}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \tag{9.96}$$

где

$$\left.\begin{aligned} X(x, y) &= \Xi(\xi_0 + x, \eta_0 + y), \\ Y(x, y) &= \mathrm{H}(\xi_0 + x, \eta_0 + y), \end{aligned}\right\} \tag{9.96'}$$

и

$$W(x, y) = \Omega(\xi_0 + x, \eta_0 + y). \tag{9.96''}$$

Разлагая функцию $W(x, y)$ в ряд Тейлора по степеням x и y, мы будем иметь разложение, абсолютно сходящееся, по крайней мере при достаточно малых численно значениях этих величин:

$$W(x, y) = \Omega(\xi_0, \eta_0) + \Omega'_\xi(\xi_0, \eta_0)\cdot x + \Omega'_\eta(\xi_0, \eta_0)\cdot y + \widetilde{W}(x, y), \tag{9.97}$$

где $\widetilde{W}$ означает совокупность всех членов разложения функции W, порядок которых выше первого.

Мы можем представить $\widetilde{W}$ в виде

$$\widetilde{W} = \sum_{n=2}^{\infty} \widetilde{W}_n(x, y), \tag{9.97'}$$

где $\widetilde{W}_n$ есть однородный многочлен степени n величин x и y.

Теперь уравнения возмущенного (в смысле Ляпунова) движения точки G_2 вблизи одной из точек либрации (L_i) получатся в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} - 2\frac{dy}{d\tau} &= p_{11}x + p_{12}y + \widetilde{X}(x, y), \\ \frac{d^2y}{d\tau^2} + 2\frac{dx}{d\tau} &= p_{21}x + p_{22}y + \widetilde{Y}(x, y), \end{aligned}\right\} \tag{9.98}$$

причем коэффициенты членов первого порядка определяются следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} p_{11} &= \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \widetilde{W}_2}{\partial x^2}, \\ p_{12} = p_{21} &= \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}\right)_0 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \widetilde{W}_2}{\partial x\,\partial y}, \\ p_{22} &= \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y_2}\right)_0 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \widetilde{W}_2}{\partial y^2} \end{aligned}\right\} \tag{9.99}$$

и

$$\tilde{W}_2(x, y) = p_{11}x^2 + 2p_{12}xy + p_{22}y^2. \tag{9.99'}$$

Уравнения (9.96) также, конечно, допускают интеграл Якоби, который имеет вид

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 = 2W(x, y) + 2\tilde{h}, \tag{9.100}$$

который удобно записать в следующей форме:

$$x'^2 + y'^2 - \tilde{W}_2(x, y) = W^*(x, y) + 2\tilde{h}, \tag{9.101}$$

где

$$W^*(x, y) = \sum_{n=3}^{\infty} W_n(x, y) \tag{9.101'}$$

есть совокупность членов выше второго порядка в разложении функции $\tilde{W}$ по степеням x и y.

Заметим, что

$$\Omega'_\xi(\xi_0, \eta_0) = 0, \quad \Omega'_\eta(\xi_0, \eta_0) = 0,$$

так как (9.94) есть, по предположению, частное решение уравнений (9.84) и одновременно особая точка кривой (9.90′), а постоянную Якоби можно просто присоединить к постоянной интеграла (9.90).

5. Вычисляя теперь коэффициенты линейных членов в правых частях уравнений (9.98), мы получим

$$\left.\begin{aligned}
p_{11} &= \frac{1}{m_0}(\tilde{F}_{01})_0 - \frac{1}{m_2}(\tilde{F}_{21})_0 + \frac{1}{m_1}(\tilde{F}_{10})_0 - \frac{1}{m_2}(\tilde{F}_{20})_0 - \\
&\qquad - \frac{\xi_0^2}{m_2} d'_{20} - \frac{(\xi_0 - 1)^2}{m_2} d'_{21}, \\
p_{12} &= p_{21} = -\eta_0\left[\frac{\xi_0}{m_2} d'_{20} - \frac{(1 - \xi_0)}{m_2} d'_{21}\right], \\
p_{22} &= \frac{1}{m_0}(\tilde{F}_{01})_0 - \frac{1}{m_2}(\tilde{F}_{21})_0 + \frac{1}{m_1}(\tilde{F}_{10})_0 - \frac{1}{m_2}(\tilde{F}_{20})_0 - \\
&\qquad - \frac{\eta_0^2}{m_2} d'_{20} - \frac{\eta_0^2}{m_2} d'_{21}.
\end{aligned}\right\} \tag{9.102}$$

