что может быть написано также, как легко проверить, в виде

$$\nabla V = r'^5 \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i'^2} \left(\frac{V}{r'} \right)^{*)}.$$

В качестве последнего примера рассмотрим преобразование оператора Лапласа к эллипсоидальным координатам, полагая

$$x_i^2 = \frac{(a_i^2 + \rho_1)(a_i^2 + \rho_2)(a_i^2 + \rho_3)}{(a_i^2 - a_{i+1}^2)(a_i^2 - a_{i+2}^2)} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

где, как и выше, нужно писать $i + j - 3$ вместо $i + j$, когда $i + j > 3$ $(j = 1,\ 2)$.

Довольно громоздкое вычисление, детали которого мы опускаем, дает

$$h_i = \frac{2R_i}{\sqrt{(\rho_i - \rho_{i+1})(\rho_i - \rho_{i+2})}} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

где положено для сокращения

$$R_i = \sqrt{(a_1^2 + \rho_i)(a_2^2 + \rho_i)(a_3^2 + \rho_i)} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

и сохраняется условие относительно индексов.

Подставляя эти значения коэффициентов Ламе в формулу (2.18), мы получим окончательно

$$\nabla V = \frac{4}{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_2 - \rho_3)(\rho_3 - \rho_1)} \sum_{i=1}^{3} R_i \frac{\partial}{\partial \rho_i} \left(R_i \frac{\partial V}{\partial \rho_i} \right). \qquad (2.22)$$

§ 3. Свойства притяжения вблизи и внутри притягивающей массы

Рассматривая в § 1 этой главы свойства притяжения во внешнем относительно притягивающих масс пространстве, мы имели возможность не обращать внимания на число измерений притягивающего тела или притягивающихся тел. Действительно, мы показали, что силовое поле любого материального тела (одномерного, двумерного или трехмерного)

*) Отсюда вытекает, между прочим, известная теорема Кельвина: *Если* $V(x, y, z)$ *удовлетворяет уравнению Лапласа, то функция* $r^{-1}V(xr^{-2}, yr^{-2}, zr^{-2})$, *где* $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, *также удовлетворяет этому уравнению.*

обладает во внешнем пространстве одними и теми же общими свойствами, не зависящими вдобавок от формы и физического строения тела.

Переходя теперь к рассмотрению свойств притяжения в непосредственной близости от притягивающей материи и внутри нее, мы должны уже принимать во внимание число измерений тела, так как последнее, как мы увидим, весьма существенно влияет на свойства силовой функции и ее производных.

Будем исследовать сначала простейший случай, когда одно из двух притягивающихся тел есть безразмерная, материальная частица (материальная точка!), а другое — произвольное материальное тело конечных размеров и с непрерывной плотностью (линейной, поверхностной или объемной).

Исследование будет заключаться в изучении поведения силовой функции взаимного притяжения тела и точки, а также составляющих силы притяжения, когда точка неограниченно приближается к телу, а затем и проникает внутрь тела, делаясь частью его массы, но не утрачивая своей собственной индивидуальности. Иными словами, мы будем исследовать силовое поле притягивающего тела в непосредственной окрестности тела и внутри тела, так как силовое поле вне тела в существенных чертах уже известно.

Поэтому здесь мы будем преимущественно рассматривать тело T как *притягивающее*, а материальную точку P как *притягиваемую*. Таким образом, мы будем предполагать, что тело T неподвижно относительно некоторой неизменной системы координат $Oxyz$, которую будем часто выбирать каким-либо особым образом. Следовательно, силовая функция и составляющие силы притяжения будут функциями только от координат притягиваемой точки P.

Переходя к исследованию, рассмотрим прежде всего случай одномерного тела или материальной линии.

Пусть L — заданная дуга пространственной кривой, «нагруженная» притягивающей материей с линейной плотностью $\delta(M)$, которая есть непрерывная функция точки M дуги L. Силовая функция притяжения этой материальной линии и материальной точки P, имеющей массу μ, определится, как уже известно, формулой

$$U(P) = f\mu \int\limits_{(L)} \frac{\delta(M)\,ds}{\Delta} \tag{2.23}$$

и является некоторой определенной функцией координат x, y, z притягиваемой точки P.

