Составляя затем выражение для $\rho' = \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}$ и заменяя в выражении силовой функции U старые координаты их выражениями по формулам (3.12), мы и найдем общее выражение для U, которое будет еще содержать координаты центра кольца и эйлеровы углы.

Вследствие этого полученное выражение для U даст нам силовую функцию взаимного притяжения кольца Гаусса и материальной точки P.

Дифференцируя затем эту силовую функцию по координатам точки P, мы получим составляющие силы притяжения кольца, действующей на эту точку. Подобным же образом, дифференцируя U по координатам центра кольца и по эйлеровым углам, получим составляющие силы притяжения точки, действующей на кольцо и приложенной к его центру, а также составляющие момента этой силы.

§ 2. Силовая функция притяжения двумерного круглого кольца

Мы уже отмечали выше, что в некоторых случаях притяжение трехмерного тела, одно из измерений которого (толщина) весьма мало по сравнению с двумя другими, возможно заменить притяжением простого слоя, лежащего на некоторой поверхности.

Для приложений в астрономии и геофизике особенно интересен случай однородного простого слоя, лежащего на круглом кольце конечной ширины или на круглом диске *).

Поэтому представляет интерес рассмотреть силовую функцию подобного простого слоя, чтобы выяснить, насколько далеко возможно провести вычисление двойного интеграла и в каких функциях выражаются квадратуры, остающиеся невыполнимыми.

Рассмотрим сначала силовую функцию однородного круглого диска радиуса a и массы m. Возьмем систему координат с началом в центре диска и осью аппликат, перпендикулярной к его плоскости.

Если δ есть поверхностная плотность диска, то

$$m = \pi a^2 \delta,$$

*) См. работы Г. Н. Дубошина по теории движения спутников Сатурна, напечатанные в т. XV, кн. I, трудов ГАИШ за 1945 г.

и силовая функция притяжения диском материальной точки P с массой μ напишется в виде

$$U(P)=\frac{f\mu m}{\pi a^2}\iint\limits_{(S)}\frac{d\sigma}{\Delta}, \tag{3.13}$$

где интеграл берется по всей площади диска.

Пусть по-прежнему координаты притягиваемой точки будут x, y, z; положим, кроме того,

$$\rho^2=x^2+y^2, \quad r^2=x^2+y^2+z^2=\rho^2+z^2.$$

Пусть, далее, ρ' есть радиус-вектор текущей точки M диска и γ — угол между этим радиусом-вектором и проекцией ρ радиуса-вектора притягиваемой точки на плоскость диска. Тогда

$$d\sigma=\rho'\,d\rho'\,d\gamma, \quad \Delta^2=r^2+\rho^2-2\rho\rho'\cos\gamma$$

и силовая функция

$$U(P)=\frac{2f\mu m}{\pi a^2}\int\limits_0^{\pi}d\gamma\int\limits_0^{a}\frac{\rho'\,d\rho'}{\Delta}.$$

Обозначим для сокращения интеграл, стоящий в правой части последней формулы, через $\overline{U}$ и покажем, что этот интеграл приводится к однократному и может быть выражен через полные эллиптические интегралы $K(\varkappa)$, $E(\varkappa)$ и $\Pi(\varkappa, n)$, где

$$\Pi(\varkappa, n)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}}$$

есть полный эллиптический интеграл третьего рода с модулем $\varkappa$ и параметром n.

Действительно, выполняя интегрирование по ρ', мы имеем

$$\overline{U}=-\pi r+\overline{U}_0-\rho\overline{U}_1+\rho\overline{U}_2, \tag{3.14}$$

где положено

$$\bar{U}_0 = \int_0^\pi \sqrt{r^2 + a^2 - 2a\rho\cos\gamma}\, d\gamma,$$

$$\bar{U}_1 = \int_0^\pi \cos\gamma \ln(r - \rho\cos\gamma)\, d\gamma,$$

$$\bar{U}_2 = \int_0^\pi \cos\gamma \ln\left[a - \rho\cos\gamma + \sqrt{r^2 + a^2 - 2a\rho\cos\gamma}\right] d\gamma.$$

Займемся теперь преобразованиями этих трех интегралов Полагая, как и в предыдущем параграфе,

$$\varkappa^2 = \frac{4a\rho}{z^2 + (\rho + a)^2}, \tag{3.15}$$

мы имеем прежде всего, как легко видеть,

$$\bar{U}_0 = 2\sqrt{z^2 + (\rho + a)^2}\, E(\varkappa). \tag{3.16}$$

Интеграл $\bar{U}_1$ вычисляется элементарно. Действительно, интегрируя по частям, имеем

$$\bar{U}_1 = -\rho \int_0^\pi \frac{\sin^2\gamma\, d\gamma}{r - \rho\cos\gamma},$$

