ГЛАВА II

СВОЙСТВА СИЛОВОЙ ФУНКЦИИ НЬЮТОНОВСКОГО ПРИТЯЖЕНИЯ

§ 1. Свойства силовой функции во внешнем пространстве

В начале первой главы мы указали на некоторые, очевидные, свойства силовой функции ньютоновского притяжения материальной точки другой материальной точкой или системой конечного числа материальных точек.

Здесь мы покажем, что указанные свойства распространяются без всякого затруднения и на общий случай, когда одна из двух притягивающих масс (или даже обе) образует непрерывно протяженное тело (одного, двух или трех измерений, безразлично).

Рассмотрим сначала простейший случай, когда одна из двух притягивающих масс образует тело T конечных размеров и с непрерывной плотностью, а другая — есть материальная точка P конечной массы μ.

Тогда силовая функция взаимного притяжения определится формулой

$$U = f\mu \int\limits_{(T)} \frac{dm}{\Delta}, \tag{2.1}$$

где dm есть элемент притягивающей массы, сосредоточенной в точке $M(x', y', z')$ тела T, Δ есть расстояние от точки $P(x, y, z)$ до точки M, так что

$$\Delta^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2;$$

интеграл (однократный, двойной или тройной) распространен на всю массу тела T.

Силовая функция U есть некоторая определенная функция координат x, y, z точки P и зависит, кроме того, от шести параметров, определяющих положение и ориентацию тела T относительно неизменной системы координат $Oxyz$ *). За эти параметры могут быть взяты прямоугольные координаты ξ, η, ζ какой-либо произвольно выбранной точки G, жестко связанной с телом T и, например, эйлеровы углы ψ, φ, ϑ, определяющие ориентацию «собственной» системы осей, неизменно связанных с телом и имеющих начало в точке G*).

Так как функция U выражается некоторым определенным интегралом, в котором координаты точки P и тела T играют роль параметров, то вид и аналитическая структура этой функции могут быть весьма сложными.

Действительно, интеграл в формуле (2.1) зависит и от формы тела T и от его физического строения, и в конечном виде этот интеграл выражается чрезвычайно редко. Но даже в тех немногих случаях, когда интеграл (2.1) вычисляется в конечном виде, его выражение оказывается столь сложным и громоздким, что усмотреть непосредственно свойства функции, им определяемой, весьма затруднительно.

Поэтому представляет значительный интерес (и теоретический и практический!) исследовать, насколько это возможно, свойства этой силовой функции, определяемой интегральной формулой (2.1), не связывая это исследование с возможностью вычисления интеграла в конечном виде.

Перейдем к рассмотрению этих свойств силовой функции, предполагая сначала, что точка P находится во внешнем относительно тела T пространстве, т. е. что материальная частица μ не составляет части притягивающей массы, образующей наше тело.

Тогда расстояние Δ не обращается в нуль ни для какого из указанных положений точки P, а так как область интегрирования по условию конечна и плотность тела непрерывна, то интеграл в формуле (2.1) будет заведомо собственным, откуда сразу вытекают следующие свойства:

---

*) Под неизменной системой координат мы подразумеваем систему, никак не связанную с притягивающими массами. Наоборот, «собственной» системой координат является система, жестко связанная с телом.

Свойство 1. *Силовая функция U, рассматриваемая как функция координат точки P, конечна, непрерывна и однозначна во всем внешнем пространстве.*

Свойство 2. *Силовая функция U, рассматриваемая как функция параметров тела T, также конечна, непрерывна и однозначна, пока точка P остается во внешнем относительно тела пространстве.*

Свойство 3. *Частные производные от силовой функции U любого порядка и по любым координатам точки P и тела T также конечны, непрерывны и однозначны, пока точка P остается во внешнем для тела T пространстве.*

Рассмотрим теперь составляющие силы, действующей на точку P, а также составляющие силы, действующей на тело T, и ее момента. Мы имеем (см. § 5 гл. I)

$$\left.\begin{aligned} X &= f\mu \int\limits_{(T)} \frac{x'-x}{\Delta^3}\,dm, \\ Y &= f\mu \int\limits_{(T)} \frac{y'-y}{\Delta^3}\,dm, \\ Z &= f\mu \int\limits_{(T)} \frac{z'-z}{\Delta^3}\,dm. \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

