§ 4. Потенциал двойного слоя

Перейдем теперь к рассмотрению понятия, которое не имеет прямого отношения к теории притяжения, но является удобным вспомогательным математическим инструментом.

Это — понятие потенциала двойного слоя, которое имеет важный физический смысл, но для теории притяжения является только некоторым чисто математическим понятием.

Сделаем прежде одно замечание. Рассматривая в предыдущем параграфе понятие простого слоя, мы предполагали, разумеется, что поверхностная плотность, или плотность простого слоя, есть функция заведомо неотрицательная.

Здесь мы будем рассматривать простые слои, плотности которых могут принимать любые вещественные значения, как положительные, так и отрицательные.

Пусть имеем некоторую поверхность, или кусок поверхности, S, на которой распределен простой слой с плотностью δ, удовлетворяющей принятому условию.

Предполагая поверхность S гладкой *), отложим на каждой нормали к этой поверхности в одну и ту же определенную сторону отрезок длины ε. Геометрическое место концов этих нормалей образует вторую поверхность S', «параллельную» поверхности S. Пусть M' есть точка поверхности S', являющаяся концом нормали, проведенной в точке M поверхности S.

Распределим теперь на поверхности S' простой слой плотности δ' так, чтобы масса каждого элемента поверхности S' была равна по величине, но противоположна по знаку массе соответствующего элемента поверхности S. Обозначим потенциал простого слоя, лежащего на поверхности S, на любую точку P пространства через U, а потенциал простого слоя, лежащего на поверхности S', на ту же точку P — через U'.

Потенциалом двойного слоя, распределенного на поверхности S, назовем предел, к которому стремится

*) «Гладким» куском поверхности или «гладкой» поверхностью мы будем называть для сокращения такую часть поверхности, в каждой точке которой существует определенная касательная плоскость (а стало быть, и определенная нормаль), непрерывно изменяющая свое положение при непрерывном перемещении точки. См., например, В. Бляшке, Введение в дифференциальную геометрию, пер. с нем., Гостехиздат, 1957.

сумма $U+U'$ *при* $\varepsilon \to 0$, *при условии, что* $\delta \cdot \varepsilon$ *стремится к определенному, конечному, не равному вообще нулю пределу.*

Обозначая потенциал двойного слоя на точку P через W, имеем по определению

$$W = \lim_{\varepsilon \to 0} (U + U').$$

Чтобы вычислить предел, положим

$$U(P) = f \int\limits_{(S)}\int \frac{dm}{\Delta},$$

где

$$\Delta^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$

и

$$U'(P) = f \int\limits_{(S')}\int \frac{dm'}{\Delta'},$$

где

$$\Delta'^2 = (x - x'_\varepsilon)^2 + (y - y'_\varepsilon)^2 + (z - z'_\varepsilon)^2$$

и по условию

$$dm' = \delta' \, d\sigma' = -dm = -\delta \, d\sigma.$$

Так как каждой точке поверхности S соответствует определенная точка поверхности S', то можно перенести интегрирование с S' на S и написать

$$U + U' = f \int\limits_{(S)}\int \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta'}\right) \delta \, d\sigma.$$

Обозначим через α, β, γ направляющие косинусы выбранного направления нормали к поверхности S. Тогда координаты точки M' представятся в виде

$$x'_\varepsilon = x' + \alpha\varepsilon, \quad y'_\varepsilon = y' + \beta\varepsilon, \quad z'_\varepsilon = z' + \gamma\varepsilon,$$

и мы имеем

$$\frac{1}{\Delta'} = \frac{1}{\sqrt{(x - x' - \alpha\varepsilon)^2 + (y - y' - \beta\varepsilon)^2 + (z - z' - \gamma\varepsilon)^2}}.$$

Разлагая обратное расстояние Δ^{-1} в ряд Тэйлора по степеням малой величины ε, будем иметь

$$\frac{1}{\Delta'}=\frac{1}{\Delta}+\varepsilon\left[\alpha\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{\Delta}\right)+\beta\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{\Delta}\right)+\gamma\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{\Delta}\right)\right]+\ldots,$$

и следовательно,

$$U+U'=-f\int\limits_{(S)}\int\varepsilon\delta\left[\alpha\frac{\partial\frac{1}{\Delta}}{\partial x'}+\beta\frac{\partial\frac{1}{\Delta}}{\partial y'}+\gamma\frac{\partial\frac{1}{\Delta}}{\partial z'}\right]d\sigma+\ldots,$$

где невыписанные члены имеют порядок выше первого относительно ε. Переходя теперь к пределу при $\varepsilon\to 0$, получим

$$W(x,\ y,\ z)=-f\int\limits_{(S)}\int\left[\alpha\frac{\partial\frac{1}{\Delta}}{\partial x'}+\beta\frac{\partial\frac{1}{\Delta}}{\partial y'}+\gamma\frac{\partial\frac{1}{\Delta}}{\partial z'}\right]\mu\,d\sigma, \quad (1.21)$$

где

$$\mu(M)=\mu(x',\ y',\ z')=\lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon\delta)$$

называется плотностью двойного слоя.

