Полезно отметить, что эти формулы применяются в небесной механике при изучении движения системы взаимно притягивающихся материальных точек, например в задаче о движении планет солнечной системы, когда силовая функция может быть определена формулой (1.11)*). Если же для силовой функции взята формула (1.9), то это соответствует случаю ограниченной задачи многих тел, когда возможно не принимать во внимание движения притягивающих точек. Наиболее изучена задача двух неподвижных центров, силовая функция которой получается из (1.9) при $n=2$ **).

§ 3. Притяжение материальной точки материальным телом, материальной поверхностью и материальной линией

До сих пор мы рассматривали силу притяжения, с которой система конечного числа материальных точек действует на материальную точку единичной массы. Теперь мы будем рассматривать более сложные случаи, когда притягивающая система состоит из бесчисленного множества материальных точек (материальных частиц), т. е. представляет собой непрерывно протяженное материальное тело.

Рассмотрим некоторое материальное, абсолютно твердое тело T, занимающее определенную область пространства D. Эта область D может быть и многосвязной, т. е. тело T может иметь внутри себя пустые (т. е. не заполненные материей) полости. Считая тело T неподвижным, отнесем его к некоторой декартовой системе прямоугольных координат $Oxyz$ с началом в произвольно выбранной точке O и с неизменными направлениями осей.

Пусть $M(x', y', z')$ есть любая точка, составляющая часть массы тела T. Обозначим через $\delta(M)=\delta(x', y', z')$ пространственную плотность материи, образующей рассматриваемое тело. Эта функция $\delta(M)$ определена в области D, где по своему физическому смыслу она однозначна и неотри-

*) См. Г. Н. Дубошин, Введение в небесную механику, ОНТИ, 1938, или М. Ф. Субботин, Курс небесной механики, т. 2, ОНТИ, 1937.

**) См., например, К. Якоби, Лекции по динамике, пер. с нем., Гостехиздат, 1936, или C. L. Charlier, Die Mechanik des Himmels, B. 1, Berlin, 1927.

цательна. Мы будем предполагать, сверх того, что плотность $\delta(M)$ непрерывна в области D *).

Пусть, далее, $P(x, y, z)$ есть произвольная точка пространства, в которой помещена материальная точка единичной массы. Наша задача заключается в определении величины и направления силы притяжения, с которой тело T действует на материальную точку P или, иначе говоря, в определении силового поля, вызываемого наличием тела T.

Чтобы определить силу притяжения тела T на точку P, применим обычный прием интегрального исчисления, разбивая мысленно область D на весьма большое число весьма малых областей, каждую из которых будем называть элементарной областью или элементарным объемом. Это разбиение можно произвести, например, проводя плоскости, параллельные координатным плоскостям. Тогда элементарные области будут прямоугольными параллелепипедами с ребрами, параллельными координатным осям. Обозначим объем такого параллелепипеда, называемый элементом объема или элементарным объемом, через $d\tau$. Очевидно, что в прямоугольных координатах

$$d\tau = dx'\, dy'\, dz'.$$

Пусть $M(x', y', z')$ есть центр элементарного объема. Вообразим, что элементарный объем заполнен однородной материей с плотностью $\delta(x', y', z')$. Тогда

$$dm = \delta\, d\tau$$

будем называть элементом массы тела T.

Рассмотрим теперь материальную точку, совпадающую с точкой M и обладающую массой dm. Эта материальная точка притягивает материальную точку единичной массы P с силой, проекции которой по координатным осям будут

$$f\frac{x'-x}{\Delta^3}\,dm, \quad f\frac{y'-y}{\Delta^3}\,dm, \quad f\frac{z'-z}{\Delta^3}\,dm.$$

Заменяя каждый элементарный параллелепипед подобной же материальной точкой, мы получим систему конечного числа неподвижных материальных точек, каждая из которых

*) Хотя мы предполагаем плотность $\delta(M)$ непрерывной функцией в области D, но многие результаты останутся справедливыми, если считать, что $\delta(M)$ есть только интегрируемая функция в этой области. Наоборот, некоторые результаты потребуют дополнительных ограничений.

притягивает материальную точку P. Проекции равнодействующей всех сил притяжения, действующих на точку P, будут суммами весьма большого числа слагаемых такого же вида.

