ГЛАВА III

ПРИТЯЖЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ПРОСТЕЙШИХ ТЕЛ

Эту главу мы посвящаем расчетам силы притяжения некоторых простейших тел. Примеры, которые мы будем здесь рассматривать, имеют главным образом приложения в области астрономии и геофизики, а в частности — в небесной механике и гравиметрии. Однако некоторые из этих примеров могут иметь и более широкие приложения.

Во всех рассматриваемых здесь примерах мы даем выражение силовой функции притяжения в конечном виде, а также выражения для составляющих силы притяжения на некоторые три взаимно перпендикулярных направления. Как мы увидим, эти величины только в исключительных случаях выражаются через элементарные функции, а в большинстве случаев, даже для очень простых, однородных, тел, мы приходим к квадратурам, не вычисляемым в известных функциях.

Для нахождения силовой функции мы используем здесь различные приемы. Так иногда мы пользуемся способом непосредственного вычисления силовой функции как интеграла, в других случаях мы получаем силовую функцию с помощью характеристических свойств.

Случаи, которые здесь разбираются, относятся и к одномерным материальным телам (материальным линиям), и к двумерным (материальным поверхностям (простые слои)), и к трехмерным телам (т. е. к телам в собственном смысле этого слова).

Для облегчения и большей простоты выкладок мы в каждом отдельном примере выбираем наиболее удобную систему координат (прямоугольных декартовых, цилиндрических или полярных), к которой и относим силовую функцию и составляющие силы притяжения. Если понадобится иметь эти выражения в какой-либо другой системе координат, то они могут быть получены из найденных при помощи формул преобразования координат. Впрочем, иногда мы получаем выражения для силовой функции, не зависящие вообще от выбора координатной системы.

§ 1. Притяжение материального гауссова кольца

В способе Гаусса вычисления вековых возмущений планет определение составляющих возмущающей силы приводится к нахождению составляющих силы притяжения одномерного материального эллиптического кольца, линейная плотность которого меняется по некоторому закону.

Представим себе одну из планет солнечной системы, например Юпитер, двигающуюся вокруг Солнца по эллиптической орбите в согласии с законами Кеплера, и какую-нибудь малую планету или комету, двигающуюся под действием притяжений Солнца и Юпитера.

Как показал Гаусс, определение вековых возмущений, вызываемых Юпитером в движении астероида, может быть получено без большого труда, если притяжение Юпитера, двигающегося по своей орбите, заменить притяжением эллиптического кольца, которое получится, если всю массу Юпитера распределить некоторым специальным образом по его орбите *).

А именно, массу m Юпитера нужно распределить по его орбите так, чтобы на каждый линейный элемент ds приходилась элементарная масса dm, пропорциональная тому промежутку времени dt, в течение которого Юпитер проходит путь ds. Тогда, если T обозначает период обращения Юпитера, то мы имеем пропорцию

$$\frac{dm}{m}=\frac{dt}{T}.$$

Пусть ρ' — радиус-вектор Юпитера и v' — его истинная аномалия. Обозначим через a большую полуось орбиты Юпитера, через e — эксцентриситет этой орбиты и через n — среднее суточное движение планеты; тогда

$$\rho'^2\,dv'=na^2\sqrt{1-e^2}\,dt.$$

---

*) См. М. Ф. Субботин, Курс небесной механики, т. 2, 1937.

При помощи этой формулы притягивающий элемент массы dm, сосредоточенный в точке M эллипса с орбитальными координатами ρ', v', определится так:

$$dm = \frac{m\rho'^2\,dv}{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}. \tag{3.1}$$

Составим теперь выражение для силовой функции этого материального, эллиптического кольца, которое и называется в небесной механике *кольцом Гаусса.*

Возьмем цилиндрическую систему координат с началом O в том фокусе эллипса, в котором находится Солнце. Ось абсцисс направим в перигелий орбиты, а ось аппликат — перпендикулярно к плоскости орбиты. Тогда силовая функция притяжения гауссовым кольцом материальной точки P массы μ определится следующей формулой:

$$U(P) = \frac{f\mu m}{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}\int_0^{2\pi}\frac{\rho'^2\,dv'}{\Delta}, \tag{3.2}$$

