и аналогично по двум другим координатам. Но

$$\frac{\partial^2 \Delta^{-1}}{\partial x_1'^2}+\frac{\partial^2 \Delta^{-1}}{\partial y_1'^2}+\frac{\partial^2 \Delta^{-1}}{\partial z_1'^2}=0;$$

поэтому

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi_1^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial \eta_1^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta_1^2}=$$

$$=f\int\limits_{(T_1)}\int\limits_{(T_2)}\left[\frac{\partial^2 \Delta^{-1}}{\partial \xi_1^2}+\frac{\partial^2 \Delta^{-1}}{\partial \eta_1^2}+\frac{\partial^2 \Delta^{-1}}{\partial \zeta_1^2}\right]dm_1\,dm_2=0.$$

Полученные равенства показывают, что $U(G_1)$ и $U(G_2)$ суть гармонические функции во всем, внешнем относительно тел T_1 и T_2 пространстве*).

§ 2. Уравнение Лапласа в криволинейных координатах

Мы видели в предыдущем параграфе, что силовая функция ньютоновского притяжения, рассматриваемая как функция трех прямоугольных декартовых координат, всегда удовлетворяет некоторому линейному уравнению в частных производных второго порядка, называемому *уравнением Лапласа.*

Это уравнение играет поэтому значительную роль в теории притяжения, а так как оно часто встречается и во многих других вопросах математического естествознания, то представляет интерес рассмотреть подробнее некоторые его свойства.

В последующем нам придется пользоваться уравнением Лапласа не только в декартовых, но и в некоторых других координатах, например в цилиндрических, в полярных сферических и тому подобное. По этой причине мы рассмотрим в этом параграфе, как преобразуется уравнение Лапласа при переходе к другим координатам, причем займемся сначала наиболее общим преобразованием такого рода, из которого нетрудно уже будет вывести и различные частные случаи.

---

*) Гармонической функцией в бесконечной области трехмерного пространства называется функция, правильная в этой области, регулярная на бесконечности и удовлетворяющая уравнению Лапласа.

Для большей простоты и удобства рассмотрим какую-либо функцию V от трех независимых переменных x_1, x_2, x_3 и введем символ ∇V, называемый *оператором Лапласа* и определяемый равенством

$$\nabla V = \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}. \tag{2.9}$$

При помощи этого символа уравнение Лапласа запишется кратко в виде

$$\nabla V = 0,$$

вследствие чего преобразование уравнения Лапласа сводится к преобразованию оператора Лапласа.

Рассмотрим общее ортогональное преобразование координат *). Пусть

$$\Phi_i(x_1, x_2, x_3) = \rho_i \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{2.10}$$

уравнения трех семейств поверхностей, образующих тройную ортогональную систему, так что две какие-нибудь поверхности, принадлежащие к двум различным семействам, пересекаются всюду под прямым углом. Так как

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_3}$$

суть угловые коэффициенты нормали к поверхности $\Phi_i = \rho_i$, то условия ортогональности поверхностей (2.10) имеют вид

$$\sum_{s=1}^{3} \frac{\partial \rho_1}{\partial x_s} \cdot \frac{\partial \rho_2}{\partial x_s} = 0, \quad \sum_{s=1}^{3} \frac{\partial \rho_2}{\partial x_s} \frac{\partial \rho_3}{\partial x_s} = 0, \quad \sum_{s=1}^{3} \frac{\partial \rho_3}{\partial x_s} \frac{\partial \rho_1}{\partial x_s} = 0. \tag{2.11}$$

Решая уравнения (2.10) относительно x_i $(i = 1, 2, 3)$, мы выразим эти величины в функции параметров ρ_1, ρ_2, ρ_3, называемых *криволинейными координатами*

$$x_i = \varphi_i(\rho_1, \rho_2, \rho_3) \qquad (i = 1, 2, 3); \tag{2.12}$$

*) См., например, Э. Гурса, Курс математического анализа, т. I, пер. с франц., ГТТИ, 1933.

так как эти поверхности также попарно ортогональны, то, записывая условия ортогональности, мы имеем

$$\sum_{s=1}^{3} \frac{\partial \varphi_s}{\partial \rho_1} \frac{\partial \varphi_s}{\partial \rho_2} = 0, \quad \sum_{s=1}^{3} \frac{\partial \varphi_s}{\partial \rho_2} \frac{\partial \varphi_s}{\partial \rho_3} = 0, \quad \sum_{s=1}^{3} \frac{\partial \varphi_s}{\partial \rho_3} \frac{\partial \varphi_s}{\partial \rho_1} = 0. \tag{2.13}$$

Посмотрим, какой вид примет оператор Лапласа при переходе к криволинейным координатам ρ_i.