откуда, выполняя интегрирование, найдем

$$\bar{U}_1 = -\frac{\pi}{\rho}\left(r - \sqrt{r^2 - \rho^2}\right). \tag{3.17}$$

Наконец, рассмотрим интеграл $\bar{U}_2$. После интегрирования по частям и несложного преобразования имеем

$$\bar{U}_2 = \rho \int_0^\pi \frac{(a\rho\cos\gamma - r^2)\sin^2\gamma\, d\gamma}{(r^2 - \rho^2\cos^2\gamma)\sqrt{r^2 + a^2 - 2a\rho\cos\gamma}} - \rho^2 \int_0^\pi \frac{\sin^2\gamma\cos\gamma\, d\gamma}{r^2 - \rho^2\cos^2\gamma}.$$

Последний интеграл, как нетрудно видеть, равен нулю, а оставшийся можно представить в следующем виде:

$$\overline{U}_2=\frac{1}{\rho}\int\limits_0^\pi \frac{(a\rho\cos\gamma-r^2)\,d\gamma}{\sqrt{r^2+a^2-2a\rho\cos\gamma}}-$$
$$-\frac{r^2-\rho^2}{\rho}\int\limits_0^\pi \frac{(a\rho\cos\gamma-r^2)\,d\gamma}{(r^2-\rho^2\cos^2\gamma)\sqrt{r^2+a^2-2a\rho\cos\gamma}}. \quad (3.18)$$

Первый из интегралов в формуле (3.18) приводится несложными преобразованиями к интегралам $K(\varkappa)$ и $E(\varkappa)$, модуль которых определяется формулой (3.15),

$$\frac{1}{\rho}\int\limits_0^\pi \frac{(a\rho\cos\gamma-r^2)\,d\gamma}{\sqrt{r^2+a^2-2a\rho\cos\gamma}}=$$
$$=-\frac{r^2-a^2}{\rho\sqrt{z^2+(\rho+a)^2}}K(\varkappa)-\frac{\sqrt{z^2+(\rho+a)^2}}{\rho}E(\varkappa).$$

Остается рассмотреть второй интеграл в формуле (3.18). Обозначая его для сокращения через $\overline{U}_2'$, мы имеем

$$\overline{U}_2'=\frac{1}{2r}\int\limits_0^\pi \frac{(a\rho\cos\gamma-r^2)\,d\gamma}{(r-\rho\cos\gamma)\sqrt{r^2+a^2-2a\rho\cos\gamma}}+$$
$$+\frac{1}{2r}\int\limits_0^\pi \frac{(a\rho\cos\gamma-r^2)\,d\gamma}{(r+\rho\cos\gamma)\sqrt{r^2+a^2-2a\rho\cos\gamma}}=$$
$$=\frac{a-r}{2}\int\limits_0^\pi \frac{d\gamma}{(r-\rho\cos\gamma)\sqrt{r^2+a^2-2a\rho\cos\gamma}}-$$
$$-\frac{a+r}{2}\int\limits_0^\pi \frac{d\gamma}{(r+\rho\cos\gamma)\sqrt{r^2+a^2-2a\rho\cos\gamma}},$$

откуда, полагая еще

$$n=\frac{2\rho}{r+\rho},\quad n'=\frac{2\rho}{r-\rho},$$

получим

$$\overline{U}_2'=-\frac{(r-a)(r-\rho)\,\Pi(\varkappa,-n)+(r+a)(r+\rho)\,\Pi(\varkappa,n')}{(r^2-\rho^2)\sqrt{z^2+(\rho+a)^2}}.$$

Подставляя теперь найденные выражения в формулу (3.18), а затем выражения для $\overline{U}_0$, $\overline{U}_1$, $\overline{U}_2$ в формулу (3.14), мы можем записать силовую функцию диска в виде

$$U(P)=\frac{2f\mu m}{\pi a^2}\left\{-\pi\sqrt{r^2-\rho^2}+\sqrt{z^2+(\rho+a)^2}\,E(\varkappa)-\right.$$
$$-\frac{r^2-a^2}{\sqrt{z^2+(\rho+a)^2}}K(\varkappa)+\frac{(r-a)(r-\rho)}{\sqrt{z^2+(\rho+a)^2}}\Pi(\varkappa,\,-n)+$$
$$\left.+\frac{(r+a)(r+\rho)}{\sqrt{z^2+(\rho+a)^2}}\Pi(\varkappa,\,n')\right\}. \qquad (3.19)$$