Переходя затем к пределу в предположении, что число элементарных областей неограниченно возрастает, а объем каждой элементарной области неограниченно уменьшается, мы перейдем, согласно принципам интегрального исчисления, от конечных сумм к определенным интегралам, взятым по всей области D.

Таким образом, получим проекции силы притяжения, с которой тело T действует на материальную точку P единичной массы. Обозначая эти проекции через $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$, мы имеем

$$\left.\begin{aligned} X(x, y, z) &= f \iiint\limits_{(D)} \frac{\delta(x', y', z')\cdot(x'-x)}{\Delta^3}\,d\tau,\\ Y(x, y, z) &= f \iiint\limits_{(D)} \frac{\delta(x', y', z')\cdot(y'-y)}{\Delta^3}\,d\tau,\\ Z(x, y, z) &= f \iiint\limits_{(D)} \frac{\delta(x', y', z')\cdot(z'-z)}{\Delta^3}\,d\tau. \end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

В последующем будем часто писать эти формулы более кратко, например

$$X = f \iiint\limits_{(D)} \frac{\delta(x'-x)}{\Delta^3}\,d\tau,$$

и аналогично для двух других составляющих.

Тройные интегралы в этих формулах распространены, как уже сказано, на всю область D, занимаемую притягивающей материей, и являются некоторыми функциями от координат x, y, z точки P.

Рассмотрим теперь, по аналогии с предыдущим, функцию от координат точки P, определяемую формулой

$$U(x, y, z) = f \iiint\limits_{(D)} \frac{\delta(x', y', z')\,d\tau}{\Delta}, \tag{1.15}$$

где областью интегрирования опять является область D.

Допустим сначала, что точка P является внешней для тела T, т. е. не составляет часть массы тела T. Тогда в области D расстояние Δ нигде заведомо не обращается в нуль, а поэтому подынтегральная функция в формуле (1.15) непрерывна всюду в области D и интеграл является собственным. (Область D предполагается конечной.) Следовательно, при дифференцировании функции U по x, y, z мы можем применить правило дифференцирования определенного интеграла по параметру, каковым и является соответствующая координата точки P, входящая под знаком интеграла в расстояние Δ. Применяя указанное правило, мы находим

$$\frac{\partial U}{\partial x}=f\frac{\partial}{\partial x}\iiint\limits_{(D)}\frac{\delta\,d\tau}{\Delta}=f\iiint\limits_{(D)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\Delta}\right)\delta\,d\tau=$$
$$=f\iiint\limits_{(D)}\frac{\delta(x'-x)\,d\tau}{\Delta^3}=X.$$

Точно так же получим

$$\frac{\partial U}{\partial y}=Y,\quad \frac{\partial U}{\partial z}=Z.$$

Таким образом, мы показали, что частные производные от функции U совпадают с проекциями силы притяжения, действующей на точку P. Доказательство проведено здесь только для случая, когда точка P является внешней. Но в следующей главе особо будет доказана справедливость этого вывода также и для того случая, когда точка P составляет часть массы тела T; поэтому формулы

$$X=\frac{\partial U}{\partial x},\quad Y=\frac{\partial U}{\partial y},\quad Z=\frac{\partial U}{\partial z}\tag{1.16}$$

оказываются справедливыми во всем пространстве.

Итак, функция U полностью определяет величину и направление силы притяжения, действующей на точку P и вызываемой присутствием тела T. Поэтому, по аналогии с предыдущими параграфами, будем называть функцию U *силовой функцией тела* T или, короче, *потенциалом тела T на точку P*.

Выражение силовой функции тела в данной точке P зависит, очевидно, от формы тела, от его внутреннего строения, а также от положения тела относительно принятой системы координат.

Действительно, внутреннее строение тела определяется функцией $\delta(x', y', z')$, явно входящей под знак интеграла.

А форма и положение тела определяют область интегрирования D, т. е. в конечном счете значения пределов определенного интеграла в формуле (1.16). (Сказанное относится, конечно, также и к интегралам (1.14), представляющим проекции силы притяжения тела T.)

Положение и ориентация тела относительно осей координат $Oxyz$ могут быть определены заданием координат какой-либо определенной точки тела и тремя эйлеровыми углами, определяющими ориентацию собственной системы осей, неизменно связанных с телом, с началом в упомянутой точке. Поэтому и функция U и составляющие X, Y, Z, являясь функциями от координат точки P — x, y, z, зависят еще от шести параметров, определяющих положение и ориентацию тела в системе координат $Oxyz$.

