Нетрудно также рассмотреть геометрическим путем случаи, когда поверхность S не является выпуклой относительно внутренней точки или когда некоторые прямые, проходящие через внешнюю точку, встречают поверхность более чем в двух точках. Полученные результаты распространяются также с некоторыми изменениями на случаи, когда поверхность S не имеет в некоторых точках определенной касательной плоскости *).

§ 5. Притяжение материального тела другим материальным телом

В § 3 мы рассматривали силу притяжения, с которой некоторое материальное тело (трехмерное, двумерное или одномерное) действует на материальную точку P единичной массы. Теперь мы будем рассматривать более сложный, но более близкий к действительности случай взаимного притяжения двух абсолютно твердых тел.

Начнем рассмотрение со случая, который представляет собой, так сказать, «обращение» случая, которым мы занимались в § 3 и который получается, если мы обменяем роли точки P и тела T. Иными словами, будем рассматривать теперь точку P как притягивающую, а произвольно расположенное относительно системы координат $Oxyz$ тело T — как притягиваемое.

Непосредственно кажется очевидным, что силовая функция, введенная в § 3, при таком обмене ролей не изменится, и поэтому может быть рассматриваема как взаимный потенциал тела и материальной точки. Отсюда следует, что если бы мы интересовались только потенциалом притяжения, то добавить к § 3 было бы почти нечего. Однако возникает вопрос, как определить величину и направление силы, действующей на тело со стороны материальной точки, а также как найти возникающий здесь момент силы притяжения относительно какой-либо заданной точки. Поэтому приходится рассмотреть поставленный вопрос более обстоятельно.

Пусть дана в системе $Oxyz$ точка $P(x, y, z)$, в которой сосредоточена притягивающая точечная масса μ.

*) См. Л. Н. Сретенский, Теория ньютоновского потенциала, Гостехиздат, 1946.

Пусть дано также некоторое материальное тело T (или материальная поверхность, или материальная линия) с непрерывной плотностью δ (объемной, поверхностной или линейной). Чтобы определить положение и ориентацию тела T относительно осей $Oxyz$, выберем некоторую точку G, неизменно связанную с телом, координаты которой обозначим через ξ, η, ζ и которую будем называть «центром приведения». Точка G может быть выбрана совершенно произвольно и может даже не принадлежать телу T, но, во всяком случае, эта точка должна быть неизменно связана с телом. В частности, точка G может быть центром инерции тела T, а тогда ее координаты определяются известными формулами

$$\xi=\frac{1}{m}\int\limits_{(T)} x'\,dm, \quad \eta=\frac{1}{m}\int\limits_{(T)} y'\,dm, \quad \zeta=\frac{1}{m}\int\limits_{(T)} z'\,dm,$$

где интегрирование распространяется на всю массу тела T.

Вообразим теперь прямоугольную декартову систему координат с началом в точке G, неизменно связанную с телом T. Оси $G\xi'$, $G\eta'$, $G\zeta'$ этой «собственной» системы координат также можно выбрать совершенно произвольно, лишь бы они были жестко связаны с телом.

В частности, за эти оси можно взять направления осей эллипсоида инерции тела, соответствующего точке G, а если точка G есть центр инерции тела, то за оси собственной системы координат можно взять направления главных центральных осей инерции тела.

Ориентация тела T в системе $Oxyz$ определяется ориентацией собственной системы $G\xi'\eta'\zeta'$ относительно системы $Oxyz$. А ориентация собственной системы однозначно определяется тремя независимыми углами, через которые выражаются девять направляющих косинусов осей $G\xi'$, $G\eta'$, $G\zeta'$ в системе $Oxyz$.

За эти три независимых угла можно выбрать три угла Эйлера: *угол прецессии* ψ, т. е. угол между направлением, проходящим через G параллельно оси Ox, и направлением линии узлов плоскости $G\xi'\eta'$ на плоскости, параллельной плоскости Oxy; *угол собственного вращения* φ, т. е. угол между направлением упомянутой линии узлов и направлением $G\xi'$, и *угол нутации* ϑ, т. е. угол между направлением оси Oz и направлением оси $G\zeta'$.

Итак, положение и ориентация тела T в системе $Oxyz$ однозначно определяются шестью независимыми параметрами

$$\xi,\ \eta,\ \zeta,\ \psi,\ \varphi,\ \vartheta,$$

которые остаются постоянными, если тело T неподвижно, и изменяются со временем, если это тело движется.