где

$$\Delta^2 = z^2 + \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos(v - v'),$$

а ρ' определяется из уравнения эллиптической орбиты

$$\rho' = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v'}.$$

Если для точки P взять обычные прямоугольные координаты (в той же системе осей), то будем иметь

$$\Delta^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2x\rho'\cos v' - 2y\rho'\sin v' + \rho'^2.$$

Поэтому составляющие силы притяжения, действующей на точку P (астероид!), определятся формулами

$$\left.\begin{aligned}
X &= \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{f\mu m}{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}\int_0^{2\pi}\frac{\rho'^2(x-\rho'\cos v')\,dv'}{\Delta^3},\\
Y &= \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{f\mu m}{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}\int_0^{2\pi}\frac{\rho'^2(y-\rho'\sin v')\,dv'}{\Delta^3},\\
Z &= \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{f\mu m}{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}\int_0^{2\pi}\frac{\rho'^2 z\,dv'}{\Delta^3}.
\end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

Функция U не может быть выражена ни в элементарных, ни в известных трансцендентных функциях. Однако составляющие силы притяжения X, Y, Z можно выразить через эллиптические функции, но так как эти формулы чрезвычайно громоздки и неудобны для пользования, то мы их приводить не будем *).

Рассмотрим теперь более подробно тот частный случай, когда орбита возмущающей планеты есть окружность, т. е. когда соответствующее кольцо Гаусса есть однородное круглое кольцо.

В этом случае $e=0$, $\rho'=a$ и, по соображениям симметрии, силовая функция U не может зависеть от полярного угла v. Поэтому формула (3.2) примет для этого частного случая следующий вид:

$$U(P)=\frac{f\mu m}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\gamma}{\Delta}, \tag{3.4}$$

где

$$\Delta^2=z^2+\rho^2+a^2-2a\rho\cos\gamma, \qquad \gamma=v-v'.$$

Простые преобразования переменной интегрирования позволяют привести выражение для силовой функции кольца к виду

$$U(P)=\frac{2f\mu m}{\pi\sqrt{z^2+(\rho+a)^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}}, \tag{3.5}$$

где положено

$$\varkappa^2=\frac{4a\rho}{z^2+(\rho+a)^2}.$$

Интеграл в формуле (3.5) есть полный эллиптический интеграл первого рода с модулем $\varkappa$. Обозначая, как принято,

$$K(\varkappa)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}},$$

запишем U в виде

$$U(P)=\frac{2f\mu m}{\pi}\,\frac{K(\varkappa)}{\sqrt{z^2+(\rho+a)^2}}.$$

*) Вывод этих формул можно найти в известном трактате Тиссерана.

Мы уже знаем, что силовая функция материальной линии неограниченно растет, когда притягиваемая точка приближается к этой линии. Представляет интерес уточнить характер этого роста для силовой функции кольца Гаусса. Для этого заметим прежде всего, что когда точка P стремится по какому-либо пути к некоторой точке M_0 кольца, то $z \to 0$, $\rho \to a$ и, значит, модуль эллиптического интеграла $\varkappa \to 1$. Чтобы определить характер поведения функции $K(\varkappa)$ при $\varkappa \to 1$, представим ее в следующем виде:

$$K(\varkappa) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}}\, d\varphi.$$

Первый из этих двух интегралов легко вычисляется:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-\varkappa^2+\varkappa^2 t^2}} = \frac{1}{\varkappa}\ln\frac{1+\varkappa}{\sqrt{1-\varkappa^2}}.$$

Второй интеграл, который обозначим для сокращения через $\overline{K}(\varkappa)$, имеет, как легко проверить, при $\varkappa = 1$ значение, равное $\ln 2$. Поэтому можем написать

$$K(\varkappa) = \frac{1}{\varkappa}\ln\frac{1+\varkappa}{\sqrt{1-\varkappa^2}} + \overline{K}(\varkappa)$$