Непосредственное вычисление дает

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial \rho_k} \frac{\partial \rho_k}{\partial x_i} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

и далее

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} = \sum_{k=1}^{3} \left\{ \frac{\partial \rho_k}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 V}{\partial \rho_k \, \partial \rho_j} \frac{\partial \rho_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial \rho_k} \frac{\partial^2 \rho_k}{\partial x_i^2} \right\} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3).$$

Складывая эти выражения, получим с помощью соотношений (2.11) выражение для оператора Лапласа в криволинейных координатах

$$\nabla V = \sum_{k=1}^{3} \left\{ \Delta_1(\rho_k) \frac{\partial^2 V}{\partial \rho_k^2} + \Delta_2(\rho_k) \frac{\partial V}{\partial \rho_k} \right\}, \tag{2.14}$$

где

$$\Delta_1(\rho_k) = \sum_{s=1}^{3} \left(\frac{\partial \rho_k}{\partial x_s} \right)^2; \quad \Delta_2(\rho_k) = \sum_{s=1}^{3} \frac{\partial^2 \rho_k}{\partial x_s^2} = \nabla(\rho_k) \tag{2.15}$$

суть так называемые *дифференциальные параметры* Ламе первого и второго порядка*).

Дифференциальные параметры первого порядка вычисляются без затруднений. Действительно, дифференцируя формулы (2.12), получим соотношения вида

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \rho_k} \frac{\partial \rho_k}{\partial x_s} = 1_i^s,$$

---

*) Дифференциальный параметр второго порядка совпадает, очевидно, с оператором Лапласа.

где введено для сокращения обозначение

$$1_i^s = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad s = i, \\ 0 & \text{при} \quad s \neq i. \end{cases}$$

Решая полученные соотношения относительно производных $\frac{\partial \rho_1}{\partial x_s}$, $\frac{\partial \rho_2}{\partial x_s}$, $\frac{\partial \rho_3}{\partial x_s}$, найдем

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial x_s} = \frac{\frac{\partial \varphi_s}{\partial \rho_k}}{\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \rho_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial \rho_k}\right)^2},$$

откуда

$$\Delta_1(\rho_k) = \frac{1}{H_k} \qquad (k = 1,\ 2,\ 3).$$

Здесь положено

$$H_k = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \rho_k}\right)^2. \tag{2.16}$$

Чтобы найти $\Delta_2(\rho_k)$ в функции криволинейных координат, положим в тождестве (2.14) последовательно $V = x_1,\ x_2,\ x_3$, что даст три соотношения

$$\sum_{k=1}^{3} \left\{ \frac{1}{H_k} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \rho_k^2} + \Delta_2(\rho_k) \frac{\partial \varphi_i}{\partial \rho_k} \right\} = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

которые остается только разрешить относительно $\Delta_2(\rho_k)$.

Умножая для этого последние соотношения на $\frac{\partial \varphi_i}{\partial \rho_k}$, складывая и имея в виду условия ортогональности (2.13), мы получим

$$H_k \Delta_2(\rho_k) + \sum_{s=1}^{3} \frac{1}{H_s} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \rho_k} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \rho_s^2} = 0.$$

Но из формулы (2.16) следует, что

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \rho_k} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \rho_k^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial H_k}{\partial \rho_k},$$

а дифференцирование условий (2.13) дает

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial\rho_k}\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial\rho_s^2}+\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial\rho_k\,\partial\rho_s}\frac{\partial\varphi_i}{\partial\rho_s}\right)=0 \qquad (s\neq k),$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\varphi_i}{\partial\rho_k}\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial\rho_s^2}=-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\varphi_i}{\partial\rho_s}\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial\rho_k\,\partial\rho_s}=-\frac{1}{2}\frac{\partial H_s}{\partial\rho_k} \qquad (s\neq k);$$

поэтому

$$\Delta_2(\rho_k)=-\frac{1}{2H_k^2}\frac{\partial H_k}{\partial\rho_k}+\frac{1}{2H_k}\sum_{s=1}^{3}{}'\frac{1}{H_s}\frac{\partial H_s}{\partial\rho_k} \qquad (s\neq k).$$

Полагая еще

$$h_k^2=\frac{1}{H_k}=\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial\rho_k}\right)^2}, \tag{2.17}$$

представим $\Delta_2(\rho_k)$ в следующем виде:

$$\Delta_2(\rho_k)=h_k\frac{\partial h_k}{\partial\rho_k}-h_k^2\sum_{s=1}^{3}{}'\frac{1}{h_s}\frac{\partial h_s}{\partial\rho_k} \qquad (s\neq k).$$

Подставляя теперь полученные выражения для $\Delta_1(\rho_k)$ и $\Delta_2(\rho_k)$ в формулу (2.14), получим окончательно

$$\nabla V=h_1h_2h_3\left[\frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\frac{h_1}{h_2h_3}\frac{\partial V}{\partial\rho_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\rho_2}\left(\frac{h_2}{h_3h_1}\frac{\partial V}{\partial\rho_2}\right)+\frac{\partial}{\partial\rho_3}\left(\frac{h_3}{h_1h_2}\frac{\partial V}{\partial\rho_3}\right)\right], \tag{2.18}$$

что и дает искомое выражение оператора Лапласа в произвольных криволинейных координатах.