Теперь нетрудно без всяких дополнительных вычислений получить силовую функцию однородного круглого кольца, ограниченного двумя концентрическими окружностями с радиусами a_1 и $a_2 > a_1$. Для этого достаточно заметить, что силовая функция подобного кольца есть разность между силовой функцией диска радиуса a_2 и силовой функцией диска радиуса a_1. Поэтому силовая функция кольца

$$U(P)=\frac{2f\mu m}{\pi\left(a_2^2-a_1^2\right)}\left\{\sqrt{z^2+(\rho+a_2)^2}\,E(\varkappa_2)-\right.$$
$$-\sqrt{z^2+(\rho+a_1)^2}\,E(\varkappa_1)-\frac{r^2-a_2^2}{\sqrt{z^2+(\rho+a_2)^2}}K(\varkappa_2)+$$
$$+\frac{r^2-a_1^2}{\sqrt{z^2+(\rho+a_1)^2}}K(\varkappa_1)+\frac{(r-a_2)(r-\rho)}{\sqrt{z^2+(\rho+a_2)^2}}\Pi(\varkappa_2,\,-n)-$$
$$-\frac{(r-a_1)(r-\rho)}{\sqrt{z^2+(\rho+a_1)^2}}\Pi(\varkappa_1,\,-n)+\frac{(r+a_2(r+\rho)}{\sqrt{z^2+(\rho+a_2)^2}}\Pi(\varkappa_2,\,n')-$$
$$\left.-\frac{(r+a_1)(r+\rho)}{\sqrt{z^2+(\rho+a_1)^2}}\Pi(\varkappa_1,\,n')\right\}, \qquad (3.20)$$

где m есть масса кольца, а

$$\varkappa_1^2=\frac{4\rho a_1}{z^2+(\rho+a_1)^2},\qquad \varkappa_2^2=\frac{4\rho a_2}{z^2+(\rho+a_2)^2}.$$

Легко проверить, что при $a_1=0$, $a_2=a$ формула (3.20) превращается опять в формулу (3.19). С другой стороны, переходя в формуле (3.20) к пределу при $a_2\to a_1$ и заменяя затем a_1 на a, мы получим формулу (3.5) для силовой функции кольца Гаусса.

Наоборот, соответствующим интегрированием можно из формулы (3.5) получить вновь формулы (3.19) и (3.20).

Формулы (3.19) и (3.20) справедливы при любом положении притягиваемой точки. Если точка P лежит в плоскости диска или кольца, то выражения для силовых функций значительно упрощаются. Действительно, тогда $z=0$, а следовательно, $r=\rho$, $n=1$, $n'=\infty$, $\Pi(\varkappa, n')=0$, и мы получим для диска

$$U(P)=\frac{2f\mu m}{\pi a^2}[(\rho+a)E(\varkappa)-(\rho-a)K(\varkappa)], \qquad (3.19')$$

где

$$\varkappa^2=\frac{4a\rho}{(\rho+a)^2},$$

и для кольца

$$U(P)=\frac{2f\mu m}{\pi\left(a_2^2-a_1^2\right)}\{(\rho+a_2)E(\varkappa_2)-(\rho-a_2)K(\varkappa_2)-$$
$$-(\rho+a_1)E(\varkappa_1)+(\rho-a_1)K(\varkappa_1)\}, \qquad (3.20')$$

где

$$\varkappa_1^2=\frac{4\rho a_1}{(\rho+a_1)^2}, \qquad \varkappa_2^2=\frac{4\rho a_2}{(\rho+a_2)^2}.$$

Формулы (3.19) и (3.20) остаются справедливыми и тогда, когда точка P составляет часть массы диска или кольца, и дают конечные значения соответствующих силовых функций.

Заметим еще, что последние формулы можно еще упростить, применяя преобразование Ландена, о котором упомянуто выше.

Выполняя это преобразование, получим:

для диска при $\rho\leqslant a$

$$U(P)=\frac{4f\mu m}{\pi a}\left[E\left(\frac{\rho}{a}\right)-\left(1-\frac{\rho^2}{a^2}\right)K\left(\frac{\rho}{a}\right)\right];$$

для диска при $\rho\geqslant a$

$$U(P)=\frac{4f\mu m\rho}{\pi a^2}\left[E\left(\frac{a}{\rho}\right)-\left(1-\frac{a^2}{\rho^2}\right)K\left(\frac{a}{\rho}\right)\right];$$

