Свойство 5. *Формулы*

$$\Xi=\frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad \mathrm{H}=\frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad \mathrm{Z}=\frac{\partial U}{\partial \zeta}$$

$$L_\varphi=\frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad L_\psi=\frac{\partial U}{\partial \psi}, \quad L_\vartheta=\frac{\partial U}{\partial \vartheta}$$

остаются справедливыми, когда притягивающая точка P находится внутри или на поверхности притягиваемого тела.

Примечание. Вообразим теперь два произвольных трехмерных тела T_1 и T_2, которые имеют некоторую общую часть T. Каждую точку M этой общей части можно рассматривать и как внутреннюю точку для обоих тел, и как внешнюю точку для тел $T_1 - T$ и $T_2 - T$. И в том и в другом случае и взаимная силовая функция, и составляющие сил притяжения, и составляющие моментов этих сил будут оставаться конечными, непрерывными и однозначными функциями параметров, определяющих положения и ориентации этих тел. Формулы (2.6), выражающие составляющие сил, действующих на тела T_1 и T_2, и составляющие моментов этих сил относительно точек, неизменно связанных с телами, будут справедливы и в том случае, когда тела T_1 и T_2 имеют некоторую общую часть.

§ 5. Уравнение Пуассона. Характеристические свойства силовой функции притяжения трехмерного тела

В начале предыдущего параграфа было показано, что силовая функция однородного шара удовлетворяет во внутренних точках шара уравнению, называемому уравнением Пуассона. Мы покажем теперь, что это свойство сохраняется и для достаточно произвольного трехмерного тела. Для этого выведем прежде всего некоторые вспомогательные формулы.

Пусть имеем тело T с конечными размерами и с непрерывной плотностью $\delta(x', y', z')$. Предположим, сверх того, что функция δ имеет непрерывные частные производные первого порядка по переменным x', y', z'. Тогда мы можем написать

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\delta}{\Delta}\right)=\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \delta}{\partial x'}-\frac{\delta}{\Delta^2}\frac{\partial \Delta}{\partial x'}=\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \delta}{\partial x'}-\delta\frac{x'-x}{\Delta^3},$$

и составляющая силы притяжения тела, действующей на материальную точку P, представится формулой

$$X = f\mu \iiint\limits_{(T)} \delta \frac{x'-x}{\Delta^3}\, d\tau =$$

$$= -f\mu \iiint\limits_{(T)} \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\delta}{\Delta}\right) d\tau + f\mu \iiint\limits_{(T)} \frac{\partial \delta}{\partial x'} \cdot \frac{d\tau}{\Delta}.$$

Если точка P лежит вне тела T, то функция δ/Δ удовлетворяет в области D, занимаемой телом, всем условиям теоремы Остроградского *), а поэтому, применяя формулу Остроградского к первому интегралу правой части последнего равенства, мы имеем

$$\iiint\limits_{(D)} \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\delta}{\Delta}\right) d\tau = \iint\limits_{(S)} \frac{\delta\alpha}{\Delta}\, d\sigma,$$

где α есть косинус угла, образованного направлением внешней нормали к поверхности S с положительным направлением оси абсцисс. Теперь выражение для X напишется в виде

$$X = -f\mu \iint\limits_{(S)} \frac{\delta\alpha}{\Delta}\, d\sigma + f\mu \iiint\limits_{(D)} \frac{\partial \delta}{\partial x'} \frac{d\tau}{\Delta}.$$

Пусть теперь точка P лежит внутри области интегрирования D. В этом случае мы уже не можем непосредственно применить формулу Остроградского, ибо функция δ/Δ обращается в бесконечность в точке P области D.

Чтобы иметь возможность применить формулу Остроградского, вообразим опять сферу Σ с центром в точке P, настолько малого радиуса ρ, что вся сфера целиком находится в области D.

Тогда в области D_2, заключенной между поверхностью S тела и поверхностью Σ сферы, функция δ/Δ удовлетворяет условиям теоремы Остроградского, и мы можем написать

$$\iiint\limits_{(D_2)} \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\delta}{\Delta}\right) d\tau = \iint\limits_{(S)} \frac{\delta\alpha}{\Delta}\, d\sigma + \iint\limits_{(\Sigma)} \frac{\delta\alpha'}{\Delta}\, d\sigma,$$

---

*) См. сноску на стр. 37

где α' — направляющий косинус внешней по отношению к области D_2 нормали к Σ.