Для изучения свойств этой функции, когда точка P, оставаясь вне линии L, стремится к некоторой определенной ее точке, разберем сначала наипростейший частный случай. Пусть L есть отрезок прямой линии AB с началом в точке A, а плотность δ есть величина постоянная. Пусть $G(\xi, \eta, \zeta)$ есть произвольная внутренняя точка отрезка $\overrightarrow{AB}$, а $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — его направляющие косинусы.

Положим

$$\overline{MG} = s, \quad \overline{AG} = l_1, \quad \overline{GB} = l_2,$$

$$\overline{PG}^2 = R^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2,$$

$$\nu = \cos(\overrightarrow{PG}, \overrightarrow{AB}) = \alpha_1 \frac{\xi - x}{R} + \alpha_2 \frac{\eta - y}{R} + \alpha_3 \frac{\zeta - z}{R};$$

тогда

$$\Delta^2 = R^2 + s^2 + 2R\nu s,$$

и силовая функция материального отрезка AB на точку P определится формулой

$$U = \frac{f\mu m}{l_1 + l_2} \int_{-l_1}^{l_2} \frac{ds}{\sqrt{R^2 + s^2 + 2R\nu s}}. \tag{2.24}$$

Этот интеграл легко вычисляется, так что U может быть представлено в конечном виде

$$U = \frac{f\mu m}{l_1 + l_2} \ln \frac{R_2 + l_2 + R\nu}{R_1 - l_1 + R\nu}, \tag{2.25}$$

где положено

$$R_1^2 = \overline{PA}^2 = R^2 + l_1^2 - 2Rl_1\nu,$$

$$R_2^2 = \overline{PB}^2 = R^2 + l_2^2 + 2Rl_2\nu.$$

Дифференцирование выражения (2.25) даст составляющие силы притяжения, действующей на точку P:

$$X = \frac{f\mu m}{l_1 + l_2} \left\{ \frac{x - \xi - \alpha_1 (R_2 + l_2)}{R_2 (R_2 + l_2 + R\nu)} - \frac{x - \xi - \alpha_1 (R_1 - l_1)}{R_1 (R_1 - l_1 + R\nu)} \right\} \tag{2.26}$$

и аналогичные выражения для двух других составляющих.

Пусть теперь точка P приближается по любому пути к точке G. Тогда

$$R \to 0, \quad R_1 \to l_1, \quad R_2 \to l_2,$$

и мы найдем

$$U \to \ln(\infty), \quad RU \to 0, \quad |X| \to \infty.$$

Таким образом, внутренние точки отрезка AB (включая его концы A и B) являются особыми точками силового поля материального отрезка. Силовая функция U, а также составляющие силы притяжения неограниченно растут, когда точка P приближается к какой-либо точке G отрезка. Нужно отметить, впрочем, что силовая функция растет, как логарифм, т. е. весьма медленно, а составляющая силы притяжения растет, как обратное расстояние, т. е. также медленнее, чем растет составляющая силы притяжения материальной точки G, масса которой равна m.

Вернемся теперь к формуле (2.23), определяющей силовую функцию произвольной материальной линии.

Пусть G — любая внутренняя точка дуги L. Допустим далее, что линия L имеет в точке G определенную касательную. Выделим весьма малый кусок дуги $\overset{\frown}{AB}$ линии L, содержащий внутри себя точку G. Благодаря малости куска дуги $\overset{\frown}{AB}$ и непрерывности плотности δ этот кусок можно заменить весьма малым куском касательной, проведенной в точке G, и считать, что этот малый материальный отрезочек имеет постоянную плотность.

Отсюда непосредственно следует, что когда точка P приближается по любому пути к точке G линии L, то и силовая функция U, и составляющие силы притяжения, действующей на точку P, неограниченно растут, но рост этот весьма медленный, так же как и в случае однородного материального отрезка*).

Если точка G есть угловая точка линии L, то в ней можно провести две различные касательные. Рассматривая любую из этих двух касательных, убедимся, так же как и

---

*) Изложенное исследование поведения силовой функции вблизи материальной линии, очевидно, не является строгим доказательством и носит только характер общего соображения. Однако мы можем здесь удовольствоваться этими общими соображениями.

