дает с направлением $\overrightarrow{OP}$, и мы найдем

$$\frac{\partial U}{\partial R} = 0 \qquad (0 \leqslant R \leqslant a)$$

и

$$\frac{\partial U}{\partial R} = -f\frac{m\mu}{R^2} \qquad (R > a),$$

откуда имеем

$$\lim_{R \to a-0} \frac{\partial U}{\partial R} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{R \to a+0} \frac{\partial U}{\partial R} = -f\frac{m\mu}{a^2} = -4\pi f\mu\delta.$$

Таким образом, нормальная, или радиальная, составляющая силы притяжения слоя действительно имеет разрыв первого рода в точке сферы M_0 и величина скачка равна $-4\pi f\mu\delta$.

Отметим еще, что полученные формулы показывают, что точка, находящаяся во внутренней полости слоя, вовсе не испытывает притяжения, а внешняя точка притягивается так как если бы вся масса слоя была сосредоточена в его центре *)

§ 4. Свойства притяжения внутри трехмерного тела

В предыдущем параграфе мы рассмотрели свойства притяжения для случая, когда притягиваемая точка приближается к какой-либо точке притягивающей материальной линии или материальной поверхности.

Мы показали, что в точках материальной линии и силовая функция, и составляющие силы притяжения имеют *разрыв второго рода*, а во внутренних точках материальной поверхности силовая функция *остается непрерывной*, в то время как составляющие силы притяжения вообще претерпевают *разрыв первого рода*.

Теперь мы перейдем к подробному изучению наиболее важного для астрономии и, в частности, для небесной механики случая, когда притягивающее тело имеет три измерения, т. е. является «телом» в собственном смысле этого слова.

Прежде всего разберем простой частный случай, когда притягивающее тело есть однородный шар T радиуса a с центром в точке O.

---

*) Это есть теорема Ньютона в ее частной формулировке.

Нетрудно найти силовую функцию шара, используя результаты, полученные в конце предыдущего параграфа. Действительно, рассмотрим внутри шара T сферу Σ переменного радиуса r и с центром в точке O.

Тогда силовая функция простого сферического слоя на точку P определится формулой (2.28), где вместо a нужно написать r, а под δ надо подразумевать объемную плотность шара. Силовая функция всего шара найдется теперь еще одним интегрированием по r.

Пусть точка P находится вне шара, т. е. $R > a$. Тогда имеем

$$U(P) = \frac{4\pi f\mu\delta}{R}\int_0^a r^2\,dr = f\frac{\mu m}{R}. \tag{2.29}$$

Здесь m — масса шара.

Пусть далее точка P находится внутри шара T, т. е. $0 \leqslant R < a$. Тогда, разбивая промежуток интегрирования $(0, a)$ на два промежутка $(0, R)$ и (R, a), мы получим

$$U(P) = 4\pi f\mu\delta\left\{\frac{1}{R}\int_0^R r^2\,dr + \int_R^a r\,dr\right\} = f\frac{\mu m}{a^3}\left(\frac{3a^2}{2} - \frac{R^2}{2}\right). \tag{2.30}$$

Отсюда видно, что силовая функция шара на *внутреннюю* точку остается конечной и непрерывной, причем непрерывность сохраняется и при переходе точки P из внешнего пространства во внутреннее или наоборот.

Найдем теперь радиальную составляющую силы притяжения шара на точку P. Непосредственное вычисление или же дифференцирование формул (2.29) и (2.30) дает

$$\frac{\partial U}{\partial R} = -f\frac{\mu m}{a^3}R \qquad (0 \leqslant R < a)$$

и

$$\frac{\partial U}{\partial R} = -f\frac{\mu m}{R^2} \qquad (R > a).$$

Отсюда видно, что радиальная составляющая также остается конечной и непрерывной внутри шара, а также и на его поверхности. Обозначая координаты точки O через ξ, η, ζ, а координаты точки P, как обычно, через x, y, z, мы имеем

$$R^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2;$$

так как

$$X=\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{x-\xi}{R}\frac{\partial U}{\partial R},$$

то составляющие силы притяжения X, Y, Z по осям основной системы координат также конечны и непрерывны внутри шара и на его поверхности.