Перенося во втором интеграле интегрирование на поверхность сферы Ω единичного радиуса с центром в точке P, мы имеем $d\sigma = \rho^2 d\omega$, и поэтому

$$\iint\limits_{(\Sigma)} \frac{\delta\alpha'}{\Delta} d\sigma = \rho \iint\limits_{(\Omega)} \delta\alpha' \, d\omega;$$

правая часть этого равенства стремится к нулю при $\rho \to 0$. Так как одновременно $D_2 \to D$, то мы получаем в пределе

$$\iiint\limits_{(D)} \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\delta}{\Delta}\right) d\tau = \iint\limits_{(S)} \frac{\delta\alpha}{\Delta} d\sigma,$$

что дает для X такую же формулу, как и в случае внешней точки. Повторяя эти рассуждения для двух других составляющих силы притяжения, мы и получим формулы, называемые *формулами Римана*, одинаково справедливые и для внешней и для внутренней точки P:

$$\left.\begin{aligned} X &= -f\mu \iint\limits_{(S)} \frac{\delta\alpha}{\Delta} d\sigma + f\mu \iiint\limits_{(T)} \frac{\partial\delta}{\partial x'} \frac{d\tau}{\Delta}, \\ Y &= -f\mu \iint\limits_{(S)} \frac{\delta\beta}{\Delta} d\sigma + f\mu \iiint\limits_{(T)} \frac{\partial\delta}{\partial y'} \frac{d\tau}{\Delta}, \\ Z &= -f\mu \iint\limits_{(S)} \frac{\delta\gamma}{\Delta} d\sigma + f\mu \iiint\limits_{(T)} \frac{\partial\delta}{\partial z'} \frac{d\tau}{\Delta}. \end{aligned}\right\} \quad (2.38)$$

Интегралы, стоящие в правых частях формул (2.38), можно рассматривать, если угодно, как силовые функции тел, обладающих соответственно плотностями $\frac{\partial\delta}{\partial x'}$, $\frac{\partial\delta}{\partial y'}$, $\frac{\partial\delta}{\partial z'}$, и как силовые функции простых слоев, лежащих на поверхности S, с плотностями $-\delta\alpha$, $-\delta\beta$, $-\delta\gamma$ *). Поэтому каждая составляющая силы притяжения может быть рассматриваема как сумма силовой функции трехмерного тела и силовой функции материальной поверхности.

---

*) Разумеется, нужно сначала обобщить понятие простого слоя, считая, что его плотность может иметь как положительные, так и отрицательные значения.

Применим формулы Римана для вычисления вторых частных производных от силовой функции U тела T.

Заметим, что, мы можем дифференцировать интегралы в формулах (2.38) по координатам точки P обычным образом, так как для любого положения этой точки в пространстве все эти интегралы, как уже нами показано, суть интегралы сходящиеся. Имея, кроме того, в виду, что для любой точки $X=\frac{\partial U}{\partial x}$, мы можем написать

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\frac{\partial X}{\partial x}=-f\mu\int\limits_{(S)}\int\delta\alpha\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial x}\,d\sigma+f\mu\int\int\limits_{(T)}\int\frac{\partial\delta}{\partial x'}\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial x}\,d\tau$$

и аналогично для двух других составляющих. Поэтому оператор Лапласа для функции U определится формулой

$$\nabla U=-f\mu\int\limits_{(S)}\int\delta\left\{\alpha\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial x}+\beta\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial y}+\gamma\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial z}\right\}d\sigma+$$

$$+f\mu\int\int\limits_{(T)}\int\left\{\frac{\partial\delta}{\partial x'}\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial x}+\frac{\partial\delta}{\partial y'}\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial y}+\frac{\partial\delta}{\partial z'}\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial z}\right\}d\tau.$$

