Заметим притом, что вовсе не обязательно определять *все* точки $G_i$ координатами только одного и того же рода. Таким образом, вполне возможно для одних точек взять прямоугольные декартовы координаты, для других, принадлежащих к той же системе, пользоваться цилиндрическими или сферическими координатами и т. д. Кроме того, помимо трех рассмотренных здесь систем координат, можно, разумеется, взять и какую-нибудь другую. Как и всегда, выбор системы координат обусловливается специфическими условиями рассматриваемой задачи и требованиями применяемого метода.

## § 6. Дополнительные замечания о законе тяготения

Все предыдущие выводы и результаты основывались на предположении, что всякие две материальные частицы взаимно притягиваются по закону Ньютона, т. е. с силой, прямо пропорциональной произведению масс этих частиц и обратно пропорциональной квадрату их взаимного расстояния. Все, или почти все, следствия, выводимые из этого закона, до сих пор замечательно точно согласуются с наблюдениями различных явлений природы. Это обстоятельство и дает право считать закон Ньютона законом природы и дает возможность применять его для исследования свойств различных частей, и малых и больших, окружающей нас вселенной.

Однако с чисто теоретической точки зрения полезно иногда рассматривать закон притяжения в более общем виде. Мы рассмотрим здесь вкратце случай, когда сила взаимодействия между двумя материальными частицами определяется вместо формулы (1.1) следующей формулой:

$$F = fm\mu u(\Delta), \tag{1.38}$$

где $u(\Delta)$ — некоторая заданная функция от расстояния $\Delta$ между частицами $M$ и $P$, а $f$ — по-прежнему множитель пропорциональности. Заметим еще, что вообще сила взаимодействия $F$ может быть и силой притяжения и силой отталкивания.

Рассматривая опять силу, действующую на материальную точку $P$ единичной массы ($\mu = 1$), будем иметь следующие выражения для проекции этой силы на координатные оси *):

$$X = \pm fmu(\Delta)\frac{x' - x}{\Delta}, \quad Y = \pm fmu(\Delta)\frac{y' - y}{\Delta},$$

$$Z = \pm fmu(\Delta)\frac{z' - z}{\Delta}.$$

Введем теперь функцию $\phi(\Delta)$ формулой

$$\phi(\Delta) = \mp \int u(\Delta)\, d\Delta \tag{1.39}$$

и положим

$$U = fm\,\phi(\Delta).$$

Тогда, так же как в § 1, найдем

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}, \tag{1.40}$$

что дает нам право назвать функцию $U$, определенную последней формулой, *силовой функцией* взаимодействия двух материальных точек при законе (1.38).

Точно так же, рассматривая материальную точку $P$ с массой $\mu$ и произвольное абсолютно твердое материальное тело $T$, трехмерное, двумерное или одномерное, определим силовую функцию взаимодействия тела и точки, предполагая, что каждый элемент тела взаимодействует с точкой по закону (1.38), следующей формулой:

$$U = f\mu \int\limits_{(T)} \phi(\Delta)\, dm. \tag{1.41}$$

Легко проверить, что проекции силы, действующей на точку, определятся формулами (1.40), а проекции силы, действующей на тело $T$, и проекции момента этой силы относительно точки $G$ определятся такими же формулами, как (1.31) и (1.32). Разумеется, все сказанное справедливо только для случая, когда точка $P$ не составляет части массы тела $T$, в противном случае необходимо дополнительное исследование.

Рассмотрим один любопытный частный случай закона взаимодействия (1.38), когда $u = \Delta$, т. е. когда две материальные частицы $M$ и $P$ притягиваются или отталкиваются

*) Здесь и далее верхний знак относится к случаю силы притяжения, а нижний — к силе отталкивания.