Возьмем любую точку пространства M. Пусть в системе $Oxyz$ ее координаты будут x', y', z', а в системе $G\xi'\eta'\zeta'$ — ξ', η', ζ'.

Имеем, как известно,

$$\left.\begin{aligned} x' &= \xi + a_{11}\xi' + a_{12}\eta' + a_{13}\zeta', \\ y' &= \eta + a_{21}\xi' + a_{22}\eta' + a_{23}\zeta', \\ z' &= \zeta + a_{31}\xi' + a_{32}\eta' + a_{33}\zeta', \end{aligned}\right\} \tag{1.26}$$

где a_{ik} суть направляющие косинусы собственных осей в системе $Oxyz$. Эти направляющие косинусы связаны с углами Эйлера известными формулами

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\cos\vartheta, \\ a_{21} &= \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi\cos\vartheta, \\ a_{31} &= \sin\varphi\sin\vartheta, \\ a_{12} &= -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi\cos\vartheta, \\ a_{22} &= -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi\cos\vartheta, \\ a_{32} &= \cos\varphi\sin\vartheta, \\ a_{13} &= \sin\psi\sin\vartheta, \\ a_{23} &= -\cos\psi\sin\vartheta, \\ a_{33} &= \cos\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{1.27}$$

Рассмотрим теперь элемент массы dm тела T, сосредоточенный в точке $M(x', y', z')$. Материальная точка P притягивает этот элемент с силой, проекции которой по осям координат суть

$$f\mu\frac{x-x'}{\Delta^3}dm,\quad f\mu\frac{y-y'}{\Delta^3}dm,\quad f\mu\frac{z-z'}{\Delta^3}dm$$

и проекции момента которой относительно центра приведения G равны соответственно *)

$$f\mu\frac{(y'-\eta)(z-z')-(z'-\zeta)(y-y')}{\Delta^3}dm,$$

$$f\mu\frac{(z'-\zeta)(x-x')-(x'-\xi)(z-z')}{\Delta^3}dm,$$

$$f\mu\frac{(x'-\xi)(y-y')-(y'-\eta)(x-x')}{\Delta^3}dm,$$

где по-прежнему $\Delta=\overrightarrow{PM}$.

Поэтому проекции Ξ, H, Z равнодействующей сил притяжения, действующих на элементы массы тела T, приложенной к точке G, будут

$$\left.\begin{aligned} \Xi&=f\mu\int\limits_{(T)}\frac{x-x'}{\Delta^3}dm,\\ \mathrm{H}&=f\mu\int\limits_{(T)}\frac{y-y'}{\Delta^3}dm,\\ \mathrm{Z}&=f\mu\int\limits_{(T)}\frac{z-z'}{\Delta^3}dm,\end{aligned}\right\}\tag{1.28}$$

а проекции L_x, L_y, L_z момента этой равнодействующей относительно центра приведения G определятся формулами

$$\left.\begin{aligned} L_x&=f\mu\int\limits_{(T)}\frac{(y'-\eta)(z-z')-(z'-\zeta)(y-y')}{\Delta^3}dm,\\ L_y&=f\mu\int\limits_{(T)}\frac{(z'-\zeta)(x-x')-(x'-\xi)(z-z')}{\Delta^3}dm,\\ L_z&=f\mu\int\limits_{(T)}\frac{(x'-\xi)(y-y')-(y'-\eta)(x-x')}{\Delta^3}dm.\end{aligned}\right\}\tag{1.29}$$

*) См. Kellogg, Foundations of potential theory, 1929, а также Г. Н. Дубошин, О дифференциальных уравнениях поступательно-вращательного движения взаимно притягивающихся твердых тел, Астрон. журн., т. XXXV, 1958.

Введем еще в рассмотрение составляющие момента силы притяжения, действующей на тело T и приложенной в G, L_φ, L_ψ, L_ϑ по осям собственного вращения, прецессии и нутации. Нетрудно проверить, что

$$
\begin{aligned}
L_\varphi &= \sin\psi \sin\vartheta\, L_x - \cos\psi \sin\vartheta\, L_y + \cos\vartheta\, L_z,\\
L_\psi &= L_z,\\
L_\vartheta &= \cos\psi\, L_x + \sin\psi\, L_y.
\end{aligned}
$$

Теперь рассмотрим силовую функцию U, отличающуюся от (1.19) только множителем μ,

$$
U = f\mu \int\limits_{(T)} \frac{dm'}{\Delta}. \tag{1.30}
$$

Если в формулах (1.28), (1.29) и (1.30) перейти от переменных интегрирования x', y', z' к переменным ξ', η', ζ' при помощи формул преобразования (1.26), то U и все проекции силы и ее момента сделаются явными функциями независимых параметров ξ, η, ζ, ψ, φ, ϑ, оставаясь в то же время явными функциями координат x, y, z точки P.