Заметим, кроме того, что формулы (1.28) для составляющих силы, действующей на тело, и формулы (1.29) для составляющих ее момента могут быть переписаны в виде

$$\left.\begin{aligned} \Xi &= -X, & L_x &= (z-\zeta)Y-(y-\eta)Z, \\ \mathrm{H} &= -Y, & L_y &= (x-\xi)Z-(z-\zeta)X, \\ \mathrm{Z} &= -Z, & L_z &= (y-\eta)X-(x-\xi)Y. \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

Отсюда непосредственно следует

Свойство 4. *Составляющие силы притяжения, действующей на точку P, так же как и составляющие силы притяжения, действующей на тело T, и ее момента, рассматриваемые либо как функции координат точки P, либо как функции параметров тела T, либо как функции тех и других величин одновременно, конечны, непрерывны и однозначны, когда точка P находится во внешнем для тела T пространстве.*

Результаты § 5 главы I позволяют также сформулировать следующее

Свойство 5. *Формулы*

$$\left.\begin{aligned} X&=\frac{\partial U}{\partial x}, & Y&=\frac{\partial U}{\partial y}, & Z&=\frac{\partial U}{\partial z}, \\ \Xi&=\frac{\partial U}{\partial \xi}, & \mathrm{H}&=\frac{\partial U}{\partial \eta}, & \mathrm{Z}&=\frac{\partial U}{\partial \zeta}, \\ L_\varphi&=\frac{\partial U}{\partial \varphi}, & L_\psi&=\frac{\partial U}{\partial \psi}, & L_\vartheta&=\frac{\partial U}{\partial \vartheta} \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

остаются справедливыми, пока точка P находится во внешнем относительно тела T пространстве.

Посмотрим теперь, как ведут себя силовая функция U и ее частные производные первого порядка, если расстояние $R=\overline{PG}$ между точкой P и точкой G, неизменно связанной с телом, неограниченно увеличивается.

Обозначим через R' расстояние от точки M тела T до точки G, а через $\overline{R}$ — наибольшее из всех возможных расстояний R'. Предполагая, что $R>\overline{R}$, имеем по свойству треугольника

$$R-\overline{R}<R-R'<\Delta<R+R'<R+\overline{R},$$

откуда

$$\frac{R}{R+\overline{R}}<\frac{R}{\Delta}<\frac{R}{R-\overline{R}}.$$

Умножая все части этого неравенства на положительную величину $f\mu\,dm$ и интегрируя по всей массе тела T, имеем

$$\frac{f\mu mR}{R+\overline{R}}<f\mu R\int\limits_{(T)}\frac{dm}{\Delta}<\frac{f\mu mR}{R-\overline{R}},$$

откуда выводим следующее

Свойство 6. *Когда расстояние R между точкой P и точкой G, жестко связанной с телом T, неограниченно растет, произведение $R\cdot U$ стремится к определенному, конечному пределу, равному $f\mu m$, где m есть вся масса тела T.*

Из этого свойства выводим весьма важное следствие, а именно: *если расстояние R весьма велико по сравнению с наибольшим из расстояний точек тела до точки G,* *то взаимная силовая функция точки P и тела T весьма мало отличается от взаимной силовой функции материальной точки P с массой μ и материальной точки G, масса которой равна массе тела T.*

Положим теперь

$$F = f\mu \int\limits_{(T)} \frac{dm}{\Delta^2}.$$

Тогда, точно так же как и выше, найдем

$$\lim_{R\to\infty} (R^2F) = f\mu m.$$

Обращаясь затем к формулам (2.2), выводим

$$R^2|X| \leqslant f\mu R^2 \int\limits_{(T)} \left|\frac{x'-x}{\Delta}\right| \frac{dm}{\Delta^2} \leqslant R^2F \text{ *)},$$

откуда

$$\lim_{R\to\infty} |R^2X| \leqslant f\mu m, \quad \lim_{R\to\infty} |R^2Y| \leqslant f\mu m, \quad \lim_{R\to\infty} |R^2Z| \leqslant f\mu m;$$

кроме того, из первой группы формул (2.3) имеем также

$$\lim_{R\to\infty} |R^2\Xi| \leqslant f\mu m, \quad \lim_{R\to\infty} |R^2H| \leqslant f\mu m, \quad \lim_{R\to\infty} |R^2Z| \leqslant f\mu m,$$

