воряет уравнению Пуассона, если точка $P(x, y, z)$ находится внутри тела и если, конечно, плотность тела δ удовлетворяет условию Гольдера или более слабому условию, о котором шла речь выше.

Сказанное является, очевидно, следствием равенств

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial z^2},$$

выводимых немедленно из равенств (2.3).

Итак, можем написать

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2}=-4\pi f \mu \delta(x, y, z);$$

однако координаты x, y, z в этом равенстве нужно уже рассматривать как величины постоянные.

Что же касается вторых частных производных от силовой функции U по эйлеровым углам φ, ψ, ϑ, то неизвестно, существует ли уравнение, аналогичное уравнению Пуассона, связывающее эти производные!

Точно так же неизвестно, удовлетворяет ли силовая функция взаимного притяжения двух тел T_1 и T_2 какому-либо уравнению, когда эти тела имеют некоторую общую часть T.

§ 6. Формула Гаусса и теорема Стокса

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые важные дополнительные свойства силовой функции притяжения материальным трехмерным телом материальной точки. Эти новые свойства не относятся к числу характеристических, но имеют значение для некоторых приложений, особенно в гравиметрии. К ним относятся свойства, выражаемые теоремой Гаусса и вытекающими из нее следствиями, касающимися экстремальных свойств силовой функции и свойств поверхностей уровня.

Выведем сначала формулу Гаусса. Пусть в некоторой области D пространства заданы две функции U_1 и U_2, регулярные в этой области, т. е. конечные, непрерывные и однозначные в D вместе со своими частными производными первого и второго порядка.

Тогда справедлива следующая формула, являющаяся следствием формулы Остроградского и называемая иногда формулой Грина *):

$$\iiint\limits_{(D)} (U_1 \nabla U_2 - U_2 \nabla U_1)\, d\tau = \iint\limits_{(\bar{S})} \left(U_1 \frac{\partial U_2}{\partial n} - U_2 \frac{\partial U_1}{\partial n} \right) d\sigma,$$

где производные $\frac{\partial U_1}{\partial n}$ и $\frac{\partial U_2}{\partial n}$ берутся по внешней нормали к поверхности $\bar{S}$, ограничивающей область D. Положим в этой формуле $U_1 = 1$ и $U_2 = U$, где U — некоторая правильная в области D функция. Тогда формула Грина примет следующий частный вид:

$$\iiint\limits_{(D)} \nabla U\, d\tau = \iint\limits_{(\bar{S})} \frac{\partial U}{\partial n}\, d\sigma. \tag{2.40}$$

Рассмотрим теперь некоторое трехмерное тело (с конечными размерами), плотность которого $\delta(M)$ непрерывна вместе со своими частными производными первого порядка, или, во всяком случае, удовлетворяет условию Гольдера.

Допустим, что некоторая область D пространства, ограниченная поверхностью $\bar{S}$, полностью содержит в себе это тело. Пусть, далее, U есть силовая функция притяжения телом T материальной точки P массы μ.

Функция U конечна, непрерывна и однозначна во всей области D вместе со своими частными производными первого порядка. Но вторые частные производные от U разрывны на поверхности S тела T и поэтому функция U не является правильной в области D, как это требуется для применения формулы (2.40). Чтобы можно было применить эту формулу, разобьем область D на две части, одна из которых есть тело T, ограниченное поверхностью S, а другая, которую обозначим через $D - T$, ограничена двумя поверхностями S и $\bar{S}$. Применяя формулу (2.40) к каждой из этих двух частей в отдельности, что, очевидно, законно, мы будем иметь

$$\iiint\limits_{(T)} \nabla U\, d\tau = \iint\limits_{(S)} \frac{\partial U}{\partial n}\, d\sigma$$

*) Полагая в формуле Грина (см. сноску на стр. 97) $U = U_1$, $V = U_2$, меняя местами эти величины и вычитая из одного равенства другое, мы и получим формулу, приведенную в тексте.