Преобразуем подынтегральное выражение в формуле (1.21). Так как

$$\alpha\frac{\partial\frac{1}{\Delta}}{\partial x'}+\beta\frac{\partial\frac{1}{\Delta}}{\partial y'}+\gamma\frac{\partial\frac{1}{\Delta}}{\partial z'}=$$

$$=-\frac{1}{\Delta^2}\left(\alpha\frac{x'-x}{\Delta}+\beta\frac{y'-y}{\Delta}+\gamma\frac{z'-z}{\Delta}\right)=$$

$$=-\frac{1}{\Delta^2}(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')=-\frac{\cos\varphi}{\Delta^2},$$

где φ есть угол между направлением нормали *) к поверхности S и направлением $\overrightarrow{PM}$, идущим от притягиваемой точки P к текущей точке M поверхности S, на которой распределен двойной слой.

Теперь выражение потенциала двойного слоя представится в следующем виде:

$$W(P)=f\int\limits_{(S)}\int\mu\frac{\cos\varphi}{\Delta^2}d\sigma. \quad (1.22)$$

*) Под направлением нормали будем подразумевать, если не оговорено противное, ее положительное направление.

Можно получить и другие формулы для потенциала двойного слоя. Действительно, заметим, что величина, стоящая в скобках под знаком интеграла в формуле (1.21), есть производная от обратного расстояния Δ^{-1} по направлению нормали к поверхности S. Поэтому можем написать

$$W = -f \iint\limits_{(S)} \mu \frac{\partial \frac{1}{\Delta}}{\partial n} d\sigma. \tag{1.23}$$

Наконец, так как

$$\frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial x'} = -\frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial y'} = -\frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial z'} = -\frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial z},$$

то

$$\alpha \frac{\partial \frac{1}{\Delta}}{\partial x'} + \beta \frac{\partial \frac{1}{\Delta}}{\partial y'} + \gamma \frac{\partial \frac{1}{\Delta}}{\partial z'} = -\frac{\partial \frac{\alpha}{\Delta}}{\partial x} - \frac{\partial \frac{\beta}{\Delta}}{\partial y} - \frac{\partial \frac{\gamma}{\Delta}}{\partial z}.$$

Предполагая, что точка P не принадлежит поверхности S и что функция μ непрерывна на этой поверхности, мы можем вывести из формулы (1.21)

$$W = f \iint\limits_{(S)} \left[\frac{\partial \frac{\alpha}{\Delta}}{\partial x} + \frac{\partial \frac{\beta}{\Delta}}{\partial y} + \frac{\partial \frac{\gamma}{\Delta}}{\partial z} \right] \mu \, d\sigma =$$

$$= f \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \iint\limits_{(S)} \frac{\alpha\mu}{\Delta} d\sigma + \frac{\partial}{\partial y} \iint\limits_{(S)} \frac{\beta\mu}{\Delta} d\sigma + \frac{\partial}{\partial z} \iint\limits_{(S)} \frac{\gamma\mu}{\Delta} d\sigma \right\}.$$

Но интегралы, стоящие под знаками частных производных, можно рассматривать, если угодно, как потенциалы трех простых слоев с плотностями $\alpha\mu$, $\beta\mu$, $\gamma\mu$, лежащих на одной и той же поверхности S. Обозначая эти потенциалы через U_α, U_β, U_γ соответственно, мы можем написать

$$W = \frac{\partial U_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial U_\beta}{\partial y} + \frac{\partial U_\gamma}{\partial z}. \tag{1.24}$$

Таким образом, потенциал двойного слоя представляется в виде суммы проекций на оси координат сил притяжения трех простых слоев, распределенных на поверхности S.

Рассмотрим частный случай двойного слоя, когда поверхность S замкнутая и когда плотность $\mu = \text{const}$, Обозначая потенциал такого слоя через Ω, мы имеем

$$\Omega(P) = f\mu \iint\limits_{(S)} \frac{\cos\varphi}{\Delta^2}\,d\sigma =$$

$$= -f\mu \iint\limits_{(S)} \left(\alpha \frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial x'} + \beta \frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial y'} + \gamma \frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial z'}\right) d\sigma.$$

Предположим, что замкнутая поверхность S есть гладкая поверхность, т. е. поверхность S имеет в каждой своей точке определенную касательную плоскость.

Тогда имеет место следующая важная теорема, доказанная впервые Гауссом.

