Найдём оператор Лапласа для функции V. Из формул

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{dV}{d\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{d^2V}{d\lambda^2}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2+\frac{dV}{d\lambda}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}$$

и им аналогичных для производных по y и z получим

$$\nabla V=\frac{d^2V}{d\lambda^2}\Delta_1\lambda+\frac{dV}{d\lambda}\nabla\lambda$$

или

$$\nabla V=\frac{4}{Q}\left[\frac{d^2V}{d\lambda^2}+\frac{d\ln\dot{R}(\lambda)}{d\lambda}\frac{dV}{d\lambda}\right]. \tag{3.40}$$

§ 5. Притяжение однородного эллипсоида. Случай внутренней точки

Задача о нахождении силовой функции и составляющих силы притяжения однородного эллипсоида издавна была одной из важнейших задач теории притяжения, которой занимались многие выдающиеся ученые. Лаплас, Лагранж, Маклорен, Айвори, Якоби, Гаусс, Дирихле, Ляпунов — вот далеко не полный список великих и славных имен, связанных с этой необходимой для астрономических и геофизических приложений задачей.

Лагранж, Гаусс и Дирихле дали методы, позволяющие найти выражение для силовой функции однородного эллипсоида для случая, когда притягиваемая точка лежит внутри него. Затем теоремы Лапласа, Айвори и Маклорена позволили найти, почти уже без вычислений, силовую функцию и для внешней точки.

Обычно в учебниках или руководствах по теории потенциала излагается классический метод Лагранжа или метод Гаусса. Эти методы заключаются прежде всего в нахождении составляющих силы притяжения, т. е. частных производных первого порядка от силовой функции, а затем уже в определении самой силовой функции путем интегрирования ее полного дифференциала. Здесь мы изложим способ непосредственного вычисления самой силовой функции, а составляющие силы найдем затем обычным путем при помощи дифференцирования *).

*) См. Мультон, Введение в небесную механику, пер. с англ., ОНТИ, 1935.

Итак, рассмотрим однородное тело T с плотностью δ, ограниченное поверхностью эллипсоида E.

Возьмем систему координат, оси которой направлены по главным осям эллипсоида и начало которой находится в его центре O. Тогда уравнение поверхности эллипсоида запишется в виде

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1. \tag{E}$$

Пусть $P(x, y, z)$ есть материальная точка массы μ, лежащая внутри эллипсоида, так что

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}<1.$$

Составляющие силы притяжения, действующей на точку P, как показал Лагранж, пропорциональны координатам этой точки, а коэффициенты пропорциональности выражаются однократными интегралами, приводящимися к эллиптическим. Отсюда следует, что силовая функция эллипсоида на внутреннюю точку представляется в виде квадратичной формы от координат точки P, содержащей только квадраты этих координат.

Как уже было сказано, мы выведем это выражение для силовой функции путем непосредственного вычисления. Для этого вообразим систему полярных координат с началом в точке P и воспользуемся для нахождения силовой функции $U(P)$ формулой (2.34), которая для случая, когда $\delta = \mathrm{const}$, напишется в виде

$$U(P)=\frac{1}{2}f\mu\delta\int\limits_{(\Omega)}\int R^2\,d\omega, \tag{3.41}$$

где интегрирование распространено на всю сферу Ω единичного радиуса, а R есть переменное расстояние от точки P до точки $M(x', y', z')$ поверхности эллипсоида E. Обозначая, как и раньше, направляющие косинусы прямой $\overrightarrow{PM}$ через α', β', γ', мы имеем

$$x'=x+R\alpha', \quad y'=y+R\beta', \quad z'=z+R\gamma'.$$

Подставляя эти выражения для координат точки M в уравнение (E), мы получим квадратное уравнение относительно R

$$AR^2+2BR+C=0; \tag{3.42}$$

здесь положено для сокращения

$$A=\frac{\alpha'^2}{a^2}+\frac{\beta'^2}{b^2}+\frac{\gamma'^2}{c^2}>0,$$

$$B=\frac{\alpha' x}{a^2}+\frac{\beta' y}{b^2}+\frac{\gamma' z}{c^2},$$

$$C=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1<0.$$

Поскольку $B^2-AC>0$, то один корень уравнения (3.42) положителен, а другой — отрицателен. Так как R есть величина заведомо положительная, то имеем