Так как

$$\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial x}=\frac{\alpha'}{\Delta^2},\qquad\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial y}=\frac{\beta'}{\Delta^2},\qquad\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial z}=\frac{\gamma'}{\Delta^2},$$

где α', β', γ' суть направляющие косинусы прямой $\overrightarrow{PM}$, то

$$\alpha\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial x}+\beta\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial y}+\gamma\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial z}=\frac{\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'}{\Delta^2}=\frac{\cos\varphi}{\Delta^2},$$

$$\frac{\partial\delta}{\partial x'}\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial x}+\frac{\partial\delta}{\partial y'}\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial y}+\frac{\partial\delta}{\partial z'}\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial z}=\frac{1}{\Delta^2}\frac{\partial\delta}{\partial\Delta},$$

где φ есть угол, образованный внешней нормалью к поверхности S с направлением $\overrightarrow{PM}$, а $\frac{\partial\delta}{\partial\Delta}$ есть производная от функции $\delta(M)$ по направлению прямой, соединяющей эту точку M с точкой P.

Теперь имеем

$$\nabla U=-f\mu\int\limits_{(S)}\int\delta\frac{\cos\varphi}{\Delta^2}\,d\sigma+f\mu\int\int\limits_{(T)}\int\frac{\partial\delta}{\partial\Delta}\frac{d\tau}{\Delta^2};$$

переходя во втором интеграле к системе координат с началом в точке P, получим по формуле, подобной (2.34),

$$\iiint\limits_{(T)} \frac{\partial\delta}{\partial\Delta} \frac{d\tau}{\Delta^2} = \iint\limits_{(\Omega)} d\omega \int\limits_0^R \frac{\partial\delta}{\partial\Delta} d\Delta,$$

причем R обозначает расстояние от точки P до текущей точки M поверхности тела. Так как при $R=0$ точка M совпадает с точкой P, то

$$\int\limits_0^R \frac{\partial\delta}{\partial\Delta} d\Delta = \delta(M) - \delta(P).$$

Так как, с другой стороны,

$$\iint\limits_{(S)} \delta \frac{\cos\varphi}{\Delta^2} d\sigma = \iint\limits_{(\Omega)} \delta\, d\omega,$$

то в результате получим, что

$$\nabla U = -f\mu\delta(P) \iint\limits_{(\Omega)} d\omega.$$

Если P есть внешняя точка, то, как было отмечено в § 4 главы I, $\iint\limits_{(\Omega)} d\omega$ равен нулю и оператор Лапласа также есть нуль, что нам уже известно.

Если же P есть внутренняя точка, то $\iint\limits_{(\Omega)} d\omega = 4\pi$, и мы получаем

$$\nabla U = -4\pi f\mu\delta(P).$$

Это и показывает, что функция $U(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -4\pi f\mu\delta(x, y, z), \tag{2.39}$$

и мы можем сформулировать следующее

Свойство 6. *Если плотность $\delta(M)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные первого порядка, то в каждой внутренней точке P тела силовая функция $U(P)$ удовлетворяет уравнению Пуассона.*

Примечание. Последнее свойство доказано нами при довольно жестких предположениях относительно плотности тела, которая должна быть не только сама непрерывной, но должна также иметь и непрерывные частные производные первого порядка.

Оказывается, что последнее предположение не является обязательным и может быть заменено другим, менее стеснительным условием. Наиболее известным является так называемое *условие Гольдера*, которое заключается в следующем.

Пусть D есть область пространства, занятая притягивающим телом, а $M(x', y', z')$ и $M_1(x'_1, y'_1, z'_1)$ — две произвольные точки этой области. Мы говорим, что плотность тела удовлетворяет условию Гольдера, если существуют такие две положительные постоянные $p \leqslant 1$ и C, что мы будем иметь неравенство

$$|\delta(x'_1, y'_1, z'_1) - \delta(x', y', z')| < C(\overline{MM_1})^p.$$

Это условие ограничивает в известном отношении быстроту изменения плотности тела при переходе от одной его точки к другой. При соблюдении условия Гольдера плотность есть заведомо непрерывная функция координат, а с другой стороны, это условие, несомненно, выполняется, если частные производные первого порядка от плотности ограничены.