Теорема Гаусса. *Потенциал двойного слоя постоянной плотности* μ, *лежащего на гладкой замкнутой поверхности* S, *равен нулю, когда точка* P *лежит вне поверхности* S, *равен* $4\pi f\mu$, *когда* P *лежит внутри* S, *и равен* $2\pi f\mu$, *когда* P *лежит на* S.

Рассмотрим сначала случай, когда точка P лежит вне S. Тогда функции

$$\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial x'} = \frac{x - x'}{\Delta^3}, \quad \frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial y'} = \frac{y - y'}{\Delta^3}, \quad \frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial z'} = \frac{z - z'}{\Delta^3},$$

рассматриваемые как функции координат x', y', z' текущей точки M, конечны, непрерывны и однозначны в области D, ограниченной поверхностью S и на самой поверхности. Поэтому здесь можно применить формулу Остроградского *) и

---

*) Если функции P, Q, R конечны, непрерывны и однозначны, вместе со своими частными производными первого порядка, в некоторой области D и на ее границе, то имеет место формула, называемая формулой Остроградского:

$$\iiint\limits_{(D)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) d\tau =$$

$$= \iint\limits_{(S)} [P\cos(n, x) + Q\cos(n, y) + R\cos(n, z)]\,d\sigma.$$

Из этой формулы выводится много других полезных формул, в частности формулы Грина. См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. 2.

с помощью этой формулы преобразовать двойной интеграл $\Omega(P)$ в тройной, что дает, как нетрудно увидеть,

$$\Omega(P) = -\iiint\limits_{(D)} \left[\frac{\partial^2 \frac{f\mu}{\Delta}}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \frac{f\mu}{\Delta}}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \frac{f\mu}{\Delta}}{\partial z'^2} \right] d\tau.$$

Но, согласно изложенному в § 1, функция $U(M) = \frac{f\mu}{\Delta}$, рассматриваемая как функция координат точки M, удовлетворяет в области D уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 U(M)}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 U(M)}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 U(M)}{\partial z'^2} = 0.$$

Следовательно, $\Omega(P) = 0$ вне поверхности S. Пусть теперь точка P лежит внутри S. Тогда непосредственно применить формулу Остроградского к функциям $\frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial x'}$, $\frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial y'}$, $\frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial z'}$, очевидно, уже нельзя, так как в точке P все они обращаются в бесконечность. Окружим тогда точку P сферой Σ малого радиуса ε и рассмотрим интеграл

$$\Omega'(P) = -f\mu \iint\limits_{(S+\Sigma)} \left(\alpha \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial x'} + \beta \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial y'} + \gamma \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial z'} \right) d\sigma,$$

взятый по совокупности двух замкнутых поверхностей S и Σ. В области D', заключенной между этими двумя поверхностями, для которой P есть внешняя точка, функции $\frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial x'}$, $\frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial y'}$, $\frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial z'}$ удовлетворяют условиям теоремы Остроградского и, следовательно, интеграл $\Omega'(P)$ равен нулю. Но мы имеем

$$\Omega'(P) = \Omega(P) + \Omega_\varepsilon(P),$$

где $\Omega_\varepsilon(P)$ есть интеграл, взятый по поверхности сферы Σ с центром в точке P, который легко вычислить. Действительно, по формуле (1.22)

$$\Omega_\varepsilon(P) = f\mu \iint\limits_{(\Sigma)} \frac{\cos\varphi}{\Delta^2} d\sigma;$$

но на сфере Σ имеем $\cos\varphi = -1$ и $\Delta = \varepsilon$, следовательно,

$$\Omega_\varepsilon(P) = -\frac{f\mu}{\varepsilon^2}\iint\limits_{(\Sigma)} d\sigma = -4\pi f\mu,$$

откуда $\Omega(P) = 4\pi f\mu$.

Пусть, наконец, точка P лежит на поверхности S. Построим опять сферу Σ с центром в точке P и радиуса ε и рассмотрим область D', заключенную между поверхностью S и частью сферы Σ, погруженной в область D. Пусть S' есть та часть поверхности S, которой не принадлежит точка P, и Σ' — та часть поверхности сферы Σ, которая погружена в область D. Тогда, так же как и выше, найдем

$$\Omega'(P) = -f\mu\iint\limits_{(S'+\Sigma')}\left(\alpha\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial x'} + \beta\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial y'} + \gamma\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial z'}\right)d\sigma = 0$$

при всяком, достаточно малом ε. Поэтому также

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Omega'(P) = 0;$$

но

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{-f\mu\iint\limits_{(S')}\left(\alpha\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial x'} + \beta\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial y'} + \gamma\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial z'}\right)d\sigma\right\} = \Omega(P),$$

а

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{-f\mu\iint\limits_{(\Sigma)}\left(\alpha\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial x'} + \beta\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial y'} + \gamma\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial z'}\right)d\sigma\right\} = -2\pi f\mu,$$

следовательно, $\Omega(P) = 2\pi f\mu$. Теорема Гаусса доказана полностью.

