Мы не будем рассматривать случай, когда шаровые слои T_1 и T_2 имеют какую-либо общую часть, так как, во-первых, такие случаи не представляются простыми, во-вторых, решение задачи здесь существенно зависит от налагаемых нами условий (например, от того, какова общая часть этих тел), а в третьих, мы не видим естественных приложений этих случаев.

§ 4. Некоторые свойства эллипсоидов

В этом параграфе мы рассмотрим отдельно некоторые геометрические свойства эллипсоидов, которые будут нужны нам в дальнейшем при нахождении силовой функции эллипсоидального тела.

Пусть E обозначает некоторый эллипсоид, полуоси которого суть a, b, c. Не нарушая общности, мы будем предполагать, что

$$c \leqslant b \leqslant a.$$

Примем главные оси эллипсоида E за оси декартовой системы координат с началом в его центре O. Тогда уравнение эллипсоида E запишется в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{3.30}$$

В частности, если $b = a$, то уравнение имеет вид

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

и E есть эллипсоид вращения вокруг оси Oz или вокруг наименьшей из осей эллипсоида. Такой эллипсоид мы будем называть *сжатым эллипсоидом вращения*.

Если $b = c$, то уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1$$

и E есть эллипсоид вращения вокруг оси Ox или вокруг наибольшей из осей эллипсоида. Такой эллипсоид мы будем называть *вытянутым эллипсоидом вращения*.

Наконец, если $c=b=a$, то эллипсоид E превращается в шар

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

радиуса a с центром в начале координат.

Рассмотрим теперь второй эллипсоид E' с полуосями a', b', c', концентрический с эллипсоидом E и определяемый уравнением

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1.$$

Эллипсоид E' называется *подобным* эллипсоиду E, если

$$a'=ka, \quad b'=kb, \quad c'=kc.$$

Поэтому уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=k^2 \tag{3.31}$$

есть *уравнение семейства подобных и подобно расположенных эллипсоидов* и k есть параметр этого семейства.

Пусть, далее, имеем семейство параллельных прямых, общее направление которых определяется угловыми коэффициентами m, n, p. Уравнения этих прямых можно написать в виде

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

Каждая из прямых этого семейства пересекает эллипсоид E в двух точках, действительных или мнимых. Отрезок прямой, заключенный между двумя различными действительными точками пересечения с E, называется, как известно, *хордой* эллипсоида; геометрическое место середин всех таких параллельных хорд есть плоскость, проходящая через центр эллипсоида и определяемая уравнением

$$\frac{mx}{a^2}+\frac{ny}{b^2}+\frac{pz}{c^2}=0.$$

Эта плоскость называется *диаметральной плоскостью* эллипсоида E, сопряженной прямой с угловыми коэффициентами m, n, p.

Очевидно, что все подобные и подобно расположенные эллипсоиды (3.31) имеют общую диаметральную плоскость, сопряженную одному и тому же направлению (m, n, p).

Докажем теперь одно простое свойство подобных эллипсоидов. Пусть E' есть эллипсоид, внешний по отношению к E ($k > 1$), и пусть P есть любая точка, лежащая внутри E (а следовательно, и внутри E'). Проведем через эту точку произвольную прямую $L(m, n, p)$ и обозначим точки пересечения этой прямой с E через M_1 и M_2 и с E' соответственно через M_1' и M_2'. Тогда

$$\overline{M_1M_1'} = \overline{M_2M_2'}, \tag{3.32}$$

какова бы ни была прямая L.

Действительно, как уже было отмечено, эллипсоиды E и E' имеют одну и ту же диаметральную плоскость, сопряженную направлению L. Следовательно, хорды $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1'M_2'}$ имеют общую середину, которую обозначим через M_0. Таким образом,

$$\overline{M_0M_1} = \overline{M_0M_2}, \quad \overline{M_0M_1'} = \overline{M_0M_2'},$$

откуда и следует равенство (3.32).

Пусть теперь полуоси эллипсоида E', концентрического с E, определяются формулами

$$a'^2 = a^2 + \lambda, \quad b'^2 = b^2 + \lambda, \quad c'^2 = c^2 + \lambda.$$

Тогда эллипсоид E' называется *софокусным* эллипсоиду E, а уравнение

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1 \tag{3.33}$$

есть уравнение семейства софокусных эллипсоидов (λ — параметр этого семейства).