для кольца при $\rho\leqslant a_1$

$$U(P)=\frac{4f\mu m}{\pi\left(a_2^2-a_1^2\right)}\left\{a_2\left[E\left(\frac{\rho}{a_2}\right)-\left(1-\frac{\rho^2}{a_2^2}\right)K\left(\frac{\rho}{a_2}\right)\right]-\right.$$
$$\left.-a_1\left[E\left(\frac{\rho}{a_1}\right)-\left(1-\frac{\rho^2}{a_1^2}\right)K\left(\frac{\rho}{a_1}\right)\right]\right\};$$

для кольца при $\rho \geqslant a_2$

$$U(P)=\frac{4f\mu m\rho}{\pi\left(a_2^2-a_1^2\right)}\left\{E\left(\frac{a_2}{\rho}\right)-\left(1-\frac{a_2^2}{\rho^2}\right)K\left(\frac{a_2}{\rho}\right)-\right.$$
$$\left.-E\left(\frac{a_1}{\rho}\right)+\left(1-\frac{a_1^2}{\rho^2}\right)K\left(\frac{a_1}{\rho}\right)\right\};$$

для кольца при $a_1 \leqslant \rho \leqslant a_2$

$$U(P)=\frac{4f\mu m}{\pi}\left\{\frac{\rho\left[1-E\left(\frac{a_1}{\rho}\right)\right]}{\rho^2-a_1^2}+\frac{a_2E\left(\frac{\rho}{a_2}\right)-\rho}{a_2^2-\rho^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\rho}K\left(\frac{a_1}{\rho}\right)-\frac{1}{a_2}K\left(\frac{\rho}{a_2}\right)\right\}.$$

Рассмотрим теперь вкратце случай, когда поверхностная плотность диска или кольца есть некоторая, интегрируемая в промежутке (a_1, a_2), функция расстояния от центра ρ'.

Тогда основное выражение для силовой функции удобнее записать следующим образом:

$$U(P)=2f\mu\int_{a_1}^{a_2}\delta(\rho')\rho'\,d\rho'\int_0^{\pi}\frac{d\gamma}{\Delta}.$$

Внутренний интеграл сводится к полному эллиптическому интегралу $K(\varkappa')$ с модулем

$$\varkappa'^2=\frac{4\rho\rho'}{z^2+(\rho+\rho')^2},$$

и следовательно,

$$U(P)=4f\mu\int_{a_1}^{a_2}\frac{\rho'\delta(\rho')K(\varkappa')\,d\rho'}{\sqrt{z^2+(\rho+\rho')^2}};$$

однако дальнейшее интегрирование зависит от характера функции $\delta(\rho')$ и в общем виде выполнено быть не может.

Все формулы, рассмотренные в этом параграфе, относятся к собственной системе координат с началом в центре диска или кольца и с осью аппликат, перпендикулярной к его плоскости. Если нужно иметь выражение для силовой функции в произвольной системе координат, то нужно воспользоваться преобразованием (3.12), и тогда силовая функция сделается функцией девяти независимых переменных и может быть рассматриваема как силовая функция взаимного притяжения материальной точки и диска (или кольца).

В теории вращательного движения искусственных небесных тел это движение изучается относительно Земли. Считая Землю материальной точкой P и беря начало координат в этой точке, мы должны будем положить в формулах (3.12) $x=y=z=0$, и тогда силовая функция сделается функцией только от координат центра диска (кольца) и от углов Эйлера, определяющих ориентацию собственной системы координат. Эта силовая функция и входит в дифференциальные уравнения поступательно-вращательного движения искусственного небесного тела, имеющего вид плоского круглого диска или кольца*).

§ 3. Притяжение сферических тел

Рассмотрим часть пространства, заключенную между поверхностями Σ_1 и Σ_2 двух концентрических сфер с центром в точке O и с радиусами a_1 и $a_2 > a_1$. Вообразим, что это пространство D заполнено притягивающей материей, плотность которой δ есть заданная функция только от расстояния r' до общего центра O, определенная в промежутке от a_1 до a_2.

Полученное таким образом материальное тело T мы будем называть *шаровым слоем, обладающим сферическим распределением плотностей* или обладающим сферической структурой. В частности, при $a_1=0$, $a_2=a$ шаровой слой превращается в полный шар, а если плотность δ есть величина постоянная, то мы имеем случай однородного шарового слоя или соответственно однородного шара.

Мы уже нашли силовую функцию однородного шара путем непосредственного вычисления. Подобным же образом можно найти силовую функцию шара, обладающего сферическим распределением плотностей, а также силовую функцию и шарового слоя такой же структуры.

---

*) См., например, Г. Н. Дубошин, О вращательном движении искусственных небесных тел, Бюллетень ИТА, 1960.