Гольдером было доказано, что если плотность тела удовлетворяет указанному условию, то силовая функция U притяжения такого тела также удовлетворяет уравнению Пуассона. Приводить здесь это доказательство мы не будем*).

Соберем теперь вместе все доказанные нами свойства силовой функции притяжения тела, имеющего конечные размеры, считая, что это тело имеет три измерения.

Эти свойства мы назовем *характеристическими свойствами* силовой функции и сформулируем их следующим образом:

1) *Силовая функция тела непрерывной плотности есть функция конечная, непрерывная и однозначная во*

---

*) Доказательство можно найти в книгах: Л. Н. Сретенский, Теория ньютоновского потенциала, Н. М. Гюнтер, Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики.

всем пространстве, обращающаяся в нуль в бесконечности, причем

$$\lim_{R\to\infty}(RU)=f\mu m,$$

где m есть вся масса тела, а R — расстояние притягиваемой точки до начала координат.

2) *Частные производные первого порядка от силовой функции также конечны, непрерывны и однозначны во всем пространстве и обращаются в нуль в бесконечности, причем*

$$\lim_{R\to\infty}\left|R^2\frac{\partial U}{\partial x}\right|\leqslant f\mu m,\qquad \lim_{R\to\infty}\left|R^2\frac{\partial U}{\partial y}\right|\leqslant f\mu m,$$

$$\lim_{R\to\infty}\left|R^2\frac{\partial U}{\partial z}\right|\leqslant f\mu m.$$

3) *Равенства*

$$X=\frac{\partial U}{\partial x},\quad Y=\frac{\partial U}{\partial y},\quad Z=\frac{\partial U}{\partial z}$$

имеют место во всем пространстве.

4) *Во всем внешнем относительно тела пространстве силовая функция U удовлетворяет уравнению Лапласа, т. е $\nabla U=0$, во всем внешнем пространстве.*

5) *Если плотность тела непрерывна и имеет вдобавок непрерывные частные производные первого порядка, то внутри тела силовая функция удовлетворяет уравнению Пуассона, т. е. $\nabla U=-4\pi f\mu\delta$ во всей области пространства, занятой притягивающей материей.*

Перечисленные свойства называются *характеристическими*, так как они вполне определяют силовую функцию притяжения трехмерным телом материальной точки, а поэтому эти свойства могут быть использованы для фактического нахождения силовой функции, чем мы в дальнейшем и воспользуемся.

Чтобы оправдать сказанное, докажем следующую теорему, принадлежащую Дирихле.

Теорема Дирихле. *Пусть тело T обладает непрерывной плотностью, частные производные первого порядка которой также непрерывны. Тогда, если каким-либо способом найдена функция $\overline{U}(x, y, z)$, обладающая всеми характеристическими свойствами силовой функции, то* *эта найденная функция совпадает во всем пространстве с силовой функцией тела.*

Для доказательства обозначим, как и прежде, через U силовую функцию тела T, а через $\overline{U}$ некоторую функцию, обладающую всеми характеристическими свойствами силовых функций. Положим

$$V=\overline{U}-U.$$

Эта функция конечна, непрерывна и однозначна во всем пространстве, регулярна на бесконечности и во всем пространстве удовлетворяет уравнению Лапласа. Поэтому к этой функции можно применить формулу Пуанкаре*), которая дает

$$\iint\limits_{(E)}\int\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z'}\right)^2\right\}d\tau=0,$$

где символ E обозначает все пространство.

---

*) Формула Пуанкаре получается следующим образом. Положим в формуле Остроградского $P=U\dfrac{\partial V}{\partial x}$, $Q=U\dfrac{\partial V}{\partial y}$, $R=U\dfrac{\partial V}{\partial z}$, где U и V функции, определенные в области D и на ее границе, конечные, непрерывные и однозначные вместе со своими частными производными первого и второго порядков. Тогда имеем следующую формулу, называемую иногда предварительной формулой Грина:

$$\iint\limits_{(D)}\int U\nabla V\,d\tau+\iint\limits_{(D)}\int\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)d\tau=$$
$$=\iint\limits_{(S)}U\frac{\partial V}{\partial n}d\sigma.$$