Заметим, что за упомянутые параметры можно взять (но не обязательно!) координаты центра инерции тела и эйлеровы углы главных центральных осей инерции этого тела.

Для конкретного определения силового поля, вызываемого телом T, нужно вычислить или три интеграла (1.14), или один-единственный интеграл (1.15). Если бы эти интегралы всегда вычислялись в конечном (и притом удобном для пользования) виде, то все было бы очень просто, и области науки, называемой *теорией притяжения* или *теорией потенциала*, заведомо не существовало бы.

Но интегралы (1.14) и (1.15) вычисляются в элементарных функциях только в некоторых, исключительных, случаях, а вообще оказываются совершенно невычисляемыми. Поэтому возникает необходимость изучения свойств и характера функции, определяемой таким интегралом, а также разработки методов для ее приближенного представления и вычисления.

Решение этих задач и составляет предмет теории притяжения, основы которой излагаются в этой книге.

Сложность выражения для силовой функции, обусловленная необходимостью выполнения трех интегрирований, заставляет искать случаи, в которых число интегрирований было бы меньше трех. Такие случаи действительно существуют. Это, например, имеет место, когда $\delta = \text{const}$, т. е. когда тело T однородно. Тогда, как будет показано в следующей главе, силовая функция и составляющие силы притяжения выражаются не тройными, но двойными интегралами, что представляет все же некоторое упрощение.

Мы рассмотрим сейчас два других случая, когда тройной интеграл превращается в поверхностный или в криволинейный. Это будет иметь место, когда тело представляет собой материальную поверхность, называемую *простым слоем*, или же материальную линию.

Рассмотрим первый случай. Вообразим, что одно из трех измерений тела P весьма мало по сравнению с двумя другими, так что тело представляет собой нечто вроде большого, но тонкого листа или слоя. Тогда в ряде задач можно пренебречь малой толщиной листа и рассматривать тело как идеальную (геометрическую) поверхность, по которой как бы размазана притягивающая масса. Пусть дана такая поверхность (замкнутая или не замкнутая, все равно) S, в каждой точке которой определена некоторая функция $\delta(M) = \delta(x', y', z')$, которую будем называть поверхностной плотностью простого слоя*). Пусть точка M является центром весьма малой части поверхности, которую будем называть элементом площади поверхности и которую обозначим через $d\sigma$. Величину $\delta\, d\sigma$ естественно назвать элементом массы нашей материальной поверхности и положить

$$dm = \delta\, d\sigma.$$

Рассматривая dm как массу материальной точки, помещенной в точке M поверхности, мы, подобно тому, как это было сделано выше для трехмерного тела, получим проекции силы притяжения материальной поверхности, действующей на любую точку пространства $P(x, y, z)$ в виде

$$X = f \iint\limits_{(S)} \frac{\delta(x' - x)\, d\sigma}{\Delta^3}, \quad Y = f \iint\limits_{(S)} \frac{\delta(y' - y)\, d\sigma}{\Delta^3},$$

$$Z = f \iint\limits_{(S)} \frac{\delta(z' - z)\, d\sigma}{\Delta^3},$$

---

*) Простой слой можно также определить при помощи предельного перехода следующим образом: рассмотрим объем, заключенный между поверхностью S и бесконечно близкой параллельной поверхностью, находящейся от нее на расстоянии ε. Элемент этого объема будет $\varepsilon\, d\sigma$. Предположим, что расстояние ε между поверхностями стремится к нулю, а объемная плотность $\delta'(M)$ одновременно неограниченно растет, и притом так, что в каждой точке поверхности S существует конечный предел $\delta = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} (\varepsilon\delta')$. В пределе и получается то, что называют простым слоем.

где интегрирование распространено на всю поверхность S, занятую притягивающей материей. Вводя опять функцию

$$U(x, y, z) = f \iint\limits_{(S)} \frac{\delta(x', y', z')\, d\sigma}{\Delta}, \tag{1.17}$$

мы покажем, совершенно так же как и выше, что если точка P не составляет части притягивающей массы, расположенной на поверхности S, то будут справедливы формулы

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Поэтому функцию U, определенную формулой (1.17), назовем *силовой функцией материальной поверхности* S или *потенциалом простого слоя, лежащего на* S.