Из полученных нами результатов следует, между прочим, что однородный шар притягивает внешнюю точку P так, как будто бы вся масса шара сконцентрирована в его центре; если же точка P находится внутри шара, то она притягивается к его центру с силой, прямо пропорциональной расстоянию до центра.

Чтобы закончить исследование случая однородного шара, вычислим еще оператор Лапласа для силовой функции U, когда точка P находится внутри шара.

Согласно предыдущему, мы имеем при $0\leqslant R\leqslant a$

$$X=\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{f\mu m}{a^3}(x-\xi),$$

откуда

$$\frac{\partial X}{\partial x}=\frac{\partial Y}{\partial y}=\frac{\partial Z}{\partial z}=-f\frac{\mu m}{a^3}$$

и, следовательно,

$$\nabla U=-\frac{3f\mu m}{a^3}=-4\pi f\mu\delta.$$

Таким образом, силовая функция уже не удовлетворяет внутри шара уравнению Лапласа, а является решением некоторого другого уравнения, которое имеет вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=-4\pi f\mu\delta.$$

Это уравнение называется *уравнением Пуассона.*

Теперь перейдем к рассмотрению общего случая, когда тело T имеет произвольную форму и произвольную структуру.

Мы будем предполагать только, что плотность тела есть непрерывная функция текущей точки M, но это допущение не всегда является существенным и в ряде случаев его можно заменить более общим предположением *).

*) См. сноску на стр. 23.

Итак, рассмотрим силовую функцию ньютоновского притяжения некоторого трехмерного тела T, линейные размеры которого конечны и плотность которого $\delta(x', y', z')$ есть непрерывная функция координат x', y', z' точки M. Тогда силовая функция U на точку $P(x, y, z)$ массы μ и составляющие силы притяжения X, Y, Z по осям произвольно выбранной, но неизменной системы координат определятся формулами (см. § 3 гл. I)

$$U(P) = f\mu \int\int\limits_T\int \frac{\delta(x', y', z')\, d\tau}{\Delta} \tag{2.31}$$

и

$$X(P) = f\mu \int\int\limits_{(T)}\int \frac{\delta(x', y', z')(x' - x)\, d\tau}{\Delta^3}, \tag{2.32}$$

где

$$\Delta^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

Интегралы в формулах (2.31) и (2.32) делаются несобственными, когда точка P является частью тела T, а поэтому прежде всего нужно исследовать, сходятся ли эти интегралы, т. е. имеют ли они конечные значения во внутренних точках рассматриваемого тела.

Выше было показано, что для однородного шара выражения (2.31) и (2.32) действительно остаются конечными и непрерывными, когда притягиваемая точка находится внутри шара. Эти результаты без особого труда устанавливаются и для произвольного тела, что заранее делается ясным при помощи следующих простых соображений.

Пусть точка P есть внутренняя точка тела T. Вообразим сферу Σ с центром в точке P и настолько малого радиуса ρ, что вся эта сфера целиком есть часть тела. По непрерывности плотности δ функции U и X в точке P будут весьма мало отличаться от значений этих функций, если часть тела, заключенная в сфере Σ, будет заменена однородным шаром с плотностью $\overline{\delta}$, где $\overline{\delta}$ — наибольшее из значений δ внутри Σ.

Но силовая функция и составляющие силы притяжения, как было показано выше, конечны и непрерывны, если точка P лежит внутри шара. А так как для остальной части тела T точка P является внешней, то силовая функция и составляющие силы притяжения этой остальной части заведомо конечны и непрерывны. Следовательно, и для всего тела силовая функция и составляющая силы притяжения также будут конечны и непрерывны.