Предположим далее, что каждая из функций U и V определена во всем пространстве и регулярна на бесконечности, т. е. существует такая положительная постоянная, что для достаточно больших значений R ($R^2=x^2+y^2+z^2$) имеют место неравенства

$$|U|\leqslant\frac{A}{R},\quad\left|\frac{\partial U}{\partial x}\right|\leqslant\frac{A}{R^2},\ \ldots$$

Пусть в предыдущей формуле S есть сфера радиуса R с центром в начале координат. В силу приведенных неравенств (и аналогичных для функции V) имеем

$$\left|\frac{\partial V}{\partial n}\right|=\left|\frac{\partial V}{\partial x}\frac{x}{R}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{y}{R}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{z}{R}\right|\leqslant\frac{3A}{R^2},$$

Так как подынтегральная функция существенно положительна, то последнее равенство может выполняться только при условии

$$\frac{\partial V}{\partial x'}=\frac{\partial V}{\partial y'}=\frac{\partial V}{\partial z'}=0,$$

откуда следует, что

$$V=\text{const}.$$

Но так как функции U и $\overline{U}$ обращаются в нуль в бесконечности, то этим же свойством обладает и V, откуда следует, что $\text{const}=0$, а значит,

$$\overline{U}\equiv U,$$

и теорема Дирихле доказана.

Примечание. Функция U, которую мы здесь рассматривали, является функцией координат x, y, z точки P, которая может быть и притягиваемой и притягивающей, но параметры, определяющие положение и ориентацию тела, здесь суть величины *постоянные*. Когда функция U уже найдена, то обычно бывает нетрудно выразить ее явным образом и через упомянутые параметры.

Однако общие свойства силовой функции взаимного притяжения материальной частицы (материальной точки) и произвольного трехмерного тела, рассматриваемой как функция девяти независимых переменных, совершенно неизвестны.

Можно только отметить, что функция U, рассматриваемая как функция трех независимых переменных — координат ξ, η, ζ точки G, неизменно связанной с телом, также удовлет-

---

а потому

$$\left|\int\limits_{(S)}\int U\frac{\partial V}{\partial n}d\sigma\right|<\frac{A}{R}\frac{3A}{R^2}4\pi R^2=\frac{12\pi A^2}{R}.$$

Отсюда ясно, что формула Грина дает

$$\int\int\limits_{(E)}\int\left\{U\nabla V+\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right\}d\tau=0,$$

где интеграл берется по всему пространству. Это и есть формула Пуанкаре.

См. М. Ф. Субботин, Курс небесной механики, т. 3, 1949, а также H. Poincarè, Leçons sur le potèntiel Newtonien.

воряет уравнению Пуассона, если точка $P(x, y, z)$ находится внутри тела и если, конечно, плотность тела δ удовлетворяет условию Гольдера или более слабому условию, о котором шла речь выше.

Сказанное является, очевидно, следствием равенств

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2},$$

выводимых немедленно из равенств (2.3).

Итак, можем написать

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} = -4\pi f \mu \delta (x, y, z);$$

однако координаты x, y, z в этом равенстве нужно уже рассматривать как величины постоянные.

Что же касается вторых частных производных от силовой функции U по эйлеровым углам φ, ψ, ϑ, то неизвестно, существует ли уравнение, аналогичное уравнению Пуассона, связывающее эти производные!

Точно так же неизвестно, удовлетворяет ли силовая функция взаимного притяжения двух тел T_1 и T_2 какому-либо уравнению, когда эти тела имеют некоторую общую часть T.

§ 6. Формула Гаусса и теорема Стокса

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые важные дополнительные свойства силовой функции притяжения материальным трехмерным телом материальной точки. Эти новые свойства не относятся к числу характеристических, но имеют значение для некоторых приложений, особенно в гравиметрии. К ним относятся свойства, выражаемые теоремой Гаусса и вытекающими из нее следствиями, касающимися экстремальных свойств силовой функции и свойств поверхностей уровня.

Выведем сначала формулу Гаусса. Пусть в некоторой области D пространства заданы две функции U_1 и U_2, регулярные в этой области, т. е. конечные, непрерывные и однозначные в D вместе со своими частными производными первого и второго порядка.