Потенциалом простого слоя приходится пользоваться в различных областях знания, в частности в астрономии и в гравиметрии. Действительно, известно, например, что кольца Сатурна имеют крайне незначительную толщину (ее оценивают в 15 *км*, в то время как наружный радиус кольца составляет около 275 000 *км*). Поэтому в небесной механике при изучении движений спутников Сатурна, близких к планете, когда необходимо учитывать и притягивающее влияние кольца, последнее можно рассматривать как плоское материальное кольцо и его притяжение определять силовой функцией вида (1.17) *).

Точно так же, изучая гравитационное поле нашей галактики и учитывая малость ее толщины по сравнению с ее диаметром, можно рассматривать ее как плоский круглый диск и опять воспользоваться потенциалом простого слоя типа (1.17).

Наконец, если в гравиметрии рассматривается рудный пласт, толщина которого мала по сравнению с двумя другими измерениями, то часто бывает возможно пренебречь этой малой толщиной и рассчитывать притяжение этого пласта как притяжение куска материальной плоскости, потенциал которой определяется формулой (1.17).

Приведенные примеры показывают, что чисто математическое понятие простого слоя, или материальной поверхности, имеет реальный смысл и с успехом может быть использовано в различных приложениях.

---

*) См. Tisserand, Traité de la mécanique céleste, т. IV.

Рассмотрим еще другое абстрактное понятие — понятие силовой функции, или потенциала, материальной линии.

Пусть в системе $Oxyz$ дана некоторая математическая пространственная линия L или некоторый кусок такой линии, и пусть в каждой точке L определена некоторая функция $\delta(M)=\delta(x', y', z')$, которую будем называть линейной плотностью линии *). Таким образом, геометрическая линия снабжается массой и превращается в материальную линию. Пусть точка M есть центр весьма малой дуги, или элемента дуги, ds. Величину $\delta\, ds$ естественно опять-таки назвать элементом массы рассматриваемой материальной линии и положить

$$dm=\delta\, ds.$$

Рассматривая опять dm как массу материальной точки, помещенной в точке M линии, мы, совершенно так же как и выше, составим выражения для компонентов силы притяжения материальной линии, действующей на любую точку пространства $P(x, y, z)$ в виде

$$X=f\int\limits_{(L)}\frac{\delta(x'-x)\,ds}{\Delta^3},\quad Y=f\int\limits_{(L)}\frac{\delta(y'-y)\,ds}{\Delta^3},$$

$$Z=f\int\limits_{(L)}\frac{\delta(z'-z)\,ds}{\Delta^3},$$

где интегрирование распространено на всю линию L, занятую притягивающей материей. Теперь, так же как и выше, введем в рассмотрение функцию

$$U(x, y, z)=f\int\limits_{(L)}\frac{\delta(x', y', z')\,ds}{\Delta} \tag{1.18}$$

и покажем, опять так же как и ранее, что если точка P не составляет части массы линии L, то имеем

$$X=\frac{\partial U}{\partial x},\quad Y=\frac{\partial U}{\partial y},\quad Z=\frac{\partial U}{\partial z}.$$

*) Материальную линию, подобно простому слою, можно также определить при помощи предельного перехода, рассматривая весьма длинное, в виде кишки, тело и переходя затем к пределу, устремляя диаметр поперечного сечения этой кишки к нулю.

Эту функцию U назовем *силовой функцией материальной линии* L или *потенциалом материальной линии.*

Понятие материальной линии кажется сначала также чисто математическим, абстрактным понятием, так как реальные тела природы заведомо имеют три, а не одно, измерения. Однако часто приходится рассматривать тела, два измерения которых весьма малы по сравнению с третьим. Таковы, например, длинные тонкие стержни или длинные куски проволоки и т. п. В гравиметрии можно встретить рудные образования в виде длинных жил, поперечные сечения которых весьма малы по сравнению с длиной. Каждое такое «длинное» тело можно приближенно рассматривать как материальную линию и определять потенциал такого тела с помощью однократного криволинейного интеграла, что дает значительное упрощение.

Силовой функцией материальной линии приходится пользоваться также и в небесной механике при изучении движения небесных тел как естественных, так и искусственных.

Так, в методе Гаусса вычисления вековых возмущений от планет, движущихся по эллиптическим или круговым орбитам, показывается, что действие притяжения такой планеты эквивалентно действию притяжения материального эллиптического или кругового кольца, фокус которого находится в Солнце, причем масса этого кольца равна массе планеты, а элемент массы dm пропорционален тому времени dt, в течение которого планета описывает элемент дуги орбиты ds *).