Заметим, что если параметр λ может принимать какие угодно вещественные значения, то среди поверхностей (3.33) будут не только эллипсоиды, но также и гиперболоиды (однополостные и двуполостные), а поэтому уравнение (3.33) вообще есть уравнение семейства софокусных поверхностей второго порядка.

Поверхности (3.33) называются софокусными, так как главные сечения этих поверхностей имеют общие фокусы.

Действительно, рассмотрим для примера сечения поверхностей семейства (3.33) плоскостью $z=0$. Эти сечения будут эллипсами или гиперболами с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1,$$

фокальные расстояния которых суть

$$\pm\sqrt{(a^2+\lambda)-(b^2+\lambda)}=\pm\sqrt{a^2-b^2}.$$

Так как эти расстояния не зависят от параметра λ, то все кривые семейства имеют общие фокусы, что и надо было показать. Точно так же это показывается и для двух других главных сечений.

Пусть E' есть эллипсоид, софокусный эллипсоиду E и внешний по отношению к нему ($\lambda>0$).

Возьмем на E произвольную точку $M(x, y, z)$ и поставим ей в соответствие точку $M'(x', y', z')$ на E', координаты которой определяются из условий

$$x'=\frac{a'}{a}x, \quad y'=\frac{b'}{b}y, \quad z'=\frac{c'}{c}z. \tag{3.34}$$

Ясно, что каждой точке M на E соответствует единственная точка M' на E'.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема Айвори. *Если M_1 и M_2 суть две любые точки эллипсоида E, а M_1' и M_2' — соответствующие им точки эллипсоида E', то имеем всегда*

$$\overline{M_1M_2'}=\overline{M_2M_1'},$$

каковы бы ни были точки M_1 и M_2.

Действительно, пусть x_1, y_1, z_1 суть координаты точки M_1 и x_2, y_2, z_2 — координаты точки M_2. Координаты соответствующих точек, лежащих на E', обозначим такими же буквами, но со штрихами, так что

$$x_1'=\frac{a'}{a}x_1, \quad y_1'=\frac{b'}{b}y_1, \quad z_1'=\frac{c'}{c}z_1;$$

$$x_2'=\frac{a'}{a}x_2, \quad y_2'=\frac{b'}{b}y_2, \quad z_2'=\frac{c'}{c}z_2.$$

Для расстояний $\overline{M_1M_2'}$ и $\overline{M_2M_1'}$ имеем

$$(\overline{M_1M_2'})^2 = (x_1 - x_2')^2 + (y_1 - y_2')^2 + (z_1 - z_2')^2 =$$
$$= \left(x_1 - \frac{a'}{a}x_2\right)^2 + \left(y_1 - \frac{b'}{b}y_2\right)^2 + \left(z_1 - \frac{c'}{c}z_2\right)^2,$$
$$(M_2M_1')^2 = (x_2 - x_1')^2 + (y_2 - y_1')^2 + (z_2 - z_1')^2 =$$
$$= \left(x_2 - \frac{a'}{a}x_1\right)^2 + \left(y_2 - \frac{b'}{b}y_1\right)^2 + \left(z_2 - \frac{c'}{c}z_1\right)^2,$$

откуда

$$(\overline{M_1M_2'})^2 - (M_2M_1')^2 = \left(1 - \frac{a'^2}{a^2}\right)x_1^2 + \left(\frac{a'^2}{a^2} - 1\right)x_2^2 +$$
$$+ \left(1 - \frac{b'^2}{b^2}\right)y_1^2 + \left(\frac{b'^2}{b^2} - 1\right)y_2^2 + \left(1 - \frac{c'^2}{c^2}\right)z_1^2 + \left(\frac{c'^2}{c^2} - 1\right)z_2^2 =$$
$$= -\lambda\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2}\right) + \lambda\left(\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} + \frac{z_2^2}{c^2}\right) \equiv 0,$$

так как точки M_1 и M_2 лежат на эллипсоиде E.

Таким образом, теорема Айвори доказана. Докажем теперь следующую теорему.