Приведенное рассуждение носит скорее описательный характер и хотя обладает наглядностью, все же не может заменить строгого доказательства, к которому теперь и переходим.

Обозначим через α', β', γ' направляющие косинусы прямой, выходящей из точки P и идущей к точке M. Тогда можем написать

$$x' = x + \alpha'\Delta, \quad y' = y + \beta'\Delta, \quad z' = z + \gamma'\Delta. \tag{2.33}$$

Направляющие косинусы α', β', γ' можно рассматривать как координаты точки M' сферы единичного радиуса с центром в точке P, в которой прямая PM пересекает эту сферу, а формулы (2.33) — как формулы перехода от текущих координат x', y', z' к новым переменным интегрирования α', β', γ', Δ, причем

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1.$$

Переходя к этим новым переменным, мы представим U и X в следующем виде *):

$$U(P) = f\mu \int\limits_{(\Omega)}\int d\omega \int\limits_0^R \delta(x + \alpha'\Delta,\ y + \beta'\Delta,\ z + \gamma'\Delta)\,\Delta\, d\Delta \tag{2.34}$$

---

*) Заметим, что если тело однородно, т. е. если

$$\delta(x', y', z') = \text{const},$$

то формула (2.34) дает

$$U(P) = \frac{1}{2} f\mu \int\limits_{(\Omega)}\int R^2\, dw,$$

откуда, перенося интегрирование на поверхность S, получаем следующую формулу Гаусса

$$U(P) = \frac{1}{2} f\mu \int\limits_{(S)}\int \cos\varphi\, d\sigma,$$

представляющую силовую функцию однородного тела двойным интегралом, распространенным по внешней поверхности тела. Замечательное применение этой формулы можно найти в мемуаре С. В. Ковалевской, посвященном теории кольца Сатурна, имеющем теперь, впрочем, лишь исторический интерес. См. сборник: С. В. Ковалевская, Научные работы, Изд. АН СССР, 1948.

и

$$X(P)=f\mu\int\limits_{(\Omega)}\int d\omega\int\limits_{0}^{R}\delta(x+\alpha'\Delta,\ y+\beta'\Delta,\ z+\gamma'\Delta)\,\alpha'\,d\Delta, \tag{2.35}$$

где $d\omega$ есть элемент площади сферы Ω единичного радиуса, а R — переменное расстояние от точки P до точек поверхности S, ограничивающей тело T.

Из формул (2.34) и (2.35) непосредственно видно, что силовая функция U тела и составляющие силы притяжения X, Y, Z *имеют конечные значения* в каждой внутренней точке этого тела.

Примечание. Нетрудно убедиться, что если точка P лежит на поверхности S тела, то U и X все равно остаются конечными. Их значения в точках S определяются теми же формулами (2.34) и (2.35), но область интегрирования Ω' не будет теперь всей сферой Ω, а только ее частью, погруженной в тело T.

Покажем теперь, что силовая функция U и составляющие силы притяжения X, Y, Z изменяются непрерывно, когда точка P перемещается внутри тела и переходит из внешнего пространства внутрь тела или обратно.

Пусть точка P лежит внутри тела T или на его поверхности S. Обозначим через P' точку, близкую к точке P и лежащую либо внутри, либо вне тела, либо на его поверхности. Нужно доказать, что

$$\lim_{P'\to P} U(P')=U(P)$$

и

$$\lim_{P'\to P} X(P')=X(P).$$

Для доказательства вообразим сферу Σ с центром в точке P малого радиуса ρ и допустим, что точка P' лежит внутри этой сферы.

