ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ПРИТЯЖЁНИЯ

§ 1. Притяжение материальной точки материальной точкой

Рассмотрим в обычном евклидовом пространстве две материальные точки (материальные частицы) M и P, массы которых обозначим соответственно через m и μ, а через Δ — разделяющее их расстояние *).

Согласно закону всемирного тяготения Ньютона, эти две материальные точки взаимно притягиваются друг к другу с силой, величина которой определяется формулой

$$F = f\frac{m\mu}{\Delta^2}, \tag{1.1}$$

где f — коэффициент пропорциональности, называемый *постоянной притяжения* или постоянной тяготения.

Так как размерность силы равна размерности массы, помноженной на размерность ускорения, то размерность f определяется равенством

$$[f] = m^{-1}l^3t^{-2};$$

численное же значение этой постоянной зависит от выбора основных единиц длины, массы и времени. В системе CGS

$$f = 6,670 \cdot 10^{-8}.$$

*) В учебниках по теории потенциала взаимное расстояние обычно обозначается буквой r. В нашей книге r обозначает радиус-вектор какой-либо точки, т. е. ее расстояние от начала координат. Поэтому для взаимного расстояния принято другое обозначение.

Если взяты основные астрономические единицы (среднее расстояние Земли от Солнца, масса Солнца, средние солнечные сутки), то

$$f = 0{,}000295912.$$

Можно, очевидно, выбрать основные единицы и каким-нибудь другим образом; в частности, всегда возможно выбрать эти основные единицы так, чтобы численное значение постоянной притяжения было равно единице, что удобно для исследований теоретического характера. В этой книге основные единицы оставляются произвольными.

Формула (1.1) совершенно симметрична относительно точек M и P, и роли этих обеих точек, очевидно, также совершенно одинаковы. Однако нам будет удобнее разграничить роли этих точек, а именно мы будем считать, что точка M является центром притяжения, и будем называть эту точку *притягивающей*, а точку P будем называть *притягиваемой*. Таким образом, мы будем рассматривать силу притяжения как вектор, приложенный к точке P и направленный к точке M. Разумеется, что роли двух точек можно обменять.

Для сокращения дальнейших формул мы будем иногда предполагать, что $\mu = 1$, т. е. будем тогда рассматривать притяжение, которое оказывает точка M на точку единичной массы.

В этом случае вместо формулы (1.1) будем иметь

$$F = f\frac{m}{\Delta^2}. \tag{1.2}$$

Впрочем, при необходимости множитель μ всегда можно восстановить.

Формула (1.2) не зависит от выбора системы координат; однако в приложениях приходится обыкновенно рассматривать составляющие, или компоненты, силы притяжения по каким-либо определенным направлениям в пространстве, что удобнее всего сделать при помощи метода координат.

Рассмотрим некоторую неизменную декартову систему прямоугольных координат с началом в произвольной точке пространства O. Обозначим координаты притягиваемой точки через x, y, z, а координаты притягивающей через x', y', z'. Тогда

$$\Delta = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2},$$

а направляющие косинусы силы притяжения, т. е. направляющие косинусы вектора, приложенного к точке P, будут

$$\alpha=\frac{x'-x}{\Delta}, \quad \beta=\frac{y'-y}{\Delta}, \quad \gamma=\frac{z'-z}{\Delta}.$$

Обозначая составляющие силы притяжения по осям координат (или проекции этой силы на координатные оси) через X, Y, Z, мы будем иметь

$$X=fm\frac{x'-x}{\Delta^3}, \quad Y=fm\frac{y'-y}{\Delta^3}, \quad Z=fm\frac{z'-z}{\Delta^3}. \tag{1.3}$$

Рассматривая в этих формулах x', y', z' как величины постоянные, а x, y, z как текущие координаты, мы имеем три функции от координат точки P, определяющие величину и направление силы притяжения, действующей на точку единичной массы. Действительно, из формул (1.3) находим

$$F=+\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$$

и

$$\alpha=\frac{X}{F}, \quad \beta=\frac{Y}{F}, \quad \gamma=\frac{Z}{F}.$$

Иными словами, формулы (1.3) определяют поле сил притяжения, вызываемое наличием притягивающей точечной массы m, находящейся в заданной точке пространства M.

Зная величины (1.3), можно найти проекцию силы притяжения по любому заданному направлению. Действительно, пусть задано некоторое направление L, направляющие косинусы которого в системе $(Oxyz)$ суть

$$\alpha'=\cos(L, x), \quad \beta'=\cos(L, y), \quad \gamma'=\cos(L, z).$$

Обозначая через F_L проекцию силы F на направление L, мы имеем

$$F_L=F\cos(F, L)=F(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')=\alpha'X+\beta'Y+\gamma'Z. \tag{1.4}$$

В частности, по формуле (1.4) получим проекцию силы притяжения, действующей на точку P, на направление радиуса-вектора r этой точки. В этом случае $\alpha'=\frac{x}{r}$, $\beta'=\frac{y}{r}$, $\gamma'=\frac{z}{r}$ $(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$, и мы имеем

$$F_r=\frac{x}{r}X+\frac{y}{r}Y+\frac{z}{r}Z.$$

Заметим теперь (и это есть центральный пункт теории притяжения), что величины (1.3), а также величина (1.4), рассматриваемые, как было условлено, как функции координат точки P, являются частными производными от некоторой функции координат той же точки.