Покажем теперь, что

$$
\Xi = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad \mathrm{H} = \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad \mathrm{Z} = \frac{\partial U}{\partial \zeta} \tag{1.31}
$$

и что

$$
L_\varphi = \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad L_\psi = \frac{\partial U}{\partial \psi}, \quad L_\vartheta = \frac{\partial U}{\partial \vartheta}. \tag{1.32}
$$

Формулы (1.31) делаются очевидными (если, конечно, P есть внешняя точка по отношению к телу T), если заметить, например, что

$$
\frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial \xi} = \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial x'} = \frac{x - x'}{\Delta^3}.
$$

Проверим (при том же предположении относительно точки P) первую из формул (1.32). Так как

$$
\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi} = -\frac{x - x'}{\Delta}\frac{\partial x'}{\partial \varphi} - \frac{y - y'}{\Delta}\frac{\partial y'}{\partial \varphi} - \frac{z - z'}{\Delta}\frac{\partial z'}{\partial \varphi},
$$

то

$$
\frac{\partial U}{\partial \varphi} = f\mu \int\limits_{(T)} \left(\frac{x - x'}{\Delta^3}\frac{\partial x'}{\partial \varphi} + \frac{y - y'}{\Delta^3}\frac{\partial y'}{\partial \varphi} + \frac{z - z'}{\Delta^3}\frac{\partial z'}{\partial \varphi} \right) dm.
$$

Но производные от координат по углу φ найдутся дифференцированием формул (1.26) и выразятся через производные от направляющих косинусов a_{ik}. Из формул (1.27) имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial a_{11}}{\partial\varphi}=a_{12}, && \frac{\partial a_{12}}{\partial\varphi}=-a_{11}, && \frac{\partial a_{13}}{\partial\varphi}=0,\\
&\frac{\partial a_{21}}{\partial\varphi}=a_{22}, && \frac{\partial a_{22}}{\partial\varphi}=-a_{21}, && \frac{\partial a_{23}}{\partial\varphi}=0,\\
&\frac{\partial a_{31}}{\partial\varphi}=a_{32}, && \frac{\partial a_{32}}{\partial\varphi}=-a_{31}, && \frac{\partial a_{33}}{\partial\varphi}=0,
\end{aligned}$$

поэтому

$$\frac{\partial x'}{\partial\varphi}=a_{12}\xi'-a_{11}\eta', \quad \frac{\partial y'}{\partial\varphi}=a_{22}\xi'-a_{21}\eta', \quad \frac{\partial z'}{\partial\varphi}=a_{32}\xi'-a_{31}\eta'.$$

Подставляя сюда вместо ξ' и η' их выражения, полученные из равенств (1.26), и воспользовавшись свойствами направляющих косинусов a_{ik}, получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x'}{\partial\varphi}&=a_{23}(z'-\zeta)-a_{33}(y'-\eta),\\
\frac{\partial y'}{\partial\varphi}&=a_{33}(x'-\xi)-a_{13}(z'-\zeta),\\
\frac{\partial z'}{\partial\varphi}&=a_{13}(y'-\eta)-a_{23}(x'-\xi).
\end{aligned}$$

Подставляя, наконец, эти производные в выражение для $\frac{\partial U}{\partial\varphi}$, найдем, что

$$\frac{\partial U}{\partial\varphi}=a_{13}L_x+a_{23}L_y+a_{33}L_z=L_\varphi.$$

Подобным же образом проверяются и две остальные формулы (1.32).

Кроме того, очевидно, что

$$X=\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y=\frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z=\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Поэтому функцию U, определенную формулой (1.30), будем называть *силовой функцией взаимного притяжения* материальной точки P и материального тела T или их *взаимным потенциалом*.

Рассмотрим теперь два материальных тела T_1 и T_2, каждое из которых может быть или трехмерным телом, или простым слоем, или материальной линией. Пусть ξ_i, η_i, ζ_i суть координаты точки G_i ($i=1, 2$), неизменно связанной с телом T_i, а ψ_i, φ_i, ϑ_i — эйлеровы углы, определяющие ориентацию собственной системы отсчета, жестко связанной с телом T_i и с началом в точке G_i.