а вторая группа формул (2.3) дает

$$\lim_{R\to\infty} L_x = \lim_{R\to\infty} L_y = \lim_{R\to\infty} L_z = 0.$$

Выведем еще одно предельное соотношение. Из треугольника MGP имеем

$$\Delta^2 = R^2 + R'^2 - 2RR'\cos\gamma,$$

где γ есть угол, образованный при точке G сторонами $\overrightarrow{GM}$ и $\overrightarrow{GP}$. Отсюда находим

$$\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial R} = -\frac{R - R'\cos\gamma}{\Delta^3},$$

и следовательно,

$$R^2\frac{\partial U}{\partial R} = -f\mu \int\limits_{(T)} \frac{R^3}{\Delta^3}\,dm + f\mu \int\limits_{(T)} \frac{R^2R'\cos\gamma}{\Delta^3}\,dm,$$

---

*) Ясно, что $\left|\dfrac{x'-x}{\Delta}\right| \leqslant 1.$

откуда без труда найдем*)

$$\lim_{R\to\infty}\left(R^2\frac{\partial U}{\partial R}\right)=-f\mu m.$$

Полученные предельные соотношения дают следующее

Свойство 7. *Силовая функция взаимного притяжения материальной точки P и тела T, рассматриваемая или как функция координат точки P, или как функция координат точки G, жестко связанной с телом T, есть функция регулярная на бесконечности.*

Из найденных результатов вытекает, что когда расстояние R достаточно велико по сравнению с линейными размерами тела, то имеют место приближенные равенства

$$U\approx f\frac{\mu m}{R},\qquad \frac{\partial U}{\partial R}\approx -f\frac{\mu m}{R^2},$$

которые приводят к формулировке следующего следствия.

Следствие. *Тело T любой формы и любой структуры и весьма удаленная от него материальная точка P взаимно притягиваются друг к другу так, как будто вся масса тела сконцентрирована в точке G.*

Перейдем теперь к рассмотрению вторых частных производных от силовой функции взаимного притяжения тела T и точки P. Дифференцируя первую группу формул (2.4), мы получим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\frac{\partial X}{\partial x},\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\frac{\partial Y}{\partial y},\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=\frac{\partial Z}{\partial z},$$

откуда с помощью формул (2.2), предполагая по-прежнему, что точка P не составляет части тела T, находим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=f\mu\int\limits_{(T)}\left\{-\frac{1}{\Delta^3}+\frac{3(x'-x)^2}{\Delta^5}\right\}dm,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=f\mu\int\limits_{(T)}\left\{-\frac{1}{\Delta^3}+\frac{3(y'-y)^2}{\Delta^5}\right\}dm,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=f\mu\int\limits_{(T)}\left\{-\frac{1}{\Delta^3}+\frac{3(z'-z)^2}{\Delta^5}\right\}dm.$$

---

*) Очевидно, что $\lim\limits_{R\to\infty}\frac{R}{\Delta}=1,\quad \lim\limits_{R\to\infty}\frac{R'}{\Delta}=0.$

Складывая эти три равенства, имеем

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0.$$

Совершенно так же покажем, что

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2}=0.$$

В результате получаем следующее

Свойство 8. *Силовая функция U, рассматриваемая или как функция координат точки P, или как функция координат точки G, жестко связанной с телом T, удовлетворяет уравнению Лапласа, если точка P не составляет части массы тела T.*

Примечание 1. Мы можем сказать иначе, что силовая функция взаимного притяжения тела и точки есть гармоническая функция и координат точки P и координат точки G.

Примечание 2. Легко видеть, что потенциал двойного слоя W также удовлетворяет уравнению Лапласа, если точка P не лежит на поверхности S, несущей этот двойной слой. Доказательство сказанного получается сразу, если воспользоваться для определения W формулой (1.24) главы первой.

Все полученные нами здесь результаты легко распространяются также на случай двух произвольных притягивающих тел. В этом случае силовая функция взаимного притяжения определится формулой

$$U=f\int\limits_{(T_1)}\int\limits_{(T_2)}\frac{dm_1\,dm_2}{\Delta}, \tag{2.5}$$

где интеграл берется и по всей массе тела T_1, и по всей массе тела T_2. Если эти два тела не имеют общей части, имеют конечные размеры и непрерывные плотности, то интеграл в формуле (2.5) есть собственный и сама функция U, так же как все ее частные производные по любым из параметров тел T_1 и T_2, конечны, непрерывны и однозначны.