и

$$\iiint\limits_{(D-T)} \nabla U\,d\tau = \iint\limits_{(\bar{S})} \frac{\partial U}{\partial n}\,d\sigma - \iint\limits_{(S)} \frac{\partial U}{\partial n}\,d\sigma,$$

где производные берутся по внешним нормалям к поверхностям S и $\bar{S}$. Складывая эти два равенства и имея в виду, что в области T оператор Лапласа ∇U равен $-4\pi f\mu\delta$, а в области $D-T$ он равен нулю, мы получим

$$-4\pi f\mu \iiint\limits_{(T)} \delta\,d\tau = \iint\limits_{(\bar{S})} \frac{\partial U}{\partial n}\,d\sigma.$$

Интеграл, стоящий в левой части равенства, равен полной массе m притягивающего тела T, и мы находим окончательно

$$\iint\limits_{(\bar{S})} \frac{\partial U}{\partial n}\,d\sigma = -4\pi f\mu m. \tag{2.41}$$

Эта формула и называется *формулой Гаусса*.

Из формулы (2.41) легко вывести экстремальное свойство силовой функции, которое можно сформулировать следующим образом.

Принцип максимума. *Силовая функция трехмерного тела, рассматриваемая как функция координат притягиваемой точки, не может иметь минимума внутри притягивающей массы, но может иметь максимум.*

Действительно, допустим, что силовая функция U тела T имеет минимум в некоторой внутренней точке тела P. Вообразим сферу Σ с центром в точке P, настолько малого радиуса, чтобы вся сфера целиком находилась внутри тела T. Применяя к сфере Σ формулу (2.41), мы получим

$$\iint\limits_{(\Sigma)} \frac{\partial U}{\partial n}\,d\sigma = -4\pi f\mu\bar{m},$$

где $\bar{m}$ — масса, заключенная внутри сферы.

Если, как это предположено, функция U имеет в точке P минимум, то в силу этого значения функции U вблизи точки P на всяком луче, выходящем из этой точки, будут больше, чем значение функции в самой точке P. Поэтому мы можем найти сферу Σ', лежащую внутри сферы Σ и столь малого радиуса, что во всех точках поверхности этой сферы производная $\frac{\partial U}{\partial n}$, взятая по направлению от точки P, будет положительной. Поэтому левая часть формулы (2.41), примененной к сфере Σ', будет положительной, что приводит к противоречию, ибо правая часть равенства заведомо отрицательна.

Таким образом, первая часть высказанного свойства доказана.

Что силовая функция трехмерного тела может иметь максимум внутри тела, показывает рассмотренный с § 4 этой главы пример силовой функции однородного шара. Легко видеть, что эта силовая функция имеет максимум в центре шара.

Второе экстремальное свойство силовой функции относится к внешнему пространству и формулируется так:

П р и н ц и п э к с т р е м у м а. *Вне притягивающей массы силовая функция трехмерного тела не может иметь ни максимума, ни минимума.*

Это свойство силовой функции является следствием того, что вне притягивающих масс эта функция является гармонической *), но может быть доказано непосредственно, совершенно так же, как и принцип максимума. Действительно, пусть P — какая угодно внешняя точка по отношению к телу T. Вообразим опять сферу Σ с центром в P и достаточно малого радиуса. Так как во всем внешнем пространстве $\nabla U = 0$, то, применяя формулу (2.40) к сфере Σ, мы найдем

$$\iint\limits_{(\Sigma)} \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma = 0.$$

Допустим теперь, что в точке P функция U имеет максимум (минимум). Тогда во всех точках поверхности Σ мы будем иметь $\frac{\partial U}{\partial n} < 0 \left(\frac{\partial U}{\partial n} > 0\right)$, а значит, интеграл в левой части последнего равенства есть величина существенно отрицательная (положительная), чего не может быть в силу самого этого равенства.

*) См., например, Л. Н. С р е т е н с к и й, Теория ньютоновского потенциала, Гостехиздат, 1946.

Полученное противоречие доказывает, что ни в какой внешней точке пространства силовая функция U не может иметь экстремум.

Применим теперь формулу Гаусса (2.41) для доказательства теоремы, называемой иногда *теоремой Стокса.*

Пусть T — притягивающее тело, плотность которого δ удовлетворяет тем же условиям, что и раньше.

Рассмотрим семейство поверхностей уровня

$$U(x, y, z) = C = \text{const},$$

и пусть $\overline{S}$ — одна из этих поверхностей, заключающая внутри себя всю притягивающую массу m.

Предположим, что притягивающую материю можно перераспределить таким образом, что масса ее при этом не изменится и что поверхность $\overline{S}$ по-прежнему останется поверхностью уровня. Пусть T' есть тело, образованное перераспределенной материей. Ясно, что тело T' отличается от тела T либо формой, либо по структуре, а поэтому силовая функция тела T' также будет, вообще говоря, отличаться от силовой функции тела T.