Индекс «0» указывает, что функции $\tilde{F}_{ij}$ вычисляются в точке (ξ_0, η_0). При этом нужно заметить, что $\tilde{F}_{01}$ и $\tilde{F}_{10}$ не зависят от координат точки G_2 и есть (для круговой задачи) величины постоянные, так что

$$(\tilde{F}_{01})_0 \equiv \tilde{F}_{01}, \quad (\tilde{F}_{10})_0 \equiv \tilde{F}_{10}.$$

Величины d'_{20} и d'_{21} даются следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} d'_{20} &= \int\limits_{(T_2)}\int\limits_{(T_0)} \left[\frac{1}{\Delta_{20}}\frac{d}{d\Delta_{20}}\left(\frac{F_{20}}{\Delta_{20}}\right)\right]_0 dm_2\, dm_0, \\ d'_{21} &= \int\limits_{(T_2)}\int\limits_{(T_1)} \left[\frac{1}{\Delta_{21}}\frac{d}{d\Delta_{21}}\left(\frac{F_{21}}{\Delta_{21}}\right)\right]_0 dm_2\, dm_1, \end{aligned}\right\} \qquad (9.102')$$

где F_{2i} определяются формулами (9.86′), а взаимные расстояния — формулами ($\rho_1 = a = 1$)

$$\left.\begin{aligned} \Delta_{20}^2 &= (-\xi + \bar{x}_0 - \bar{x}_2)^2 + (-\eta + \bar{y}_0 - \bar{y}_2)^2 + (\bar{z}_0 - \bar{z}_2)^2, \\ \Delta_{21}^2 &= (1 - \xi + \bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2 + (-\eta + \bar{y}_1 - \bar{y}_2)^2 + (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^2. \end{aligned}\right\} \qquad (9.102'')$$

Формулы (9.102) для коэффициентов являются общими для всякой точки либрации. Но так как условия существования лагранжевых и эйлеровых решений различны, то придется выписать формулы (9.102) отдельно для каждой из двух групп решений. Для лагранжевых решений должны выполняться равенства (9.92), а поэтому для точек (L_4) и (L_5) формулы (9.102) напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} p_{11} &= -\frac{1}{4m_2}(d'_{20} + d'_{21}), \\ p_{12} = p_{21} &= -\frac{(\pm\sqrt{3})}{4m_2}(d'_{20} - d'_{21}), \\ p_{22} &= -\frac{3}{4m_2}(d'_{20} + d'_{21}) = 3p_{11}. \end{aligned}\right\} \qquad (9.103)$$

Знак «+» нужно взять для (L_4), а знак «—» для (L_5).

Для прямолинейных точек (L_i) ($i = 1, 2, 3$) имеем следующие выражения для коэффициентов (9.102):

$$\left.\begin{aligned} p_{11} &= \tilde{F} - \frac{1}{m_2}(\tilde{F}_{20})_0 - \frac{1}{m_2}(\tilde{F}_{21})_0 - \frac{\xi_0^2}{m_2}d'_{20} - \frac{(\xi_0 - 1)^2}{m_2}d'_{21}, \\ p_{12} &= p_{21} = 0, \\ p_{22} &= \tilde{F} - \frac{1}{m_2}(\tilde{F}_{20})_0 - \frac{1}{m_2}(\tilde{F}_{21})_0, \end{aligned}\right\} \qquad (9.104)$$

где ξ_0 есть соответствующий точке (L_i) корень уравнения (9.93).