Обозначим через T_1 ту часть тела T, которая заключена внутри сферы Σ, а через T_2 — остальную часть тела T. Далее через U_1 и X_1 будем обозначать силовую функцию и составляющую силы притяжения тела T_1, а через U_2 и X_2 — такие же величины, относящиеся к телу T_2. Тогда

$$U(P)=U_1(P)+U_2(P),\quad X(P)=X_1(P)+X_2(P),$$

и мы можем написать

$$U(P)-U(P')=U_1(P)-U_1(P')+U_2(P)-U_2(P') \tag{2.36}$$

и

$$X(P)-X(P')=X_1(P)-X_1(P')+X_2(P)-X_2(P'). \tag{2.37}$$

Переходим теперь к оценкам числовых значений отдельных слагаемых в формулах (2.36) и (2.37).

Применяя формулы (2.34) и (2.35) к телу T_1, имеем, обозначая через $\bar{\delta}$ наибольшее значение δ в сфере Σ, следующие неравенства:

$$U_1(P) < f\mu\bar{\delta}\int\limits_{(\Omega)}\int d\omega\int\limits_0^{\rho}\Delta\, d\Delta=\frac{1}{2}f\mu\,\bar{\delta}\rho^2\int\limits_{(\Omega)}\int d\omega < 2\pi f\mu\,\bar{\delta}\rho^2$$

и

$$|X_1(P)| < f\mu\bar{\delta}\int\limits_{(\Omega)}\int d\omega\int\limits_0^{\rho}|\alpha'|\, d\Delta < f\mu\,\bar{\delta}\rho\int\limits_{(\Omega)}\int d\omega < 4\pi f\mu\,\bar{\delta}\rho,$$

так как интеграл $\int\limits_{(\Omega)}\int d\omega$ равен 4π, если точка P лежит внутри тела, и меньше 4π, если точка P лежит на поверхности S тела.

Точно так же найдем

$$U_1(P') < f\mu\bar{\delta}\int\limits_{(\Omega)}\int d\omega\int\limits_0^{R}\Delta\, d\Delta=\frac{1}{2}f\mu\,\bar{\delta}R^2\int\limits_{(\Omega)}\int d\omega < 8\pi f\mu\,\bar{\delta}\rho^2$$

и

$$|X_1(P')| < f\mu\bar{\delta}\int\limits_{(\Omega)}\int d\omega\int\limits_0^{R}|\alpha'|\, d\Delta < f\mu\,\bar{\delta}R\int\limits_{(\Omega)}\int d\omega < 8\pi f\mu\,\bar{\delta}\rho,$$

ибо величина R не превосходит диаметра сферы 2ρ.

Пусть теперь ε — любое, сколь угодно малое положительное число. Выберем радиус сферы ρ (внутри которой находится точка P') согласно условию

$$\rho^2 < \rho < \frac{\varepsilon}{24\pi f\mu\bar{\delta}}.$$

Тогда для всех точек P', лежащих внутри сферы Σ, будут выполняться неравенства

$$U_1(P) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad U_1(P') < \frac{\varepsilon}{3}$$

и

$$|X_1(P)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |X_1(P')| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Теперь обратим внимание на то, что точки P и P', находясь внутри сферы Σ, лежат *вне* тела T_2, где и силовая функция, и составляющие силы притяжения непрерывны, как показано в § 1 этой главы. Поэтому можно указать такую сферу Σ' с центром в точке P и содержащуюся внутри сферы Σ, что для всех точек P', принадлежащих сфере Σ', мы будем иметь следующие неравенства:

$$|U_2(P) - U_2(P')| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |X_2(P) - X_2(P')| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Таким образом, на основании равенств (2.36) и (2.37) и полученных оценок

$$|U(P) - U(P')| < \varepsilon, \quad |X(P) - X(P')| < \varepsilon,$$

что, в сущности, и требовалось доказать.

Итак, мы установили следующие свойства.

Свойство 1. *Силовая функция тела конечных размеров и непрерывной плотности остается конечной, однозначной и непрерывной, когда притягиваемая точка P находится внутри тела или на его поверхности.*

Свойство 2. *Составляющие силы притяжения тела конечных размеров и непрерывной плотности остаются также конечными, однозначными и непрерывными, когда притягиваемая точка P находится внутри тела или на его поверхности.*

Перейдем к рассмотрению следующего свойства и докажем, что проекции силы притяжения, действующей на внутреннюю точку тела, равны соответствующим частным производным от силовой функции.

