воспользоваться преобразованием (3.12), и тогда силовая функция сделается функцией девяти независимых переменных и может быть рассматриваема как силовая функция взаимного притяжения материальной точки и диска (или кольца).

В теории вращательного движения искусственных небесных тел это движение изучается относительно Земли. Считая Землю материальной точкой P и беря начало координат в этой точке, мы должны будем положить в формулах (3.12) $x = y = z = 0$, и тогда силовая функция сделается функцией только от координат центра диска (кольца) и от углов Эйлера, определяющих ориентацию собственной системы координат. Эта силовая функция и входит в дифференциальные уравнения поступательно-вращательного движения искусственного небесного тела, имеющего вид плоского круглого диска или кольца *).

§ 3. Притяжение сферических тел

Рассмотрим часть пространства, заключенную между поверхностями Σ_1 и Σ_2 двух концентрических сфер с центром в точке O и с радиусами a_1 и $a_2 > a_1$. Вообразим, что это пространство D заполнено притягивающей материей, плотность которой δ есть заданная функция только от расстояния r' до общего центра O, определенная в промежутке от a_1 до a_2.

Полученное таким образом материальное тело T мы будем называть *шаровым слоем, обладающим сферическим распределением плотностей* или обладающим сферической структурой. В частности, при $a_1 = 0$, $a_2 = a$ шаровой слой превращается в полный шар, а если плотность δ есть величина постоянная, то мы имеем случай однородного шарового слоя или соответственно однородного шара.

Мы уже нашли силовую функцию однородного шара путем непосредственного вычисления. Подобным же образом можно найти силовую функцию шара, обладающего сферическим распределением плотностей, а также силовую функцию и шарового слоя такой же структуры.

---

*) См., например, Г. Н. Дубошин, О вращательном движении искусственных небесных тел, Бюллетень ИТА, 1960.

Мы не будем повторять эти вычисления, а применим для нахождения силовой функции ее характеристические свойства, установленные в § 5 предыдущей главы.

Предположим, что функция $\delta(r')$ непрерывна в промежутке от a_1 до a_2 и имеет в этом промежутке непрерывную производную $\delta'(r')$. Тогда искомая силовая функция должна удовлетворять уравнению Лапласа вне слоя и уравнению Пуассона внутри слоя и должна обладать сверх того и остальными характеристическими свойствами.

Чтобы написать уравнения, которым должна удовлетворять искомая силовая функция U шарового слоя, заметим, что по соображениям симметрии эта функция должна зависеть только от расстояния r притягиваемой точки до общего центра O. Поэтому формула (2.20) немедленно даст оператор Лапласа для функции $U(r)$ в виде

$$\nabla U(r) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dU}{dr}\right) = \frac{d^2U}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dU}{dr}.$$

Следовательно, в промежутках $0 \leqslant r \leqslant a_1$ и $a_2 \leqslant r < \infty$ функция U должна удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dU}{dr} = 0, \tag{3.21}$$

а в промежутке $a_1 \leqslant r \leqslant a_2$ — уравнению

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dU}{dr} = -4\pi f\mu\delta(r). \tag{3.22}$$

Легко убедиться, что линейно независимые функции

$$U_1 = 1, \quad U_2 = \frac{1}{r}$$

суть решения уравнения (3.21), а поэтому

$$U = C_1 + \frac{C_2}{r} \tag{3.21'}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, является общим решением этого уравнения.

Применяя затем к уравнению (3.22) способ изменения произвольных постоянных, получим общее решение этого уравнения в виде

$$U=\bar{C}_1+\frac{\bar{C}_2}{r}+\frac{4\pi f\mu}{r}\int_{a_1}^{r} r'^2\delta(r')\,dr'-4\pi f\mu\int_{a_1}^{r} r'\delta(r')\,dr', \tag{3.22'}$$

где $\bar{C}_1$ и $\bar{C}_2$ — две другие произвольные постоянные.