и

$$\lim_{\varkappa\to 1}\left\{K(\varkappa) - \frac{1}{\varkappa}\ln\frac{1+\varkappa}{\sqrt{1-\varkappa^2}}\right\} = \lim_{\varkappa\to 1}\overline{K}(\varkappa) = \ln 2.$$

Таким образом, действительно, интеграл $K(\varkappa)$, а следовательно, и функция U неограниченно растут, и быстрота этого роста такая же, как для логарифма. Отсюда следует, что пользоваться формулой (3.5) можно только тогда, когда возмущаемая планета не подходит очень близко к орбите возмущающей планеты.

Найдем теперь составляющие силы притяжения кольца, действующей на точку P. Непосредственное дифференцирование выражения (3.5) дает

$$\frac{\partial U}{\partial\rho} = \frac{2f\mu m}{\pi}\left\{\frac{-(\rho+a)K(\varkappa)}{[z^2+(\rho+a)^2]^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2+(\rho+a)^2}}\frac{dK}{d\varkappa^2}\frac{\partial\varkappa^2}{\partial\rho}\right\}$$

и

$$\frac{\partial U}{\partial z}=\frac{2f\mu m}{\pi}\left\{\frac{-zK(\varkappa)}{[z^2+(\rho+a)^2]^{3/2}}+\frac{1}{\sqrt{z^2+(\rho+a)^2}}\frac{dK}{d\varkappa^2}\frac{\partial\varkappa^2}{\partial z}\right\}.$$

Но как известно

$$\frac{dK}{d\varkappa^2}=\frac{1}{2\varkappa^2}\left[\frac{E(\varkappa)}{1-\varkappa^2}-K(\varkappa)\right],$$

где $E(\varkappa)$ обозначает полный эллиптический интеграл второго рода

$$E(\varkappa)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

Кроме того, находим

$$\frac{\partial\varkappa^2}{\partial\rho}=\frac{\varkappa^2}{\rho}\,\frac{z^2+a^2-\rho^2}{z^2+(\rho+a)^2},\qquad \frac{\partial\varkappa^2}{\partial z}=\frac{-2\varkappa^2 z}{z^2+(\rho+a)^2}.$$

Таким образом, получим окончательно, что

$$\frac{\partial U}{\partial\rho}=\frac{f\mu m}{\pi\rho\sqrt{z^2+(\rho+a)^2}}\left[\frac{z^2+a^2-\rho^2}{z^2+(\rho-a)^2}E(\varkappa)-K(\varkappa)\right] \tag{3.6}$$

и

$$Z=\frac{\partial U}{\partial z}=-\frac{2f\mu mz\,[z^2+(\rho-a)^2]}{[z^2+(\rho+a)^2]^{5/2}}E(\varkappa). \tag{3.7}$$

Наконец, составляющие силы притяжения по осям Ox и Oy найдутся по формулам

$$X=\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{x}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\rho},\qquad Y=\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{y}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\rho}.$$

Полученные формулы несколько упрощаются для случая, когда возмущаемая малая планета постоянно находится в плоскости возмущающей большой планеты. Действительно, тогда

$$z=0,\quad Z\equiv 0,\quad \varkappa^2=\frac{4a\rho}{(\rho+a)^2}$$

и формулы (3.5) и (3.6) примут вид

$$U=\frac{2f\mu m}{\pi(\rho+a)}K(\varkappa), \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial U}{\partial\rho}=-\frac{f\mu m}{\pi\rho(\rho^2-a^2)}[(\rho+a)E(\varkappa)+(\rho-a)K(\varkappa)], \tag{3.9}$$