Теорема. *Через каждую точку P', внешнюю по отношению к эллипсоиду E, проходит только один эллипсоид E', софокусный эллипсоиду E.*

Пусть $P'(x', y', z')$ есть точка, внешняя для E, т. е. пусть

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} > 1.$$

Чтобы найти эллипсоид E', проходящий через точку P', софокусный E, нужно определить значение параметра λ из уравнения

$$F(\lambda) = \frac{x'^2}{a^2+\lambda} + \frac{y'^2}{b^2+\lambda} + \frac{z'^2}{c^2+\lambda} - 1 = 0, \tag{3.35}$$

в котором координаты точки P' и полуоси эллипсоида E суть величины данные. Покажем, что уравнение (3.35), являющееся кубичным относительно неизвестной λ, имеет всегда три вещественных корня, из которых только один положителен. Отметим прежде всего, что производная по λ от функции $F(\lambda)$

$$F'(\lambda) = -\frac{x'^2}{(a^2+\lambda)^2} - \frac{y'^2}{(b^2+\lambda)^2} - \frac{z'^2}{(c^2+\lambda)^2}$$

есть величина всегда отрицательная. Следовательно, функция $F(\lambda)$ есть монотонно убывающая функция, когда λ изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. Далее, функция $F(\lambda)$ имеет три точки разрыва второго рода при $\lambda=-a^2$, $\lambda=-b^2$, $\lambda=-c^2$, где она обращается в $\pm\infty$. Тогда из следующей таблицы

λ	$\operatorname{sign} F(\lambda)$	λ	$\operatorname{sign} F(\lambda)$
$-\infty$	$-$	$-c^2-\varepsilon$	$-$
$-a^2-\varepsilon$	$-$	$-c^2+\varepsilon$	$+$
$-a^2+\varepsilon$	$+$	0	$+$
$-b^2-\varepsilon$	$-$	$+\infty$	$-$
$-b^2+\varepsilon$	$+$		

где ε есть любое положительное число, меньшее чем c^2, мы немедленно усматриваем, что функция $F(\lambda)$ обращается в нуль три раза при значениях параметра λ, удовлетворяющих неравенствам

$$-a^2<\lambda_1<-b^2, \quad -b^2<\lambda_2<-c^2, \quad 0<\lambda_3<+\infty.$$

Все эти значения λ вещественны, причем $\lambda_1<0$, $\lambda_2<0$ и $\lambda_3>0$. Значение λ_3 соответствует эллипсоиду E', софокусному с E и проходящему через точку P'. Таким образом, теорема доказана.

Заметим еще, что когда точка P' перемещается в пространстве, приближаясь к поверхности эллипсоида E, то λ_3 уменьшается, приближаясь к нулю, а когда точка P' удаляется в бесконечность, то λ_3 возрастает и также стремится к $+\infty$. Наконец, когда точка P' переходит внутрь эллипсоида и, перемещаясь внутри его, приближается к его центру, то λ_3 делается отрицательным и стремится к $-c^2$, когда $P'\to 0$.

Но при любом λ_3, содержащемся в промежутке $(-c^2, +\infty)$, мы имеем

$$\lambda_3+c^2>0, \quad \lambda_3+b^2>0, \quad \lambda_3+a^2>0,$$

а поэтому поверхность, проходящая через точку P' и соответствующая значению параметра λ_3, всегда есть эллипсоид. Нетрудно убедиться теперь, что

$$\lambda_2+c^2<0, \quad \lambda_2+b^2>0, \quad \lambda_2+a^2>0,$$

а поэтому поверхность, проходящая через точку P' и соответствующая значению параметра λ_2, есть всегда однополостный гиперболоид. Наконец, мы имеем

$$\lambda_1+c^2<0, \quad \lambda_1+b^2<0, \quad \lambda_1+a^2>0,$$

а следовательно, поверхность, проходящая через точку P' и соответствующая значению параметра λ_1, есть всегда двуполостный гиперболоид.

Итак, через любую точку пространства можно провести три поверхности второго порядка, софокусные данному эллипсоиду E. Одна из них есть также эллипсоид, другая — однополостный гиперболоид, а третья — двуполостный гиперболоид. Уравнения этих трех поверхностей имеют вид

$$\frac{x'^2}{a^2+\lambda_1}+\frac{y'^2}{b^2+\lambda_1}+\frac{z'^2}{c^2+\lambda_1}=1,$$
$$\frac{x'^2}{a^2+\lambda_2}+\frac{y'^2}{b^2+\lambda_2}+\frac{z'^2}{c^2+\lambda_2}=1,$$
$$\frac{x'^2}{a^2+\lambda_3}+\frac{y'^2}{b^2+\lambda_3}+\frac{z'^2}{c^2+\lambda_3}=1.$$

Разрешая эти уравнения относительно x'^2, y'^2, z'^2, мы получим

$$\left.\begin{aligned} x'^2&=\frac{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)(a^2+\lambda_3)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},\\ y'^2&=\frac{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)(b^2+\lambda_3)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)},\\ z'^2&=\frac{(c^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_2)(c^2+\lambda_3)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}.\end{aligned}\right\} \tag{3.36}$$

Таким образом, каждой точке пространства P' соответствуют три числа: λ_1, λ_2, λ_3, связанные с декартовыми координатами этой точки формулами (3.36), которые отличаются от формул § 2 главы II только обозначениями.