Дифференцируя далее (3.21) и (3.22), найдем

$$\frac{dU}{dr}=-\frac{C_2}{r^2} \tag{3.21''}$$

и

$$\frac{dU}{dr}=-\frac{\bar{C}_2}{r^2}-\frac{4\pi f\mu}{r^2}\int_{a_1}^{r} r'^2\delta(r')\,dr'. \tag{3.22''}$$

Перейдем к определению произвольных постоянных. В промежутке $0\leqslant r\leqslant a_1$ функция U задается формулой (3.21) и должна быть конечной в этом промежутке. Отсюда следует, что $C_2=0$, и мы имеем

$$\left.\begin{array}{l} U=C_1, \\ U'=0 \end{array}\right\} \quad (0\leqslant r\leqslant a_1). \tag{3.23}$$

Далее, в промежутке $a_2\leqslant r<\infty$ функция U опять задается формулой (3.21), но произвольные постоянные имеют уже другие значения. Эти постоянные определятся из условия $\lim\limits_{r\to\infty}(rU)=f\mu m$, откуда имеем $C_1=0$ и $C_2=f\mu m$, т. е.

$$\left.\begin{array}{l} U=\dfrac{f\mu m}{r}, \\ U'=-\dfrac{f\mu m}{r^2} \end{array}\right\} \quad (a_2\leqslant r<\infty).$$

Далее, так как функции U и U' должны быть непрерывны при $r=a_1$, то равенства (3.22), (3.22′) и (3.23) дают условия

$$C_1=\bar{C}_1+\frac{\bar{C}_2}{a_1}, \qquad -\frac{\bar{C}_2}{a_1^2}=0,$$

откуда

$$C_1=\bar{C}_1, \quad \bar{C}_2=0.$$

Теперь условия непрерывности U и U' при $r=a_2$ дают

$$\frac{f\mu m}{a_2}=\overline{C}_1+\frac{4\pi f\mu}{a_2}\int\limits_{a_1}^{a_2} r'^2\delta(r')\,dr'-4\pi f\mu\int\limits_{a_1}^{a_2} r'\delta(r')\,dr'.$$

Так как вся масса слоя

$$m=4\pi\int\limits_{a_1}^{a_2} r'^2\delta(r')\,dr',$$

то

$$\overline{C}_1=C_1=4\pi f\mu\int\limits_{a_1}^{a_2} r'\delta(r')\,dr'.$$

Таким образом, все постоянные найдены.

Итак, силовая функция шарового слоя, сферической структуры определится следующими равенствами:

в промежутке $0\leqslant r\leqslant a_1$

$$\left.\begin{aligned} U(r)&=4\pi f\mu\int\limits_{a_1}^{a_2} r'\delta(r')\,dr',\\ U'(r)&=0,\end{aligned}\right\}\tag{3.24}$$

т. е. материальная точка P, находящаяся во внутренней полости слоя, вовсе не испытывает притяжения. Этот результат составляет теорему Ньютона в ее частной формулировке *);

в промежутке $a_1\leqslant r\leqslant a_2$

$$\left.\begin{aligned} U(r)&=\frac{4\pi f\mu}{r}\int\limits_{a_1}^{r} r'^2\delta(r')\,dr'+4\pi f\mu\int\limits_{r}^{a_2} r'\delta(r')\,dr',\\ U'(r)&=-\frac{4\pi f\mu}{r^2}\int\limits_{a_1}^{r} r'^2\delta(r')\,dr'=-\frac{f\mu m(r)}{r^2},\end{aligned}\right\}\tag{3.25}$$

т. е. точка P, находящаяся внутри слоя на расстоянии r от его центра, притягивается по закону Ньютона материальной точкой O, масса которой

$$m(r)=4\pi\int\limits_{a_1}^{r} r'^2\delta(r')\,dr'$$

*) См. ниже, § 5.

равна массе шарового слоя, ограниченного сферой Σ_1 и концентрической сферой радиуса r;

наконец, в промежутке $a_2 \leqslant r < \infty$

$$\left.\begin{aligned} U(r) &= \frac{f\mu m}{r}, \\ U'(r) &= -\frac{f\mu m}{r^2}, \end{aligned}\right\} \tag{3.26}$$

т. е. внешнюю материальную точку P шаровой слой притягивает так, как будто бы вся его масса была сосредоточена в его центре.