выше, что угловая точка является особой точкой силового поля материальной линии.

Перейдем к рассмотрению материальной поверхности S, на которой распределен простой слой непрерывной плотности $\delta(M)$. Силовая функция этого простого слоя на точку $P(x, y, z)$ определится уже известной формулой

$$U(P) = f\mu \iint\limits_{(S)} \frac{\delta(M)\,d\sigma}{\Delta}. \tag{2.27}$$

Чтобы исследовать свойства функции $U(P)$, когда точка P приближается к какой-либо точке M_0 поверхности S, так же как и выше, рассмотрим сначала простейший случай однородного простого слоя, распределенного на круглом плоском диске радиуса a. Однако в этом случае уже не удается получить конечное выражение для силовой функции диска на произвольную точку P пространства, и мы вынуждены внести в наше рассмотрение еще дополнительные упрощения. А именно, мы будем искать силовую функцию для случая, когда точка P находится где-нибудь на перпендикуляре к плоскости диска, проходящем через его центр.

Возьмем начало координат в центре диска и ось аппликат направим по перпендикуляру к его плоскости. Пусть M — текущая точка диска, а ρ и v — ее полярные координаты. Тогда

$$d\sigma = \rho\, d\rho\, dv,$$

и силовая функция диска на точку $P(z)$, лежащую на оси аппликат, определится формулой

$$U(z) = f\mu\delta \int\limits_0^{2\pi} dv \int\limits_0^a \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}.$$

Произведя интегрирование, мы получаем, что

$$U(z) = 2\pi f\mu\delta\left[\sqrt{a^2 + z^2} - \sqrt{z^2}\right].$$

Из найденного выражения следует, что составляющие силы притяжения, действующей на точку P,

$$X = Y = 0, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z} = 2\pi f\mu\delta\left[\frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2}}\right].$$

Рассматривая полученные выражения, мы видим, что силовая функция U остается конечной и непрерывной при любом z, в частности и при $z=0$, так как

$$\lim_{z \to 0} U(z) = 2\pi f \mu \delta a = U(0).$$

Таким образом, силовая функция простого однородного слоя, лежащего на круглом диске, *конечна, непрерывна и однозначна во всем пространстве.*

Рассматривая теперь составляющую притяжения по нормали к плоскости диска, мы немедленно убеждаемся, что эта составляющая также конечна и однозначна во всем пространстве, но терпит разрыв первого рода в центре диска.

Действительно, когда z остается положительным, то $\sqrt{z^2} = z$, и, вычисляя предел составляющей Z, мы получаем

$$\lim_{z \to +0} Z = \lim_{z \to +0} \frac{\partial U}{\partial z} = -2\pi f \mu \delta .$$

Наоборот, когда z остается отрицательным, то $\sqrt{z^2} = -z$, и мы найдем

$$\lim_{z \to -0} Z = \lim_{z \to -0} \frac{\partial U}{\partial z} = +2\pi f \mu \delta .$$

Таким образом, составляющая силы притяжения по нормали к плоскости диска, или нормальная производная силовой функции, *имеет разрыв первого рода в центре диска* и величина «скачка» равна

$$d = \lim_{z \to +0} Z - \lim_{z \to -0} Z = -4\pi f \mu \delta.$$

Возвратимся теперь к силовой функции (2.27) произвольного простого слоя непрерывной плотности, распределенного на куске гладкой поверхности S, и покажем простыми рассуждениями, что и в этом случае силовая функция и ее нормальная производная ведут себя примерно так же, как и в случае однородного диска.

Пусть M_0 есть любая внутренняя точка поверхности S. Обозначим через $\delta_0 = \delta(M_0)$ плотность слоя в этой точке.

Проведем к поверхности в точке M_0 касательную плоскость и нормаль, на которой установим положительное направление. Пусть притягиваемая точка P лежит на этой нормали и обозначим ее расстояние до точки M_0 через ε.

Вообразим далее прямой круглый цилиндр малого радиуса a, осью которого является нормаль, проведенная в точке M_0. Обозначим через S_1 и $\overline{S}_1$ части поверхности и касательной плоскости, вырезаемые этим цилиндром, а через S_2 — остальную часть поверхности S.