Формулы, определяющие составляющие притяжений и их моменты,

$$\left.\begin{array}{lll}
\Xi_1 = \dfrac{\partial U}{\partial \xi_1}, & \mathrm{H}_1 = \dfrac{\partial U}{\partial \eta_1}, & \mathrm{Z}_1 = \dfrac{\partial U}{\partial \zeta_1}, \\
L_\varphi^{(1)} = \dfrac{\partial U}{\partial \varphi_1}, & L_\psi^{(1)} = \dfrac{\partial U}{\partial \psi_1}, & L_\vartheta^{(1)} = \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta_1}, \\
\Xi_2 = \dfrac{\partial U}{\partial \xi_2}, & \mathrm{H}_2 = \dfrac{\partial U}{\partial \eta_2}, & \mathrm{Z}_2 = \dfrac{\partial U}{\partial \zeta_2}, \\
L_\varphi^{(2)} = \dfrac{\partial U}{\partial \varphi_2}, & L_\psi^{(2)} = \dfrac{\partial U}{\partial \psi_2}, & L_\vartheta^{(2)} = \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta_2}
\end{array}\right\} \qquad (2.6)$$

справедливы во всем пространстве, за исключением общих точек тел T_1 и T_2.

Пусть, как и в главе первой, G_1 и G_2 суть точки, жестко связанные с T_1 и T_2 соответственно, а M_1 и M_2 — текущие точки этих тел. Положим

$$\overline{G_1M_1} = R_1', \quad \overline{G_2M_2} = R_2',$$

$$\overline{G_1M_2} = R_1 \quad \overline{G_2M_1} = R_2, \quad \overline{G_1G_2} = R;$$

тогда из треугольников $G_1M_1M_2$, $G_1M_1G_2$, $G_2M_2M_1$ и $G_2M_2G_1$ имеем *)

$$R_1 - R_1' < \Delta < R_1 + R_1',$$

$$R_2 - R_2' < \Delta < R_2 + R_2',$$

$$R - R_1' < R < R_2 + R_1',$$

$$R_1 - R_2' < R < R_1 + R_2',$$

откуда находим

$$R - R_1' - R_2' < \Delta < R + R_1' + R_2'.$$

Обозначая теперь через $\bar{R}$ наибольшее из всех возможных расстояний R_1' и R_2', перепишем последнее неравенство в следующем виде:

$$R - 2\bar{R} < \Delta < R + 2\bar{R};$$

отсюда следует, что

$$\frac{R}{R + 2\bar{R}} < \frac{R}{\Delta} < \frac{R}{R - 2\bar{R}}.$$

---

*) Читателю рекомендуется сделать рисунок.

Умножая все части последнего неравенства на положительную величину $f\,dm_1\,dm_2$ и интегрируя по всей массе тела T_1 и по всей массе тела T_2, получим

$$\frac{fRm_1m_2}{R+2\overline{R}} < RU < \frac{fRm_1m_2}{R-2\overline{R}},$$

откуда выводим

$$\lim_{R\to\infty}(RU) = fm_1m_2. \tag{2.7}$$

Далее, точно так же как и выше, найдем

$$\lim_{R\to\infty}\left|R^2\frac{\partial U}{\partial \xi_1}\right| \leqslant fm_1m_2, \ \ldots,$$

$$\lim_{R\to\infty}\left|R^2\frac{\partial U}{\partial \xi_2}\right| \leqslant fm_1m_2, \ \ldots$$

Теперь из треугольников $G_1M_1M_2$ и $G_1G_2M_2$ имеем

$$\Delta^2 = R_1^2 + R_1'^2 - 2R_1R_1'\cos\gamma_1; \qquad \gamma_1 = \angle M_1G_1M_2,$$

$$R_1^2 = R^2 + R_2'^2 - 2RR_2'\cos\gamma_2; \qquad \gamma_2 = \angle G_1G_2M_2,$$

откуда выводим, что

$$R^2\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial R} = -\frac{R^2}{\Delta^2}\,\frac{R-R_2'\cos\gamma_2}{\Delta}\left(1+\frac{R_1'}{R_1}\cos\gamma_1\right).$$

С помощью последней формулы получим

$$\lim_{R\to\infty}\left(R^2\frac{\partial U}{\partial R}\right) = \lim_{R\to\infty}\left\{fR^2\int\limits_{(T_1)}\int\limits_{(T_2)}\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial R}\,dm_1dm_2\right\} =$$

$$= -fm_1m_2. \tag{2.8}$$

Из равенств (2.7) и (2.8) вытекает следующее важное следствие.