Примечание. Теорему Гаусса можно также доказать и чисто геометрическим путем. Пусть P есть внутренняя точка. Вообразим сферу Σ единичного радиуса с центром в P и обозначим через $d\omega$ элемент поверхности этой сферы. Величина $d\omega$ будет вместе с тем телесным углом, под которым из точки P виден элемент $d\sigma$ поверхности S, соответствующий точке M этой поверхности. Вообразим еще сферу Σ' с центром в точке P, но с радиусом, равным расстоянию точки P от точки M, которое есть Δ. Элемент поверхности сферы Σ' можно рассматривать как проекцию элемента $d\sigma$ поверхности S на поверхность Σ'. Обозначая величину этой проекции через $d\omega'$, имеем $d\omega' = \pm\cos\varphi\, d\sigma$, где φ — угол между направлением внешней нормали к S и направлением $\overrightarrow{PM}$, а знак выбирается так, чтобы $d\omega'$ был положителен. С другой стороны, $d\omega' = \Delta^2\, d\omega$, поэтому

$$d\omega = \frac{d\omega'}{\Delta^2} = \pm\frac{\cos\varphi}{\Delta^2}\, d\sigma. \tag{1.25}$$

Если точка P лежит, как предположено, внутри S и поверхность S выпукла по отношению к этой точке, то $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ и, следовательно, $\cos\varphi \geqslant 0$. Поэтому формула (1.22) с помощью (1.25) дает

$$\Omega(P) = f\mu \int\limits_{(\Sigma)}\int d\omega = 4\pi f\mu.$$

Пусть теперь точка P лежит вне поверхности S и пусть всякая прямая, проходящая через P, пересекает S только в двух точках. Опишем вокруг S конус с вершиной в P. Линия касания этого конуса с S разделит всю поверхность S на две части. Легко видеть, что интеграл (1.22), взятый по одной части поверхности, равен и противоположен по знаку, в силу (1.25), интегралу, взятому по другой части этой поверхности. Поэтому интеграл (1.22), взятый по всей поверхности S, равен нулю.

Пусть, наконец, точка P лежит на поверхности S. Отметим прежде всего, что $\Omega(P)$ имеет конечное значение. Действительно, подынтегральная функция в формуле (1.22) равна, согласно (1.25), элементарному телесному углу $d\omega$, под которым из точки P поверхности S виден произвольный элемент $d\sigma$ этой же поверхности.

Поэтому интеграл в формуле (1.22) равен в этом случае тому телесному углу, под которым из точки $P(x, y, z)$ поверхности видна вся поверхность S. Так как, по условию, поверхность S гладкая, то в точке P существует определенная касательная плоскость и, следовательно, упомянутый телесный угол равен 2π, а значит, $\Omega(P) = 2\pi f\mu$.

Нетрудно также рассмотреть геометрическим путем случаи, когда поверхность S не является выпуклой относительно внутренней точки или когда некоторые прямые, проходящие через внешнюю точку, встречают поверхность более чем в двух точках. Полученные результаты распространяются также с некоторыми изменениями на случаи, когда поверхность S не имеет в некоторых точках определенной касательной плоскости *).

§ 5. Притяжение материального тела другим материальным телом

В § 3 мы рассматривали силу притяжения, с которой некоторое материальное тело (трехмерное, двумерное или одномерное) действует на материальную точку P единичной массы. Теперь мы будем рассматривать более сложный, но более близкий к действительности случай взаимного притяжения двух абсолютно твердых тел.

Начнем рассмотрение со случая, который представляет собой, так сказать, «обращение» случая, которым мы занимались в § 3 и который получается, если мы обменяем роли точки P и тела T. Иными словами, будем рассматривать теперь точку P как притягивающую, а произвольно расположенное относительно системы координат $Oxyz$ тело T — как притягиваемое.

Непосредственно кажется очевидным, что силовая функция, введенная в § 3, при таком обмене ролей не изменится, и поэтому может быть рассматриваема как взаимный потенциал тела и материальной точки. Отсюда следует, что если бы мы интересовались только потенциалом притяжения, то добавить к § 3 было бы почти нечего. Однако возникает вопрос, как определить величину и направление силы, действующей на тело со стороны материальной точки, а также как найти возникающий здесь момент силы притяжения относительно какой-либо заданной точки. Поэтому приходится рассмотреть поставленный вопрос более обстоятельно.

Пусть дана в системе $Oxyz$ точка $P(x, y, z)$, в которой сосредоточена притягивающая точечная масса μ.

---

*) См. Л. Н. Сретенский, Теория ньютоновского потенциала, Гостехиздат, 1946.