Наконец, космическую ракету, имеющую вид довольно длинного цилиндра или сигары, при изучении ее вращательного движения вокруг центра инерции можно уподобить для упрощения расчетов материальному отрезку прямой линии и определять ее потенциал формулой типа (1.18) **).

Таковы три основных понятия теории притяжения: силовая функция трехмерного тела, или, иначе, объемный потенциал; силовая функция материальной поверхности, или потенциал простого слоя; силовая функция материальной линии,

---

*) См. М. Ф. Субботин, Курс небесной механики, т. 2, ОНТИ, 1937.

**) См. Г. Н. Дубошин, Об одном частном случае задачи о поступательно-вращательном движении двух тел, Астрон журн., т. XXXVI, 1959.

или линейный потенциал. Все эти три силовые функции, определяемые соответственно формулами (1.15), (1.17) и (1.18), можно определить одной-единственной формулой

$$U = f \int\limits_{(T)} \frac{dm}{\Delta}, \tag{1.19}$$

где знак интеграла показывает, что интегрирование распространено на всю притягивающую массу, а Δ есть расстояние притягиваемой точки P единичной массы от притягивающего элемента массы dm *).

Составляющие силы притяжения, действующей на точку, также можно записать во всех трех случаях одинаковым образом

$$\left.\begin{aligned} X = f \int\limits_{(T)} \frac{(x'-x)\,dm}{\Delta^3}, \quad Y = f \int\limits_{(T)} \frac{(y'-y)\,dm}{\Delta^3}, \\ Z = f \int\limits_{(T)} \frac{(z'-z)\,dm}{\Delta^3}. \end{aligned}\right\} \tag{1.20}$$

Если нужно найти составляющую силы притяжения непрерывно распределенной массы, действующей на точку P, по какому-либо направлению, не совпадающему с направлениями координатных осей, то мы можем воспользоваться для этого формулами (1.4), (1.12) и (1.13). Входящие в последние две формулы частные производные без труда могут быть вычислены в предположении, что точка P не составляет части притягивающей массы, при помощи правила дифференцирования собственного определенного интеграла по параметру.

Легко проверить, что эти производные определяются следующими формулами:

в цилиндрической системе координат

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = -f \int\limits_{(T)} \frac{\rho - \rho' \cos(v - v')}{\Delta^3}\, dm,$$

$$\frac{\partial U}{\partial v} = -f\rho \int\limits_{(T)} \frac{\rho' \sin(v - v')}{\Delta^3}\, dm;$$

*) Если точка P имеет массу μ, то перед интегралом в формуле (1.19) нужно поставить дополнительный множитель.

в сферической системе

$$\frac{\partial U}{\partial r} = -f \int\limits_{(T)} \frac{r - r'\cos\gamma}{\Delta^3}\, dm,$$

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = -fr\sin\theta \int\limits_{(T)} \frac{r'\sin\theta'\sin(\lambda - \lambda')}{\Delta^3}\, dm,$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = -fr \int\limits_{(T)} \frac{r'[\sin\theta\cos\theta' - \cos\theta\sin\theta'\cos(\lambda - \lambda')]}{\Delta^3}\, dm,$$

где в цилиндрических координатах

$$\Delta^2 = \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos(v - v') + (z - z')^2;$$

в сферических координатах

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma$$

и

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\lambda - \lambda').$$

Элемент массы равен произведению плотности (объемной, поверхностной или линейной) на элемент объема, поверхности или дуги линии соответственно. Этот последний элемент должен быть выражен в соответствующих координатах. Например, элемент объема в цилиндрических координатах

$$d\tau = \rho'\, d\rho'\, dv'\, dz',$$

а в сферических координатах

$$d\tau = r'^2 \sin\theta'\, dr'\, d\lambda'\, d\theta'.$$

Нужно еще иметь в виду, что выражения для U, X, Y, Z, определяемые формулами (1.19) и (1.20), являясь функциями координат точки P, зависят также от величин, определяющих положение и ориентацию притягивающей массы относительно осей $Oxyz$.

Отметим еще, что полная масса притягивающей материи во всех случаях может быть определена одной и той же формулой

$$m = \int\limits_{(T)} dm.$$