Следовательно, если основной координатной поверхностью является поверхность данного эллипсоида E, то числа λ_1, λ_2, λ_3 суть эллипсоидальные координаты точки P'.

Возвращаясь к уравнению (3.35), будем рассматривать координаты точки P' как независимые переменные, а λ — как функцию этих трех переменных. Отбрасывая штрихи у координат, напишем уравнение, определяющее λ как функцию от x, y, z, в виде

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}-1=0. \qquad (3.35')$$

В дальнейшем нам понадобятся выражения дифференциальных параметров Ламе для функции $\lambda(x, y, z)$, определяемой уравнением (3.35′). Дифференцируя это уравнение по x, y, z соответственно, мы имеем

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}=\frac{2x}{(a^2+\lambda)Q}, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial y}=\frac{2y}{(b^2+\lambda)Q}, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial z}=\frac{2z}{(c^2+\lambda)Q},$$

где положено для сокращения

$$Q=\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}.$$

Вторичное дифференцирование дает

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}=\frac{2}{(a^2+\lambda)Q}-\frac{8x^2}{(a^2+\lambda)^3Q^2}+\frac{8x^2}{(a^2+\lambda)^2Q^3}\bar{Q},$$

где положено для сокращения

$$\bar{Q}=\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^3}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)^3}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)^3}.$$

Аналогичные выражения имеем и для $\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2}$. Теперь находим без труда

$$\Delta_1\lambda=\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2=\frac{4}{Q} \qquad (3.37)$$

и

$$\nabla\lambda=\frac{2}{Q}\left[\frac{1}{a^2+\lambda}+\frac{1}{b^2+\lambda}+\frac{1}{c^2+\lambda}\right]. \qquad (3.38)$$

Полагая еще

$$R(\lambda)=\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)},$$

мы можем представить $\nabla\lambda$ в виде

$$\nabla\lambda=\frac{4}{Q}\,\frac{d\ln R(\lambda)}{d\lambda}. \qquad (3.39)$$

Пусть теперь V есть данная функция от λ, которая в силу уравнения (3.35′) в свою очередь есть функция от x, y, z.

Найдём оператор Лапласа для функции V. Из формул

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{dV}{d\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{d^2V}{d\lambda^2}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2+\frac{dV}{d\lambda}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}$$

и им аналогичных для производных по y и z получим

$$\nabla V=\frac{d^2V}{d\lambda^2}\Delta_1\lambda+\frac{dV}{d\lambda}\nabla\lambda$$

или

$$\nabla V=\frac{4}{Q}\left[\frac{d^2V}{d\lambda^2}+\frac{d\ln \dot{R}(\lambda)}{d\lambda}\frac{dV}{d\lambda}\right]. \tag{3.40}$$

§ 5. Притяжение однородного эллипсоида. Случай внутренней точки

Задача о нахождении силовой функции и составляющих силы притяжения однородного эллипсоида издавна была одной из важнейших задач теории притяжения, которой занимались многие выдающиеся ученые. Лаплас, Лагранж, Маклорен, Айвори, Якоби, Гаусс, Дирихле, Ляпунов — вот далеко не полный список великих и славных имен, связанных с этой необходимой для астрономических и геофизических приложений задачей.

Лагранж, Гаусс и Дирихле дали методы, позволяющие найти выражение для силовой функции однородного эллипсоида для случая, когда притягиваемая точка лежит внутри него. Затем теоремы Лапласа, Айвори и Маклорена позволили найти, почти уже без вычислений, силовую функцию и для внешней точки.

Обычно в учебниках или руководствах по теории потенциала излагается классический метод Лагранжа или метод Гаусса. Эти методы заключаются прежде всего в нахождении составляющих силы притяжения, т. е. частных производных первого порядка от силовой функции, а затем уже в определении самой силовой функции путем интегрирования ее полного дифференциала. Здесь мы изложим способ непосредственного вычисления самой силовой функции, а составляющие силы найдем затем обычным путем при помощи дифференцирования *).

*) См. Мультон, Введение в небесную механику, пер. с англ., ОНТИ, 1935.