с силой, прямо пропорциональной расстоянию между этими частицами. Тогда по формуле (1.39) найдем, что

$$\phi(\Delta) = \mp \frac{1}{2}\Delta^2,$$

и следовательно, силовая функция взаимодействия тела и точки запишутся так:

$$U = \mp \frac{1}{2} f\mu \int_{(T)} \Delta^2 \, dm.$$

Вычислим проекции $X$ и $\Xi$ сил, действующих на точку $P$ и на тело $T$. Мы имеем

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} = \mp f\mu \int_{(T)} \Delta \frac{\partial \Delta}{\partial x} dm = \mp f\mu \int_{(T)} (x - x') \, dm$$

или

$$X = \mp f\mu \left\{ x \int_{(T)} dm - \int_{(T)} x' \, dm \right\} = \mp f\mu m (x - \bar{\xi}),$$

где $\bar{\xi}$ — абсцисса центра инерции тела. Точно так же

$$Y = \mp f\mu m (y - \bar{\eta}), \quad Z = \mp f\mu m (z - \bar{\zeta})$$

и, аналогично, найдем, что

$$\Xi = \pm f\mu m (x - \bar{\xi}), \quad \mathrm{H} = \pm f\mu m (y - \bar{\eta}), \quad \mathrm{Z} = \pm f\mu m (z - \bar{\zeta}).$$

Отсюда получим величину силы взаимодействия в виде

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{\Xi^2 + \mathrm{H}^2 + \mathrm{Z}^2} = f\mu m R,$$

где

$$R^2 = (x - \bar{\xi})^2 + (y - \bar{\eta})^2 + (z - \bar{\zeta})^2,$$

т. е. $R$ есть расстояние между точкой $P$ и центром инерции $\bar{G}$ тела $T$.

Направляющие косинусы сил, действующих на точку $P$ и на тело $T$, будут соответственно:

$$\mp \frac{x - \bar{\xi}}{R}, \quad \mp \frac{y - \bar{\eta}}{R}, \quad \mp \frac{z - \bar{\zeta}}{R},$$

$$\pm \frac{x - \bar{\xi}}{R}, \quad \pm \frac{y - \bar{\eta}}{R}, \quad \pm \frac{z - \bar{\zeta}}{R}.$$

Таким образом, если сила взаимодействия между материальными частицами пропорциональна расстоянию между ними, то материальная точка и тело *произвольной формы и структуры* действуют друг на друга, так, как будто бы вся масса тела сконцентрирована в его центре инерции $\overline{G}$, так что тело и точка действуют друг на друга как две материальные точки. Отсюда следует также, что момент силы, действующей на тело $T$, относительно произвольно выбранной точки $G$ будет

$$L = f\mu m R d,$$

где $d$ — расстояние точки $G$ до прямой $P\overline{G}$.

Если за точку $G$ выбран центр инерции тела, то очевидно, что $L = 0$.

Нетрудно теперь убедиться, что два совершенно произвольных по форме и структуре тела $T_1$ и $T_2$ при том же законе, пропорциональном расстоянию, действуют друг на друга как две материальные точки, помещенные в центрах инерции этих тел с массами, равными соответствующим массам тел.

Возвращаясь к закону взаимодействия (1.38) при любой функции $u(\Delta)$, отметим, что взаимодействие между двумя произвольными телами $T_1$ и $T_2$ полностью определяется силовой функцией взаимодействия

$$U = f \int\limits_{(T_1)} dm_1 \int\limits_{(T_2)} \phi(\Delta)\, dm_2,$$

которая является функцией 12 независимых переменных, определяющих положение и ориентацию каждого тела в системе координат $Oxyz$.

Так же как в § 5, установим, что если тела $T_1$ и $T_2$ не имеют общей части, то составляющие силы, действующей на тело $T$ $(i = 1, 2)$ и момента этой силы, относительно центра приведения $G_i$ (выбираемого произвольно, лишь бы он был жестко связан с телом $T_i$) определятся формулами:

$$\Xi_i = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad H_i = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i},$$

$$L_\varphi^{(i)} = \frac{\partial U}{\partial \varphi_i}, \quad L_\psi^{(i)} = \frac{\partial U}{\partial \psi_i}, \quad L_\vartheta^{(i)} = \frac{\partial U}{\partial \vartheta_i}.$$