Последнюю формулу можно записать более кратко в виде

$$\nabla V=h_1h_2h_3\sum_{s=1}^{3}\frac{\partial}{\partial\rho_s}\left(\frac{h_s}{h_{s+1}h_{s+2}}\frac{\partial V}{\partial\rho_s}\right),$$

если условиться брать $s+j-3$ вместо $s+j$, когда $s+j>3$.

Величины h_1, h_2, h_3, определяемые формулами (2.17), называются *коэффициентами Ламе*.

Вычислим по формуле (2.18) оператор Лапласа для некоторых частных случаев криволинейных координат.

Введем сначала вместо декартовых координат x_i цилиндрические координаты по формулам

$$x_1 = \rho\cos v, \quad x_2 = \rho\sin v, \quad x_3 = z.$$

Полагая в формулах (2.17) $\rho_1 = \rho$, $\rho_2 = v$, $\rho_3 = z$, найдем без труда

$$h_1 = 1, \quad h_2 = \frac{1}{\rho}, \quad h_3 = 1,$$

и выражение для оператора Лапласа примет вид

$$\nabla V = \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}. \tag{2.19}$$

Рассмотрим теперь случай полярных сферических координат

$$x_1 = r\cos\lambda\sin\theta, \quad x_2 = r\sin\lambda\sin\theta, \quad x_3 = r\cos\theta.$$

Полагая в формулах (2.17) $\rho_1 = r$, $\rho_2 = \lambda$, $\rho_3 = \theta$, получим

$$h_1 = 1, \quad h_2 = \frac{1}{r\sin\theta}, \quad h_3 = \frac{1}{r},$$

и формула (2.18) запишется так:

$$\nabla V = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)\right]. \tag{2.20}$$

Рассмотрим далее так называемое *преобразование обратными радиусами-векторами*, определяемое формулами

$$x_i = \frac{x_i'}{r'^2} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

где

$$r'^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2.$$

Полагая в формулах (2.17) $\rho_i = x_i'$ $(i = 1, 2, 3)$, найдем

$$h_1 = h_2 = h_3 = r'^2,$$

откуда

$$\nabla V = r'^6 \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i'}\left(\frac{1}{r'^2}\frac{\partial V}{\partial x_i'}\right), \tag{2.21}$$

что может быть написано также, как легко проверить, в виде

$$\nabla V = r'^5 \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i'^2} \left(\frac{V}{r'} \right)^{*)}.$$

В качестве последнего примера рассмотрим преобразование оператора Лапласа к эллипсоидальным координатам, полагая

$$x_i^2 = \frac{(a_i^2 + \rho_1)(a_i^2 + \rho_2)(a_i^2 + \rho_3)}{(a_i^2 - a_{i+1}^2)(a_i^2 - a_{i+2}^2)} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

где, как и выше, нужно писать $i + j - 3$ вместо $i + j$, когда $i + j > 3$ $(j = 1, 2)$.

Довольно громоздкое вычисление, детали которого мы опускаем, дает

$$h_i = \frac{2R_i}{\sqrt{(\rho_i - \rho_{i+1})(\rho_i - \rho_{i+2})}} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

где положено для сокращения

$$R_i = \sqrt{(a_1^2 + \rho_i)(a_2^2 + \rho_i)(a_3^2 + \rho_i)} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

и сохраняется условие относительно индексов.

Подставляя эти значения коэффициентов Ламе в формулу (2.18), мы получим окончательно

$$\nabla V = \frac{4}{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_2 - \rho_3)(\rho_3 - \rho_1)} \sum_{i=1}^{3} R_i \frac{\partial}{\partial \rho_i} \left(R_i \frac{\partial V}{\partial \rho_i} \right). \qquad (2.22)$$

§ 3. Свойства притяжения вблизи и внутри притягивающей массы

Рассматривая в § 1 этой главы свойства притяжения во внешнем относительно притягивающих масс пространстве, мы имели возможность не обращать внимания на число измерений притягивающего тела или притягивающихся тел. Действительно, мы показали, что силовое поле любого материального тела (одномерного, двумерного или трехмерного)

---

*) Отсюда вытекает, между прочим, известная теорема Кельвина: *Если $V(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа, то функция $r^{-1} V(xr^{-2}, yr^{-2}, zr^{-2})$, где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, также удовлетворяет этому уравнению.*