Для сплошного шара $a_1 = 0$, и мы имеем, заменяя a_2 просто через a, в промежутке $0 \leqslant r \leqslant a$

$$U(r) = \frac{4\pi f\mu}{r}\int_0^r r'^2\delta(r')\,dr' + 4\pi f\mu\int_r^a r'\delta(r')\,dr',$$

$$U'(r) = -\frac{4\pi f\mu}{r^2}\int_0^r r'^2\delta(r')\,dr'.$$

Наконец, если $\delta = \text{const}$, то для шарового слоя имеем в промежутке $a_1 \leqslant r \leqslant a_2$

$$U(r) = 4\pi f\mu\delta\left[\frac{r^3 - a_1^3}{3r} + \frac{a_2^2 - r^2}{2}\right],$$

$$U'(r) = -4\pi f\mu\delta\,\frac{r^3 - a_1^3}{3r^2}$$

и для сплошного шара в промежутке $0 \leqslant r \leqslant a$

$$U(r) = \frac{2\pi f\mu\delta}{3}(3a^2 - r^2),$$

$$U'(r) = -\frac{4}{3}\pi f\mu\delta r.$$

Составляющие силы притяжения в прямоугольной декартовой системе координат с началом в центре слоя или шара, но с совершенно произвольными направлениями осей, найдутся по очевидным формулам

$$X = \frac{x}{r}U'(r), \quad Y = \frac{y}{r}U'(r), \quad Z = \frac{z}{r}U'(r).$$

Теперь заметим, что если центр шара (или слоя) находится в точке $G(\xi, \eta, \zeta)$ прямоугольной системы координат с началом в произвольно выбранной точке O, то все вышеприведенные формулы сохранятся без изменения, но вместо r нужно везде поставить

$$R=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}.$$

Тогда формулы (3.24), (3.25), (3.26) определят силовую функцию взаимного притяжения шарового слоя (или полного шара) и материальной точки P массы μ.

Эта силовая функция зависит только от расстояния R точки P до центра G слоя (или шара), а следовательно, вовсе *не зависит от углов Эйлера*, определяющих ориентацию собственной системы координат. Поэтому составляющие сил притяжения, действующих на точку P и на тело T (с центром приведения в точке G), найдутся по очевидным формулам:

$$X=\frac{x-\xi}{R}U'(R),\quad Y=\frac{y-\eta}{R}U'(R),\quad Z=\frac{z-\zeta}{R}U'(R),$$

$$\Xi=\frac{\xi-x}{R}U'(R),\quad \mathrm{H}=\frac{\eta-y}{R}U'(R),\quad \mathrm{Z}=\frac{\zeta-z}{R}U'(R),$$

а *составляющие момента силы притяжения*, действующей на тело T (относительно точки G), очевидно, *равны нулю*.

Пусть теперь имеем два тела T_1 и T_2, каждое из которых есть либо шаровой слой со сферическим распределением плотностей, либо полный шар такой же структуры.

Обозначим, как и раньше, через M_i $(i=1, 2)$ текущую точку тела T_i, в которой сосредоточена элементарная масса dm_i, и через Δ расстояние между M_1 и M_2. Тогда силовая функция взаимного притяжения двух трехмерных тел определится, как мы знаем, следующей общей формулой:

$$U=f\iiint\limits_{(T_1)}\iiint\limits_{(T_2)}\frac{dm_1\,dm_2}{\Delta}. \tag{3.27}$$

Обозначим через $U_2(M_1)$ силовую функцию тела T_2 на точку M_1, в которой сосредоточена единичная масса, а через $U_1(M_2)$ такую же функцию тела T_1 на точку M_2.

Очевидно, что формула (3.27) может быть написана тогда двояким образом:

$$U = \iiint\limits_{(T_1)} U_2(M_1)\,dm_1 = \iiint\limits_{(T_2)} U_1(M_2)\,dm_2. \qquad (3.28)$$

Пусть T_1 и T_2 суть шаровые слои, внешние по отношению друг к другу. Тогда $U_2(M_1)$ есть силовая функция шарового слоя на внешнюю точку M_1 единичной массы, и по формуле (3.26) мы будем иметь

$$U_2(M_1) = f \iiint\limits_{(T_2)} \frac{dm_2}{\Delta} = \frac{fm_2}{\Delta_2},$$

где Δ_2 есть расстояние точки M_1 до центра G_2 слоя T_2, а m_2 есть масса слоя T_2.

Аналогично, если угодно, можем написать также

$$U_1(M_2) = f \iiint\limits_{(T_1)} \frac{dm_1}{\Delta} = \frac{fm_1}{\Delta_1},$$

где Δ_1 есть расстояние точки M_2 до центра G_1 слоя T_1, а m_1 есть масса этого слоя.