Пусть U' есть новая силовая функция тела T'. Тогда уравнение поверхности $\overline{S}$ мы можем написать также в виде

$$U'(x, y, z) = C' = \text{const}.$$

Рассмотрим теперь функцию

$$V = U' - U.$$

Вне поверхности $\overline{S}$, как легко видеть,

$$\nabla V = 0,$$

а на поверхности $\overline{S}$

$$V = C' - C = \text{const}.$$

С другой стороны, по формуле Гаусса (2.41) мы имеем

$$\iint\limits_{(\overline{S})} \frac{\partial U}{\partial n}\, d\sigma = -4\pi f \mu m$$

и точно так же для тела T'

$$\iint\limits_{(\overline{S})} \frac{\partial U'}{\partial n}\, d\sigma = -4\pi f \mu m;$$

поэтому

$$\iint\limits_{(\overline{S})} \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = 0.$$

Докажем теперь, что функция V тождественно равна нулю во всем пространстве, внешнем по отношению к поверхности $\overline{S}$.

Для этого рассмотрим область $\overline{E}$, заключающуюся между поверхностью $\overline{S}$ и поверхностью сферы $\overline{\Sigma}$ настолько большого радиуса R, что вся поверхность $\overline{S}$ заведомо лежит внутри этой сферы. Применяя к функции V, регулярной в области $\overline{E}$, формулу Грина (см. сноску на стр. 97), мы можем написать, полагая $U = V$:

$$\iiint\limits_{(\overline{E})} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z'}\right)^2\right] d\tau + \\ + \iint\limits_{(\overline{S})} V \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma + \iint\limits_{(\overline{\Sigma})} V \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = 0.$$

Так как на $\overline{S}$ функция V равна постоянной величине, то второй интеграл равен нулю. Рассмотрим третий интеграл. Так как и U и U' регулярны на бесконечности, то можно указать такие две положительные постоянные, что при достаточно большом R будем иметь неравенства

$$|V| < \frac{A}{R}, \quad \left|\frac{\partial V}{\partial n}\right| < \frac{B}{R^2}.$$

Следовательно,

$$\left|\iint\limits_{(\overline{\Sigma})} V \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma\right| < \frac{AB}{R^3} \iint\limits_{(\overline{\Sigma})} d\sigma = \frac{4\pi AB}{R},$$

что стремится к нулю при $R \to \infty$. Поэтому, переходя к пределу при $R \to \infty$ и обозначая через E все пространство, внешнее по отношению к поверхности $\overline{S}$, мы получим

$$\iiint\limits_{(E)} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z'}\right)^2\right] d\tau = 0,$$

откуда следует, что во всякой точке E должны выполняться условия

$$\frac{\partial V}{\partial x'} = \frac{\partial V}{\partial y'} = \frac{\partial V}{\partial z'} = 0.$$

Таким образом,

$$V = \text{const}$$

во всех точках области E. Так как, очевидно, V равна нулю в бесконечности, то эта постоянная есть нуль, и мы находим

$$V = U' - U \equiv 0,$$

откуда

$$U' \equiv U,$$

что и позволяет нам сформулировать следующую теорему:

Теорема Стокса. *Если некоторая поверхность уровня $\bar{S}$ заключает внутри себя всю притягивающую материю, то при всяком перераспределении этой материи, при котором величина ее массы остается неизменной, а поверхность $\bar{S}$ остается поверхностью уровня, силовая функция притягивающей массы во внешнем относительно поверхности $\bar{S}$ пространстве также остается без изменения.*

Иллюстрацией этой теоремы может служить силовая функция однородного шара, для которой поверхности уровня суть сферы, центр которых совпадает с центром шара. Если взять какую-либо из этих сфер, заключающую внутри себя шар, то при любом изменении размеров и плотности шара, при которых его масса остается неизменной, поверхность уровня по-прежнему остается той же сферой. Можно даже сосредоточить всю массу шара в его центре, т. е. превратить шар в материальную точку той же массы.

Это показывает, что если мы знаем силовую функцию вне поверхности уровня, то не можем сказать ничего определенного ни о форме притягивающего тела, ни о его внутреннем строении.