Таким образом, мы должны иметь тождественно:

$$\left[\tilde{F} - \frac{1}{m_2}(\tilde{F}_{20})_0 - \frac{1}{m_2}(\tilde{F}_{21})_0\right]\xi_0 = \frac{1}{m_2}\tilde{F}_{21} - \frac{1}{m_2}(\tilde{F}_{21})_0, \qquad (9.104')$$

и формулы (9.101) можно несколько упростить.

6. Теперь рассмотрим вопрос об устойчивости лагранжевых решений (L_4) и (L_5). Сначала попытаемся выявить случаи, в

которых вопрос об устойчивости может быть разрешен полностью.

Такие случаи действительно возможны. В самом деле, допустим, что коэффициенты квадратичной формы (9.99) таковы, что мы имеем

$$p_{11} < 0, \quad p_{22} < 0, \quad p_{12}^2 - p_{11}p_{22} < 0, \tag{9.105}$$

т. е. допустим, что форма $\widetilde{W}_2$ определенно-отрицательна.

Тогда относительно величин x, y, x', y' функция Ляпунова V, определяемая формулой

$$V(x, y, x', y') = x'^2 + y'^2 - \widetilde{W}_2 - W^*(x, y), \tag{9.106}$$

будет знакоопределенной функцией, производная которой по τ (здесь $\tau = t$) в силу дифференциальных уравнений возмущенного движения (9.96), равна тождественно нулю, так как существует интеграл Якоби (9.101). Поэтому функция (9.106) удовлетворяет условиям первой теоремы второго метода Ляпунова, т. е. решение

$$\xi = \xi_0, \quad \eta = \eta_0, \quad \xi' = 0, \quad \eta' = 0 \tag{9.107}$$

уравнений (9.84), соответствующее какой-либо из лагранжевых точек либрации, устойчиво относительно величин

$$x = \xi - \xi_0, \quad y = \eta - \eta_0, \quad x' = \xi', \quad y' = \eta', \tag{9.107'}$$

каковы бы ни были члены высших порядков в разложении функции $W^*(x, y)$, которая дается формулой (8.101).

Если неравенства (9.105) не выполняются, то вопрос об устойчивости остается открытым и точка либрации может оказаться и устойчивой и неустойчивой, но она заведомо не может быть асимптотически-устойчивой, так как правые части уравнений (9.84) не содержат ни времени, ни первых производных.

Примером, в котором обнаруживается устойчивость при помощи первой теоремы Ляпунова, может служить случай, когда законы сил таковы, что каждая из функций

$$\frac{F_{20}(\Delta_{20})}{\Delta_{20}}, \quad \frac{F_{21}(\Delta_{21})}{\Delta_{21}} \tag{9.108}$$

является монотонно-возрастающей (или даже только возрастающей) функцией от соответствующего расстояния Δ_{20}, Δ_{21}.

Действительно, в этом случае величины d'_{20} и d'_{21}, вычисляемые по формулам (9.102'), будут существенно положительны, а поэтому коэффициенты p_{11} и p_{22} окажутся отрицательными.

Вычисляя теперь дискриминант Δ формы $\widetilde{W}_2$, мы найдем

$$\Delta' = p_{12}^2 - p_{11}p_{22} = -\frac{3}{8} \cdot \frac{d'_{20}}{m_2} \cdot \frac{d'_{21}}{m_2},$$

что также есть величина отрицательная. Таким образом, неравенства (9.105) все выполнены и лагранжева точка либрации в этом случае будет устойчивой.

В частности, каждое лагранжево решение будет устойчиво, если законы сил определяются формулами

$$F_{20} = \Delta_{20}^{k_0} \quad (k_0 > 1), \qquad F_{21} = \Delta_{21}^{k_1} \quad (k_1 > 1).$$

Если хотя бы одно из чисел k_0 и k_1 меньше или равно единице, то форма $\tilde{W}_2$ заведомо не будет знакоопределенной отрицательной и первая теорема Ляпунова неприменима, а поэтому в этом случае вопрос об устойчивости лагранжева решения остается открытым.

Любопытно отметить, что прямолинейные точки либрации также могут оказаться устойчивыми, что тоже может быть установлено при помощи теоремы Ляпунова.