Поэтому формулы (3.28) напишутся теперь в виде

$$U = fm_2 \iiint\limits_{(T_1)} \frac{dm_1}{\Delta_2} = fm_1 \iiint\limits_{(T_2)} \frac{dm_2}{\Delta_1}.$$

Но каждый из этих двух интегралов есть опять силовая функция слоя T_1 (слоя T_2) на внешнюю материальную точку G_2 с массой m_2 (G_1 с массой m_1), а следовательно, применяя опять формулу (3.26), мы получим

$$U = f\,\frac{m_1 m_2}{R}, \qquad (3.29)$$

где R есть расстояние между центрами G_1 и G_2.

Формула (3.29) есть силовая функция взаимного притяжения двух материальных точек с массами m_1 и m_2, а следовательно, *два шаровых слоя, внешние по отношению друг к другу, притягиваются взаимно с силой прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между их центрами,* или иначе, два внешних шаровых слоя взаимно притягиваются как две материальные точки, помещенные в центрах слоев, с массами, равными массам этих слоев.

Многие естественные небесные тела (звезды, большие планеты, шаровые звездные скопления) имеют форму, весьма близкую к сферической, а внутреннее распределение материи внутри них, вероятно, близко к сферическому закону.

Отсюда следует, что такие небесные тела взаимно притягиваются почти как материальные точки даже на довольно близких расстояниях между ними. Ранее, во второй главе, было показано, что два совершенно произвольных тела, находящихся на весьма большом расстоянии, также притягиваются как материальные точки. Соединение двух указанных обстоятельств и позволяет в астрономии, а в частности в небесной механике, широко пользоваться законом Ньютона в его простейшей форме. Сказанное относится также в ряде случаев и к искусственным небесным телам, особенно когда изучают их поступательные движения.

Составляющие сил притяжения, действующих на слои T_1 и T_2, находятся так же как и для материальных точек, а составляющие моментов этих сил относительно центров притягивающихся слоев, очевидно, равны нулю.

Допустим теперь, что одно из тел расположено целиком во внутренней полости другого. Пусть, например, тело T_1 есть шаровой слой, а тело T_2 есть слой, или шар, находящийся во внутренней полости слоя T_1; для возможности этого необходимо, разумеется, чтобы внешний радиус тела T_2 был меньше внутреннего радиуса тела T_1. Рассмотрим какую угодно частицу тела T_2. По теореме Ньютона (формулы (3.24)) эта частица не притягивается слоем и, конечно, сама его не притягивает.

Так как все тело T_2 может быть рассматриваемо как бесчисленное собрание таких частиц, каждая из которых не притягивается телом T_1, то и все тело T_2 целиком не притягивается телом T_1 и, конечно, само его не притягивает. Это видно также из формул (3.28) и (3.24) непосредственно.

Заметим, что сказанное будет, очевидно, справедливо и по отношению к *любому телу* T_2, находящемуся целиком во внутренней полости шарового слоя T_1, обладающего сферической структурой. В дальнейшем это свойство притяжения шаровым слоем будет несколько обобщено.

Мы не будем рассматривать случай, когда шаровые слои T_1 и T_2 имеют какую-либо общую часть, так как, во-первых, такие случаи не представляются простыми, во-вторых, решение задачи здесь существенно зависит от налагаемых нами условий (например, от того, какова общая часть этих тел), а в третьих, мы не видим естественных приложений этих случаев.

§ 4. Некоторые свойства эллипсоидов

В этом параграфе мы рассмотрим отдельно некоторые геометрические свойства эллипсоидов, которые будут нужны нам в дальнейшем при нахождении силовой функции эллипсоидального тела.

Пусть E обозначает некоторый эллипсоид, полуоси которого суть a, b, c. Не нарушая общности, мы будем предполагать, что

$$c \leqslant b \leqslant a.$$

Примем главные оси эллипсоида E за оси декартовой системы координат с началом в его центре O. Тогда уравнение эллипсоида E запишется в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{3.30}$$

В частности, если $b = a$, то уравнение имеет вид

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

и E есть эллипсоид вращения вокруг оси Oz или вокруг наименьшей из осей эллипсоида. Такой эллипсоид мы будем называть *сжатым эллипсоидом вращения.*

Если $b = c$, то уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1$$

и E есть эллипсоид вращения вокруг оси Ox или вокруг наибольшей из осей эллипсоида. Такой эллипсоид мы будем называть *вытянутым эллипсоидом вращения.*