Пусть $M_i(x_i', y_i', z_i')$ — произвольная точка тела T_i, в которой сосредоточена элементарная масса dm_i.

Точка M_i ($i=1, 2$) притягивается точкой M_j ($j=2,1$) с силой, проекции которой суть

$$f\frac{x_j'-x_i'}{\Delta_{ij}^3}dm_i\,dm_j,\quad f\frac{y_j'-y_i'}{\Delta_{ij}^3}dm_i\,dm_j,\quad f\frac{z_j'-z_i'}{\Delta_{ij}^3}dm_i\,dm_j,$$

а проекции момента этой силы относительно центра приведения G_i выражаются так:

$$f\frac{(y_i'-\eta_i)(z_j'-z_i')-(z_i'-\zeta_i)(y_j'-y_i')}{\Delta_{ij}^3}dm_i\,dm_j,$$

$$f\frac{(z_i'-\zeta_i)(x_j'-x_i')-(x_i'-\xi_i)(z_j'-z_i')}{\Delta_{ij}^3}dm_i\,dm_j,$$

$$f\frac{(x_i'-\xi_i)(y_j'-y_i')-(y_i'-\eta_i')(x_j'-x_i')}{\Delta_{ij}^3}dm_i\,dm_j,$$

где

$$\Delta_{ij}^2=\Delta_{12}^2=(x_1'-x_2')^2+(y_1'-y_2')^2+(z_1'-z_2')^2.$$

Поэтому проекции равнодействующей сил притяжения, действующих на тело T_i, приложенной к G_i, будут

$$\left.\begin{aligned}
\Xi_{ij}&=f\int\limits_{(T_i)}dm_i\int\limits_{(T_j)}\frac{x_j'-x_i'}{\Delta_{ij}^3}dm_j,\\
\mathrm{H}_{ij}&=f\int\limits_{(T_i)}dm_i\int\limits_{(T_j)}\frac{y_j'-y_i'}{\Delta_{ij}^3}dm_j,\\
\mathrm{Z}_{ij}&=f\int\limits_{(T_i)}dm_i\int\limits_{(T_j)}\frac{z_j'-z_i'}{\Delta_{ij}^3}dm_j,
\end{aligned}\right\}\qquad(1.33)$$

а проекции момента этой равнодействующей относительно точки G_i имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
L_x^{(i,j)} &= f \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} \frac{(y_i'-\eta_i)(z_j'-z_i')-(z_i'-\zeta_i)(y_j'-y_i')}{\Delta_{ij}^3}\, dm_j,\\
L_y^{(i,j)} &= f \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} \frac{(z_i'-\zeta_i)(x_j'-x_i')-(x_i'-\xi_i)(z_j'-z_i')}{\Delta_{ij}^3}\, dm_j,\\
L_z^{(i,j)} &= f \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} \frac{(x_i'-\xi_i)(y_j'-y_i')-(y_i'-\eta_i')(x_j'-x_i')}{\Delta_{ij}^3}\, dm_j.
\end{aligned}\right\} \tag{1.34}$$

Интегралы в формулах (1.33) и (1.34) распространены на массы обоих тел и порядок этих интегралов может быть любым от второго до шестого, в зависимости от структуры каждого из двух рассматриваемых тел.

Введем теперь в рассмотрение функцию

$$U_{ij} = f \int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} \frac{dm_j}{\Delta_{ij}}. \tag{1.35}$$

Эта функция, так же как и функции (1.33), (1.34), в силу формул преобразования к собственным системам координат, которые пишутся так же, как и формулы (1.26) и (1.27), где все буквы нужно только отметить соответствующими значками, будут функциями двенадцати независимых параметров: ξ_i, η_i, ζ_i, ψ_i, φ_i, ϑ_i, ξ_j, η_j, ζ_j, ψ_j, φ_j, ϑ_j $(i=1,\ j=2)$.

Совершенно так же, как и выше, покажем, что

$$\left.\begin{aligned}
\Xi_{ij} &= \frac{\partial U_{ij}}{\partial \xi_i}, & \mathrm{H}_{ij} &= \frac{\partial U_{ij}}{\partial \eta_i}, & \mathrm{Z}_{ij} &= \frac{\partial U_{ij}}{\partial \zeta_i},\\
L_\varphi^{(i,j)} &= \frac{\partial U_{ij}}{\partial \varphi_i}, & L_\psi^{(i,j)} &= \frac{\partial U_{ij}}{\partial \psi_i}, & L_\vartheta^{(i,j)} &= \frac{\partial U_{ij}}{\partial \vartheta_i},
\end{aligned}\right\} \tag{1.36}$$

где три новые составляющие момента силы определяются формулами, подобными формулам (1.30). Нужно отметить, что справедливость формул (1.36) установлена только для того случая, когда тела T_1 и T_2 не имеют общей части, так как только в этом случае можно применять к (1.35) правило дифференцирования определенного интеграла по параметру без специального исследования.