Так как достаточно провести доказательство только для одной из трех проекций, то покажем, например, что

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}.$$

Пусть $P(x, y, z)$ есть внутренняя точка тела, в которой по-прежнему сосредоточена точечная масса μ.

Вообразим опять сферу Σ с центром в P, настолько малого радиуса ρ, что вся эта сфера целиком погружена в тело T. Возьмем теперь другую точку $P'(x+h, y, z)$ тела, лежащую внутри сферы Σ; нужно доказать, что

$$\lim_{h\to 0}\frac{U(P')-U(P)}{h}=X(P),$$

или (так как X не зависит от h) что

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{U(P')-U(P)}{h}-X(P)\right]=0.$$

Положим для сокращения

$$D=\frac{U(P')-U(P)}{h}-X(P)$$

и покажем, что D (величина которой, очевидно, не зависит от ρ) стремится к нулю при $h\to 0$.

Используя те же обозначения, что и выше, можем представить величину D в виде

$$D=D_1+D_2,$$

где D_1 есть значение D для части T_1 тела T, а D_2 — для части T_2, т. е.

$$D_1=\frac{U_1(P')-U_1(P)}{h}-X_1(P)$$

и

$$D_2=\frac{U_2(P')-U_2(P)}{h}-X_2(P).$$

Рассмотрим каждое слагаемое величины D в отдельности. Имеем прежде всего

$$|D_1|\leqslant\left|\frac{U_1(P')-U_1(P)}{h}\right|+|X_1(P)|.$$

Так как оценка для $|X_1(P)|$ уже получена, то остается получить оценку первого слагаемого. Мы имеем

$$\frac{U_1(P')-U_1(P)}{h}=f\mu\iiint\limits_{(T_1)}\left(\frac{1}{\Delta'}-\frac{1}{\Delta}\right)\frac{\delta\, d\tau}{h},$$

где через Δ' обозначено расстояние от точки P' до текущей точки M тела T_1. С помощью неравенств

$$|\Delta' - \Delta| < h, \quad \frac{2}{\Delta\Delta'} \leqslant \frac{1}{\Delta^2} + \frac{1}{\Delta'^2},$$

первое из которых очевидно, а второе легко проверяется, мы найдем

$$\left|\frac{U_1(P') - U_1(P)}{h}\right| <$$
$$< \frac{1}{2}\left\{f\mu \iiint\limits_{(T_1)} \frac{\delta\, d\tau}{\Delta^2} + f\mu \iiint\limits_{(T_1)} \frac{\delta\, d\tau}{\Delta'^2}\right\} = \frac{1}{2}(J + J')$$

(через J и J' обозначены для краткости первое и второе слагаемые в фигурных скобках).

Но J отличается от X только отсутствием множителя α' под знаком интеграла, а так как $|\alpha'| \leqslant 1$, то имеем

$$J < 4\pi f\mu\bar{\delta}\rho$$

и аналогично

$$J' < 8\pi f\mu\bar{\delta}\rho.$$

Следовательно, будем иметь

$$|D_1| < 10\pi f\mu\bar{\delta}\rho.$$

Назначая теперь сколь угодно малое положительное число ε, выберем радиус сферы ρ из условия

$$\rho < \frac{\varepsilon}{20\pi f\mu\bar{\delta}}.$$

Тогда для всякой точки P', для которой $|h| < \rho$, будем иметь

$$|D_1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Переходя затем к оценке $|D_2|$, заметим, что точки P и P' являются внешними для тела T_2, следовательно, D_2 заведомо стремится к нулю при $P' \to P$, т. е. мы можем указать такую сферу Σ' с центром в P и содержащуюся внутри сферы Σ, что для всех точек P', лежащих внутри Σ', будем иметь

$$|D_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь можем написать

$$|D| \leqslant |D_1| + |D_2| < \varepsilon;$$

это неравенство будет справедливо для всякой точки P', достаточно близкой к P, а поэтому

$$\lim_{P' \to P} D = 0,$$

что и требовалось доказать.