Действительно, из формул (9.104) мы получим (имея в виду, что $F = \omega^2 = 1$ при нашем выборе единиц)

$$\left.\begin{aligned} p_{22} &= 1 - \frac{1}{m_2}(\tilde{F}_{20})_0 - \frac{1}{m_2}(\tilde{F}_{21})_0, \\ p_{11} &= p_{22} - \frac{\xi_0^2}{m_2} d'_{20} - \frac{(\xi_0 - 1)^2}{m_2} d'_{21}. \end{aligned}\right\} \tag{9.109}$$

Поэтому, если каждая из функций (9.108) является возрастающей и p_{22} отрицательна, то и p_{11} также будет отрицательна и функция

$$\tilde{W}_2 = p_{11}x^2 + p_{22}y^2$$

будет заведомо знакоопределенной отрицательной.

Примечание. Разрешить задачу об устойчивости в отрицательном смысле, по крайней мере при помощи использования интеграла Якоби, невозможно, так как производная от функции V всегда равна нулю, а по теоремам Ляпунова эта производная должна быть знакоопределенной.

7. Если не удается решить вопрос об устойчивости точек либрации при помощи теоремы Ляпунова, то остается возможность рассмотреть эту задачу в первом приближении, т. е. рассмотреть уравнения (9.98), отбрасывая в них все члены выше первого порядка.

Тогда, как известно из главы II, решение задачи об устойчивости системы уравнений первого приближения

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} - 2\frac{dy}{d\tau} &= p_{11}x + p_{12}y, \\ \frac{d^2y}{d\tau^2} + 2\frac{dx}{d\tau} &= p_{12}x + p_{22}y \end{aligned}\right\} \tag{9.110}$$

(которые обладают в круговой задаче постоянными коэффициентами) приводится к рассмотрению характеристического уравнения этой системы

$$\lambda^4 - (p_{11} + p_{22} - 4)\lambda^2 - (p_{12}^2 - p_{11}p_{22}) = 0, \qquad (9.110')$$

решая которое относительно λ^2, найдем

$$\lambda^2 = \frac{p_{11} + p_{22} - 4}{2} \pm \sqrt{\frac{(p_{11} + p_{22} - 4)^2}{4} + \tilde{\Delta}}, \qquad (9.110'')$$

где $\tilde{\Delta}$, так же как и выше, есть дискриминант квадратичной формы $\tilde{W}_2$.

Рассматривая формулу (9.110″), легко выведем необходимые условия устойчивости нулевого решения системы (9.110) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &p_{11} + p_{22} - 4 < 0, \quad \tilde{\Delta} < 0, \\ &\Delta = \frac{(p_{11} + p_{22} - 4)^2}{4} + \tilde{\Delta} > 0. \end{aligned}\right\} \qquad (9.111)$$

Действительно, при выполнении условий (9.111) оба корня квадратного (относительно λ^2) уравнения (9.110′) будут вещественны и отрицательны. Следовательно, все четыре корня уравнения четвертой степени (относительно λ) будут чисто мнимыми, попарно сопряженными.

Если же хотя бы одно из неравенств (9.111) не выполняется, то уравнение (9.110′) необходимо будет иметь корни с положительными вещественными частями, откуда следует, что нулевое решение системы (9.110) будет неустойчиво в первом приближении. Но тогда из теорем § 3 главы II следует, что и нулевое решение полной системы (9.98) также будет неустойчиво, каковы бы ни были члены высших порядков в разложении функции $\tilde{W}$.

Сомнительным остается случай, когда

$$p_{11} + p_{22} \leqslant 4, \quad \Delta = 0 \qquad (9.111')$$

и характеристическое уравнение имеет две пары одинаковых чисто мнимых корней.

В качестве примера применения неравенств (9.111) рассмотрим случай, когда каждая из функций (9.108) есть невозрастающая функция от Δ_{20} и, соответственно от Δ_{21}. Тогда каждая из величин (9.102′) есть величина заведомо отрицательная. Величина $\tilde{F}$ опять равна единице, а $\tilde{F}_{2i}$ имеют, допустим, положительные значения ($i = 0, 1$).