которые можно еще более упростить, если применить к полным эллиптическим интегралам $K(\varkappa)$ и $E(\varkappa)$ преобразование Ландена. В самом деле, если положить

$$\varkappa^2 = \frac{4k}{(1+k)^2},$$

где k — новый модуль, то имеем следующие формулы Ландена:

$$K(\varkappa) = (1+k)\,K(k)$$

и

$$E(\varkappa) = \frac{2E(k) - (1-k^2)\,K(k)}{1+k},$$

с помощью которых получим немедленно для $\rho < a$

$$\left.\begin{aligned} U(\rho) &= \frac{2f\mu m}{\pi a} K\left(\frac{\rho}{a}\right), \\ \frac{dU(\rho)}{d\rho} &= -\frac{2f\mu m}{\pi a\rho\,(\rho^2 - a^2)}\left[a^2 E\left(\frac{\rho}{a}\right) + (\rho^2 - a^2)\,K\left(\frac{\rho}{a}\right)\right], \end{aligned}\right\} \quad (3.10)$$

и для $\rho > a$

$$\left.\begin{aligned} U(\rho) &= \frac{2f\mu m}{\pi\rho} K\left(\frac{a}{\rho}\right), \\ \frac{dU(\rho)}{d\rho} &= -\frac{2f\mu m}{\pi\,(\rho^2 - a^2)} E\left(\frac{a}{\rho}\right). \end{aligned}\right\} \quad (3.11)$$

Заметим еще, что полученные выражения можно без особого труда преобразовать, в случае надобности, к произвольной системе координат. Выпишем здесь эти формулы преобразования. Пусть в произвольно заданной системе прямоугольных декартовых координат ξ, η, ζ суть координаты центра кольца, в котором находится начало старой системы, а φ, ψ, ϑ — углы Эйлера, определяющие ориентацию плоскости кольца в новой системе осей. Если тогда ξ', η', ζ' суть координаты притягиваемой точки P в старой системе, а x, y, z — в новой, произвольно выбранной, то из формул (1.26) имеем

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= a_{11}(x-\xi) + a_{21}(y-\eta) + a_{31}(z-\zeta), \\ \eta' &= a_{12}(x-\xi) + a_{22}(y-\eta) + a_{32}(z-\zeta), \\ \zeta' &= a_{13}(x-\xi) + a_{23}(y-\eta) + a_{33}(z-\zeta), \end{aligned}\right\} \quad (3.12)$$

причем направляющие косинусы a_{ik} определяются опять формулами (1.27).

Составляя затем выражение для $\rho' = \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}$ и заменяя в выражении силовой функции U старые координаты их выражениями по формулам (3.12), мы и найдем общее выражение для U, которое будет еще содержать координаты центра кольца и эйлеровы углы.

Вследствие этого полученное выражение для U даст нам силовую функцию взаимного притяжения кольца Гаусса и материальной точки P.

Дифференцируя затем эту силовую функцию по координатам точки P, мы получим составляющие силы притяжения кольца, действующей на эту точку. Подобным же образом, дифференцируя U по координатам центра кольца и по эйлеровым углам, получим составляющие силы притяжения точки, действующей на кольцо и приложенной к его центру, а также составляющие момента этой силы.

§ 2. Силовая функция притяжения двумерного круглого кольца

Мы уже отмечали выше, что в некоторых случаях притяжение трехмерного тела, одно из измерений которого (толщина) весьма мало по сравнению с двумя другими, возможно заменить притяжением простого слоя, лежащего на некоторой поверхности.

Для приложений в астрономии и геофизике особенно интересен случай однородного простого слоя, лежащего на круглом кольце конечной ширины или на круглом диске *).

Поэтому представляет интерес рассмотреть силовую функцию подобного простого слоя, чтобы выяснить, насколько далеко возможно провести вычисление двойного интеграла и в каких функциях выражаются квадратуры, остающиеся невыполнимыми.

Рассмотрим сначала силовую функцию однородного круглого диска радиуса a и массы m. Возьмем систему координат с началом в центре диска и осью аппликат, перпендикулярной к его плоскости.

Если δ есть поверхностная плотность диска, то

$$m = \pi a^2 \delta,$$

*) См. работы Г. Н. Дубошина по теории движения спутников Сатурна, напечатанные в т. XV, кн. I, трудов ГАИШ за 1945 г.