Обозначим далее через U_1, U_2, $\overline{U}_1$ соответственно силовые функции слоев, лежащих на S_1 и S_2, и однородного слоя плотности δ_0, лежащего на круглом диске $\overline{S}_1$ с центром в точке M_0. Тогда

$$U(P) = U_1(P) + U_2(P),$$

а полагая

$$\overline{U}(P) = \overline{U}_1(P) + U_2(P),$$

будем, очевидно, иметь

$$\lim_{a \to 0} \overline{U}(P) = U(P).$$

Найдем предел $U(P)$, когда точка P, перемещаясь по положительной или по отрицательной нормали, приближается неограниченно к точке M_0. Мы можем написать

$$\lim_{\varepsilon \to \pm 0} U(P) = \lim_{\varepsilon \to \pm 0} \left[\lim_{a \to 0} \overline{U}(P)\right] = \lim_{a \to 0} \left[\lim_{\varepsilon \to \pm 0} \overline{U}(P)\right].$$

Но точка M_0 есть центр диска $\overline{S}_1$ и одновременно является внешней точкой для слоя, лежащего на S_2. Поэтому

$$\lim_{\varepsilon \to \pm 0} \overline{U}(P) = 2\pi f \mu \delta_0 a + U_2(M_0),$$

и следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \to \pm 0} U(P) = \lim_{a \to 0} [2\pi f \mu \delta_0 a + U_2(M_0)] = U(M_0);$$

отсюда следует, что силовая функция $U(P)$ остается конечной и непрерывной, когда точка P приближается к точке M_0 поверхности S.

Обозначая теперь через $N = \frac{\partial U}{\partial n}$ составляющую силы притяжения по нормали к поверхности S, мы найдем подобным же образом, что

$$\lim_{\varepsilon \to \pm 0} N(P) = \lim_{\varepsilon \to \pm 0} \left[\lim_{a \to 0} \overline{N}(P)\right] = \lim_{a \to 0} \left[\lim_{\varepsilon \to \pm 0} \overline{N}(P)\right].$$

Учитывая выведенное выше свойство силовой функции диска и помня, что M_0 есть внешняя точка для S_2, мы имеем

$$\lim_{\varepsilon \to \pm 0} \bar{N}(P) = \mp 2\pi f \mu \delta_0 + N_2(M_0),$$

откуда, следовательно, получим

$$\lim_{\varepsilon \to \pm 0} N(P) = \lim_{a \to 0} [\mp 2\pi f \mu \delta_0 + N_2(M_0)] = \mp 2\pi f \mu \delta_0 + N(M_0),$$

что показывает разрывность нормальной составляющей силы притяжения в точке M_0, причем величина «скачка» равна

$$d = \lim_{\varepsilon \to +0} N(P) - \lim_{\varepsilon \to -0} N(P) = -4\pi f \mu \delta_0.$$

Величина $N(M_0)$ определяется по формуле

$$N(M_0) = f\mu \iint_{(S)} \delta(M) \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial n} d\sigma$$

и называется прямым значением нормальной составляющей силы притяжения или нормальной производной от силовой функции.

Примечание. Можно показать, на чем мы не будем останавливаться, что составляющие X, Y, Z силы притяжения простого слоя, действующей на точку P, также разрывны в точке M_0 поверхности S и величины их «скачков» равны соответственно *)

$$d_x = \lim_{\varepsilon \to +0} X(P) - \lim_{\varepsilon \to -0} X(P) = -4\pi f \mu \delta_0 \alpha_1.$$

$$d_y = \lim_{\varepsilon \to +0} Y(P) - \lim_{\varepsilon \to -0} Y(P) = -4\pi f \mu \delta_0 \alpha_2,$$

$$d_z = \lim_{\varepsilon \to +0} Z(P) - \lim_{\varepsilon \to -0} Z(P) = -4\pi f \mu \delta_0 \alpha_3,$$

где α_1, α_2, α_3 — направляющие косинусы положительной нормали к поверхности S в точке M_0.