Функция (1.35) называется *силовой функцией взаимного притяжения* двух тел или их *взаимным потенциалом.*

Полученные результаты немедленно распространяются на случай системы, состоящей из любого конечного числа n материальных тел T_i $(i=1, 2, \ldots, n)$, каждое из которых может быть трехмерным, двумерным или одномерным.

Тогда силовая функция всей системы определится формулой

$$U=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}U_{ij} \tag{1.37}$$

и будет функцией $6n$ независимых параметров ξ_i, η_i, ζ_i, ψ_i, φ_i, ϑ_i $(i=1, 2, \ldots, n)$. Если никакие два из n тел T не имеют общей части, то для составляющих силы, действующей на тело T_i и ее момента, будут справедливы формулы *)

$$\Xi_i={\sum_{j=1}^{n}}'\,\Xi_{ij}=\frac{\partial U}{\partial \xi_i},\qquad L_\varphi^{(i)}={\sum_{j=1}^{n}}'\,L_\varphi^{(i,j)}=\frac{\partial U}{\partial \varphi_i},$$

$$\mathrm{H}_i={\sum_{j=1}^{n}}'\,\mathrm{H}_{ij}=\frac{\partial U}{\partial \eta_i},\qquad L_\psi^{(i)}={\sum_{j=1}^{n}}'\,L_\psi^{(i,j)}=\frac{\partial U}{\partial \psi_i},$$

$$\mathrm{Z}_i={\sum_{j=1}^{n}}'\,\mathrm{Z}_{ij}=\frac{\partial U}{\partial \zeta_i},\qquad L_\vartheta^{(i)}={\sum_{j=1}^{n}}'\,L_\vartheta^{(i,j)}=\frac{\partial U}{\partial \vartheta_i}.$$

Если вместо прямоугольных координат какой-либо из точек G_i ввести ее цилиндрические или полярные, сферические координаты, как мы делали в § 2, то частные производные от силовой функции U по таким координатам определят составляющие силы притяжения по трем взаимно перпендикулярным направлениям ρ_i, T_i, ς_i или r_i, T_i, W_i, проходящим через точку G_i. Такие составляющие выразятся формулами, совершенно подобными формулам (1.12) и (1.13), в которых нужно только снабдить буквы соответствующими значками.

*) Штрих при знаке суммы означает, что надо пропустить член, для которого $j=i$.

Заметим притом, что вовсе не обязательно определять *все* точки G_i координатами только одного и того же рода. Таким образом, вполне возможно для одних точек взять прямоугольные декартовы координаты, для других, принадлежащих к той же системе, пользоваться цилиндрическими или сферическими координатами и т. д. Кроме того, помимо трех рассмотренных здесь систем координат, можно, разумеется, взять и какую-нибудь другую. Как и всегда, выбор системы координат обусловливается специфическими условиями рассматриваемой задачи и требованиями применяемого метода.

§ 6. Дополнительные замечания о законе тяготения

Все предыдущие выводы и результаты основывались на предположении, что всякие две материальные частицы взаимно притягиваются по закону Ньютона, т. е. с силой, прямо пропорциональной произведению масс этих частиц и обратно пропорциональной квадрату их взаимного расстояния. Все, или почти все, следствия, выводимые из этого закона, до сих пор замечательно точно согласуются с наблюдениями различных явлений природы. Это обстоятельство и дает право считать закон Ньютона законом природы и дает возможность применять его для исследования свойств различных частей, и малых и больших, окружающей нас вселенной.

Однако с чисто теоретической точки зрения полезно иногда рассматривать закон притяжения в более общем виде. Мы рассмотрим здесь вкратце случай, когда сила взаимодействия между двумя материальными частицами определяется вместо формулы (1.1) следующей формулой:

$$F = fm\mu u(\Delta), \qquad (1.38)$$

где $u(\Delta)$ — некоторая заданная функция от расстояния Δ между частицами M и P, а f — по-прежнему множитель пропорциональности. Заметим еще, что вообще сила взаимодействия F может быть и силой притяжения и силой отталкивания.

Рассматривая опять силу, действующую на материальную точку P единичной массы ($\mu = 1$), будем иметь следующие