При доказательстве мы предполагали, что точка P лежит *внутри* тела T, но очевидно, что доказанное будет справедливо и в том случае, когда точка P находится на поверхности S тела. В результате мы можем сформулировать следующее

Свойство 3. *Если тело T имеет конечные размеры и плотность его непрерывна, то формулы*

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

остаются справедливыми, когда притягиваемая точка P лежит внутри или на поверхности тела.

Примечание. До сих пор мы рассматривали силовую функцию U и составляющие силы притяжения как функции только координат точки P, предполагая таким образом, что параметры, определяющие положение и ориентацию тела, суть величины постоянные. Но разумеется, что установленные свойства будут справедливы и в общем случае, так как координаты точки P и параметры тела T суть величины, не зависящие друг от друга.

Свойства, нами установленные, будут справедливы также и для составляющих силы притяжения, действующей на тело T, и ее момента. Это вытекает непосредственно из формул (2.3) и (2.4), в которых нужно рассматривать как переменные независимые величины ξ, η, ζ, φ, ψ, ϑ. Поэтому мы можем считать справедливыми также следующие свойства.

Свойство 4. *Если тело T имеет конечные размеры и непрерывную плотность, то составляющие силы притяжения материальной точки P, действующей на это тело, и составляющие момента силы притяжения относительно точки, жестко связанной с телом, остаются конечными, непрерывными и однозначными, когда точка P находится внутри или на поверхности тела T.*

Свойство 5. *Формулы*

$$\Xi = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad \mathrm{H} = \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad \mathrm{Z} = \frac{\partial U}{\partial \zeta},$$

$$L_\varphi = \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad L_\psi = \frac{\partial U}{\partial \psi}, \quad L_\vartheta = \frac{\partial U}{\partial \vartheta}$$

остаются справедливыми, когда притягивающая точка P находится внутри или на поверхности притягиваемого тела.

Примечание. Вообразим теперь два произвольных трехмерных тела T_1 и T_2, которые имеют некоторую общую часть T. Каждую точку M этой общей части можно рассматривать и как внутреннюю точку для обоих тел, и как внешнюю точку для тел $T_1 - T$ и $T_2 - T$. И в том и в другом случае и взаимная силовая функция, и составляющие сил притяжения, и составляющие моментов этих сил будут оставаться конечными, непрерывными и однозначными функциями параметров, определяющих положения и ориентации этих тел. Формулы (2.6), выражающие составляющие сил, действующих на тела T_1 и T_2, и составляющие моментов этих сил относительно точек, неизменно связанных с телами, будут справедливы и в том случае, когда тела T_1 и T_2 имеют некоторую общую часть.

§ 5. Уравнение Пуассона. Характеристические свойства силовой функции притяжения трехмерного тела

В начале предыдущего параграфа было показано, что силовая функция однородного шара удовлетворяет во внутренних точках шара уравнению, называемому уравнением Пуассона. Мы покажем теперь, что это свойство сохраняется и для достаточно произвольного трехмерного тела. Для этого выведем прежде всего некоторые вспомогательные формулы.

Пусть имеем тело T с конечными размерами и с непрерывной плотностью $\delta(x', y', z')$. Предположим, сверх того, что функция δ имеет непрерывные частные производные первого порядка по переменным x', y', z'. Тогда мы можем написать

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\delta}{\Delta}\right) = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \delta}{\partial x'} - \frac{\delta}{\Delta^2}\frac{\partial \Delta}{\partial x'} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \delta}{\partial x'} - \delta\frac{x'-x}{\Delta^3},$$