Для иллюстрации свойств силовой функции простого слоя рассмотрим однородный простой слой, лежащий на сфере Σ радиуса a. Пусть O — центр шара, M — текущая точка его поверхности и P — притягиваемая точка, не лежащая на Σ.

*) См., например, Л. Н. Сретенский, Теория ньютоновского потенциала, Гостехиздат, 1946.

Обозначим угол между $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OP}$ через θ, а через λ — угол, образованный плоскостью OMP с плоскостью некоторого меридиана сферы, принимаемого за начальный. Тогда элемент поверхности сферы в точке M будет $d\sigma = a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\lambda$, и силовая функция определится формулой

$$U(P) = f\mu a^2\delta \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\Delta} = 2\pi f\mu a^2\delta \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\Delta}. \quad (2.28)$$

Для вычисления интеграла введем вместо переменной интегрирования θ новую переменную Δ. Обозначая расстояние точки P до O через R, имеем из треугольника OMP

$$\Delta^2 = R^2 + a^2 - 2aR\cos\theta,$$

откуда следует, что

$$\frac{\sin\theta\, d\theta}{\Delta} = \frac{d\Delta}{aR}.$$

Если точка P находится во внутренней полости слоя, то $0 \leqslant R < a$, и мы находим

$$U(P) = \frac{2\pi f\mu a^2\delta}{aR} \int_{a-R}^{a+R} d\Delta = f\frac{m\mu}{a};$$

если же точка P лежит вне слоя, т. е. если $R > a$, то

$$U(P) = \frac{2\pi f\mu a^2\delta}{aR} \int_{R-a}^{R+a} d\Delta = f\frac{m\mu}{R},$$

где m — масса слоя.

Будем теперь приближать точку P к точке M_0 сферы Σ. Если P стремится к M_0, оставаясь внутри полости слоя, то $U(P)$ остается постоянной и ее предельное значение равно той же самой постоянной. Если P стремится к M_0, оставаясь вне сферы, то $R \to a$, и мы получаем тот же предел. Таким образом, в обоих случаях

$$\lim_{P \to M_0} U(P) = f\frac{m\mu}{a} = 4\pi f\mu\delta a.$$

Далее, примем за положительную нормаль к сфере ее внешнюю нормаль. Тогда направление этой нормали совпадает с направлением $\overrightarrow{OP}$, и мы найдем

$$\frac{\partial U}{\partial R}=0 \qquad (0 \leqslant R \leqslant a)$$

и

$$\frac{\partial U}{\partial R}=-f\frac{m\mu}{R^2} \qquad (R > a),$$

откуда имеем

$$\lim_{R\to a-0}\frac{\partial U}{\partial R}=0 \quad \text{и} \quad \lim_{R\to a+0}\frac{\partial U}{\partial R}=-f\frac{m\mu}{a^2}=-4\pi f\mu\delta.$$

Таким образом, нормальная, или радиальная, составляющая силы притяжения слоя действительно имеет разрыв первого рода в точке сферы M_0 и величина скачка равна $-4\pi f\mu\delta$.

Отметим еще, что полученные формулы показывают, что точка, находящаяся во внутренней полости слоя, вовсе не испытывает притяжения, а внешняя точка притягивается так как если бы вся масса слоя была сосредоточена в его центре *)

§ 4. Свойства притяжения внутри трехмерного тела

В предыдущем параграфе мы рассмотрели свойства притяжения для случая, когда притягиваемая точка приближается к какой-либо точке притягивающей материальной линии или материальной поверхности.

Мы показали, что в точках материальной линии и силовая функция, и составляющие силы притяжения имеют *разрыв второго рода*, а во внутренних точках материальной поверхности силовая функция *остается непрерывной*, в то время как составляющие силы притяжения вообще претерпевают *разрыв первого рода*.

Теперь мы перейдем к подробному изучению наиболее важного для астрономии и, в частности, для небесной механики случая, когда притягивающее тело имеет три измерения, т. е. является «телом» в собственном смысле этого слова.

Прежде всего разберем простой частный случай, когда притягивающее тело есть однородный шар T радиуса a с центром в точке O.

---

*) Это есть теорема Ньютона в ее частной формулировке.