Для треугольных точек либрации, для которых коэффициенты уравнений первого приближения вычисляются по формулам

(9.103), найдем, полагая

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{d'_{20}}{m_2} + \frac{d'_{21}}{m_2} < 0, \\ q &= \frac{d'_{20}}{m_2} - \frac{d'_{21}}{m_2}, \end{aligned}\right\} \tag{9.112}$$

следующие значения для коэффициентов:

$$\left.\begin{aligned} &p_{11} = -\frac{1}{4}p > 0, \quad q_{22} = -\frac{3}{4}p > 0, \\ &p_{12} = p_{21} = \mp\frac{\sqrt{3}}{4}q, \end{aligned}\right\} \tag{9.112'}$$

причем здесь знак «—» относится к точке (L_4), а знак «+» к точке (L_5).

Из (9.112′) имеем

$$p_{11} + p_{22} = -p, \quad \Delta = p_{12}^2 - p_{11}p_{22} = \frac{3}{16}(q^2 - p^2) < 0.$$

Отсюда явствует, что второе из неравенств (9.111) в рассматриваемом случае выполняется, а поэтому необходимым условием устойчивости лагранжевых точек является выполнение неравенства

$$p - 4 < 0, \quad 4\Delta = (p-4)^2 - \frac{3}{4}(p^2 - q^2) > 0, \tag{9.113}$$

которое в нашем случае также выполняется, так как, раскрывая скобки, имеем

$$4\Delta > 0.$$

Для примера приведем результаты в простейшем случае, когда имеем

$$F_{20} = \frac{1}{\Delta_{20}^N}, \quad F_{21} = \frac{1}{\Delta_{21}^N}, \tag{9.114}$$

где $N > 0$. В частности, если действующие силы определяются законом Ньютона, то $N = 2$.

Применяя для вычисления d'_{20} и d'_{21} ряды, полученные в нашей статье «О разложении общей силовой функции» (Небесная механика, 1976) и производя некоторые простые преобразования, мы находим необходимые условия устойчивости лагранжевых точек в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &N < 3 + \Phi(N;\ \mu,\ a), \\ &\mu(1-\mu) < \frac{1}{3}\left(\frac{3-N}{1+N}\right)^2 \Psi(N;\ \mu,\ a), \end{aligned}\right\} \tag{9.115}$$

где Φ и Ψ — голоморфные функции от наибольшего из всех линейных размеров тел a, удовлетворяющие условиям $\Phi(N;\ \mu, 0) = 0$, $\Psi(N;\ \mu, 0) = 1$. Поэтому при $a = 0$ (все тела — материальные точки) условия (9.114) превращаются в условия Рауса — Ляпунова и при $N = 2$ дают известное классическое неравенство $27\mu(1-\mu) < 1$. Для случая $\mu = \frac{1}{2}$, когда треугольник $(G_0 G_1 G_2)$ является равнобедренным с высотой η_0 и боковой стороной, равной ρ_0 (причем $\rho_0^2 = 1 + 4\eta_0^2$), единственным условием устойчивости является неравенство

$$\rho_0^N > \frac{1}{4}(1+N)\cdot\Psi^*,$$

где Ψ^* — функция такого же характера, как и в (9.115). При $a = 0$ и $N = 2$ последнее неравенство дает просто необходимое условие устойчивости точек (L_4') и (L_5') в виде

$$\rho_0 > \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad |\eta_0| > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Что касается прямолинейных точек либрации, то проведенное автором исследование, законченное уже после сдачи рукописи книги в издательство, привело к следующим результатам: *каково бы ни было* $N > 0$ *в* (9.114), *система* (9.95) *всегда имеет только три эйлеровых точки либрации*: (L_1) *слева от* (G_0), (L_2) *между* (G_0) *и* (G_1) *и* (L_3) *справа от* (G_1). *Каждое из соответствующих эйлеровых решений неустойчиво полностью.*