Действительно, вводя в рассмотрение функцию

$$U(x, y, z) = U(P) = f\frac{m}{\Delta}, \tag{1.5}$$

мы получим, например,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -f\frac{m}{\Delta^2}\frac{\partial \Delta}{\partial x};$$

но

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x} = \frac{x - x'}{\Delta} = -\alpha,$$

откуда

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}. \tag{1.6}$$

Теперь формула (1.4) дает *)

$$F_L = \frac{\partial U}{\partial x}\alpha' + \frac{\partial U}{\partial y}\beta' + \frac{\partial U}{\partial z}\gamma' = \frac{\partial U}{\partial L}$$

и, в частности,

$$F_r = \frac{x}{r}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{y}{r}\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{z}{r}\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial r}.$$

Таким образом, функция U определяет составляющие силы притяжения, действующей на точку P единичной массы, а следовательно и все силовое поле, вызываемое притягивающей массой m.

Эта функция называется поэтому *силовой функцией массы* m, или *функцией сил*, или еще *потенциалом массы* m **).

---

*) $\frac{\partial U}{\partial L}$ называется в математическом анализе *производной от функции точки по заданному направлению*.

**) Собственно говоря, потенциал массы m есть силовая функция, взятая с обратным знаком. В литературе, к сожалению, укоренилось для силовой функции это неправильное название. В этой книге используется более правильная терминология.

Отметим простые свойства силовой функции U, вытекающие непосредственно из формул (1.5) и (1.6):

1) силовая функция $U(P)$ конечна, непрерывна и однозначна во всем пространстве, за исключением точки M, где U обращается в бесконечность;

2) когда точка P неограниченно удаляется от точки M, функция U, оставаясь положительной, неограниченно убывает, притом так, что

$$\lim_{\Delta \to \infty} (\Delta \cdot U) = \lim_{r \to \infty} (r \cdot U) = fm;$$

3) частные производные любого порядка от функции $U(x, y, z)$ по координатам точки P также суть функции конечные, непрерывные и однозначные во всем пространстве, за исключением точки M, где все они обращаются в бесконечность;

4) когда точка $P \to \infty$, то любая частная производная функции U стремится к нулю, причем, в частности*),

$$\lim_{r \to \infty} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial x}\right) = \lim_{r \to \infty} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial y}\right) = \lim_{r \to \infty} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial z}\right) = -fm;$$

5) во всем пространстве, за исключением точки M, силовая функция U удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Дадим доказательство последнего свойства. Мы имеем

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial X}{\partial x} = fm \left\{ -\frac{1}{\Delta^3} + \frac{3(x' - x)^2}{\Delta^5} \right\},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial Y}{\partial y} = fm \left\{ -\frac{1}{\Delta^3} + \frac{3(y' - y)^2}{\Delta^5} \right\},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\partial Z}{\partial z} = fm \left\{ -\frac{1}{\Delta^3} + \frac{3(z' - z)^2}{\Delta^5} \right\},$$

откуда находим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \equiv 0,$$

что и требовалось доказать.

---

*) Функцию, обладающую свойствами 2) и 4), называют «регулярной на бесконечности».

Отметим еще, что геометрическое место точек пространства, в которых силовая функция U имеет одно и то же значение C, есть поверхность, определяемая уравнением

$$U(x, y, z) = C$$

и называемая *поверхностью уровня* или *изопотенциальной поверхностью*. Для одной притягивающей массы m эта поверхность есть, очевидно, шар с центром в точке M.

Примечание. Мы условились разделить роли точек M и P, так как в дальнейшем нам нужно будет рассматривать главным образом действие притягивающей точки на притягиваемую. Однако в некоторых случаях нужно, или удобно, рассматривать обе точки как равноправные. Обозначая их тогда через M_1 и M_2, а их массы через m_1 и m_2, мы будем иметь *силовую функцию их взаимного притяжения*

$$U = f\frac{m_1 m_2}{\Delta}, \tag{1.7}$$

которая будет функцией всех шести координат этих точек. Тогда проекции силы притяжения, действующей на точку M_1, определятся формулами

$$X_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1} = f m_1 m_2 \frac{x_2 - x_1}{\Delta^3}, \quad Y_1 = \ldots, \quad Z_1 = \ldots$$

а проекции силы притяжения, действующей на точку M_2, будут соответственно

$$X_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2} = f m_1 m_2 \frac{x_1 - x_2}{\Delta^3}, \quad Y_2 = \ldots, \quad Z_2 = \ldots,$$

Силовая функция U всегда положительна, конечна, непрерывна и однозначна при любых, не совпадающих, положениях точек M_1 и M_2. Если эти точки стремятся к одной и той же точке пространства M, так что $M_1 \to M$ и $M_2 \to M$, то функция U неограниченно растет и ее предел есть бесконечность.

Если, наоборот, точки M_1 и M_2 неограниченно удаляются друг от друга, то U стремится к нулю.