Следствие. *Если расстояние R достаточно велико по сравнению с линейными размерами обоих тел T_1 и T_2, то имеем следующие приближенные равенства*:

$$U \approx f\frac{m_1m_2}{R}, \qquad \frac{\partial U}{\partial R} = -f\frac{m_1m_2}{R^2},$$

которые показывают, что два достаточно удаленные друг от друга, совершенно произвольные по форме и структуре, тела T_1 и T_2 притягиваются взаимно почти *так же, как две материальные точки, массы которых равны массам тел и расстояние между которыми равно R.*

Этот чрезвычайно важный результат показывает, что в ряде случаев возможно совершенно отвлечься от формы и структуры взаимно притягивающихся тел и рассматривать эти тела просто как материальные точки, повинующиеся в точности закону всемирного тяготения Ньютона.

Например, в небесной механике при изучении движений небесных тел как естественных, так и искусственных, можно, если только расстояние между телами достаточно велико, заменить реальные тела природы материальными точками.

Следует, впрочем, отметить, что такая замена далеко не всегда возможна и в некоторых случаях приходится рассматривать тела такими, какие они есть, или, по крайней мере, заменять материальной точкой только одно из двух тел, а именно то, которое значительно меньше другого.

Так, при изучении движений больших планет солнечной системы мы можем рассматривать и солнце и планеты как материальные точки. Но при изучении, например, движений близких к Земле искусственных спутников необходимо учитывать форму и структуру Земли, а спутник можно трактовать как материальную точку.

Отметим, наконец, что, рассматривая силовую функцию U, определенную формулой (2.5), где

$$\Delta^2 = (x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2 + (z'_1 - z'_2)^2,$$

или как функцию только координат точки G_1, или как функцию только координат точки G_2, мы получим, в силу формул, подобных формулам (1.26), следующие равенства:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta_1^2} = 0$$

и

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta_2^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta_2^2} = 0.$$

Действительно, по формулам (1.26), в которых нужно только все координаты снабдить внизу индексами 1 и 2, а все направляющие косинусы такими же верхними индексами, мы будем иметь, например,

$$\frac{\partial^2 \Delta^{-1}}{\partial \xi_1^2} = \frac{\partial^2 \Delta^{-1}}{\partial x_1'^2}$$

и аналогично по двум другим координатам. Но

$$\frac{\partial^2 \Delta^{-1}}{\partial x_1'^2}+\frac{\partial^2 \Delta^{-1}}{\partial y_1'^2}+\frac{\partial^2 \Delta^{-1}}{\partial z_1'^2}=0;$$

поэтому

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi_1^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial \eta_1^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta_1^2}=$$

$$=f\int\limits_{(T_1)}\int\limits_{(T_2)}\left[\frac{\partial^2 \Delta^{-1}}{\partial \xi_1^2}+\frac{\partial^2 \Delta^{-1}}{\partial \eta_1^2}+\frac{\partial^2 \Delta^{-1}}{\partial \zeta_1^2}\right] dm_1\, dm_2=0.$$

Полученные равенства показывают, что $U(G_1)$ и $U(G_2)$ суть гармонические функции во всем, внешнем относительно тел T_1 и T_2 пространстве *).

§ 2. Уравнение Лапласа в криволинейных координатах

Мы видели в предыдущем параграфе, что силовая функция ньютоновского притяжения, рассматриваемая как функция трех прямоугольных декартовых координат, всегда удовлетворяет некоторому линейному уравнению в частных производных второго порядка, называемому *уравнением Лапласа*.

Это уравнение играет поэтому значительную роль в теории притяжения, а так как оно часто встречается и во многих других вопросах математического естествознания, то представляет интерес рассмотреть подробнее некоторые его свойства.

В последующем нам придется пользоваться уравнением Лапласа не только в декартовых, но и в некоторых других координатах, например в цилиндрических, в полярных сферических и тому подобное. По этой причине мы рассмотрим в этом параграфе, как преобразуется уравнение Лапласа при переходе к другим координатам, причем займемся сначала наиболее общим преобразованием такого рода, из которого нетрудно уже будет вывести и различные частные случаи.

---

*) Гармонической функцией в бесконечной области трехмерного пространства называется функция, правильная в этой области, регулярная на бесконечности и удовлетворяющая уравнению Лапласа.