$$R=-\frac{B}{A}+\frac{\sqrt{B^2-AC}}{A},$$

откуда

$$R^2=\frac{2B^2-AC}{A^2}-\frac{2B\sqrt{B^2-AC}}{A^2}.$$

Подставив это выражение в формулу (3.41), напишем выражение для силовой функции в следующем виде:

$$U(P)=f\mu\delta\left\{\iint\limits_{(\Omega)}\frac{B^2\,d\omega}{A^2}-\frac{1}{2}\iint\limits_{(\Omega)}\frac{C\,d\omega}{A}-\right.$$

$$\left.-\iint\limits_{(\Omega)}\frac{B\sqrt{B^2-AC}}{A^2}\,d\omega\right\}.$$

Покажем, что последний интеграл равен нулю. Действительно, заменив B его выражением и полагая для сокращения

$$\Phi(M)=\frac{\sqrt{B^2-AC}}{A^2},$$

мы можем написать

$$\iint\limits_{(\Omega)}\frac{B\sqrt{B^2-AC}}{A^2}\,d\omega=$$

$$=\frac{x}{a^2}\iint\limits_{(\Omega)}\alpha'\Phi(M)d\omega+\frac{y}{b^2}\iint\limits_{(\Omega)}\beta'\Phi(M)d\omega+\frac{z}{c^2}\iint\limits_{(\Omega)}\gamma'\Phi(M)d\omega.$$

Воображая теперь плоскость, проходящую через точку P параллельно плоскости xOy, мы разобьем всю сферу Ω на две половинки — «верхнюю» Σ и «нижнюю» Σ'. Пусть M'

есть текущая точка полусферы Σ', симметричная текущей точке M полусферы Σ относительно точки P. Тогда направляющие косинусы прямой $\overrightarrow{PM'}$ будут равны соответственно $-\alpha'$, $-\beta'$, $-\gamma'$, а $\Phi(M')=\Phi(M)$; поэтому, например, для первого из интегралов в предыдущей формуле мы получим

$$\iint\limits_{(\Omega)} \alpha'\Phi(M)\,d\omega = \iint\limits_{(\Sigma)} \alpha'\Phi(M)\,d\omega + \iint\limits_{(\Sigma')} (-\alpha')\,\Phi(M')\,d\omega = 0.$$

Аналогично доказывается равенство нулю и остальных двух интегралов.

Теперь можем написать

$$U(P) = f\mu\delta\left\{\overline{U} + \frac{x^2}{a^4}\iint\limits_{(\Omega)} \frac{\alpha'^2\,d\omega}{A^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{y^2}{b^4}\iint\limits_{(\Omega)} \frac{\beta'^2\,d\omega}{A^2} + \frac{z^2}{c^4}\iint\limits_{(\Omega)} \frac{\gamma'^2\,d\omega}{A^2} - \frac{1}{2}\iint\limits_{(\Omega)} \frac{C\,d\omega}{A}\right\},$$

где положено

$$\overline{U} = \frac{2xy}{a^2b^2}\iint\limits_{(\Omega)} \frac{\alpha'\beta'\,d\omega}{A^2} + \frac{2xz}{a^2c^2}\iint\limits_{(\Omega)} \frac{\alpha'\gamma'\,d\omega}{A^2} + \frac{2yz}{b^2c^2}\iint\limits_{(\Omega)} \frac{\beta'\gamma'\,d\omega}{A^2}.$$

Но каждый из трех последних интегралов, как легко убедиться, также равен нулю. Действительно, возьмем на полусфере Σ' текущую точку M', симметричную точке M полусферы Σ, относительно той же плоскости, что и выше. Так как направляющими косинусами прямой $\overrightarrow{PM'}$ будут теперь α', β', $-\gamma'$, то A^2 будет иметь одно и то же значение в точках M и M', а поэтому мы будем иметь

$$\iint\limits_{(\Omega)} \frac{\alpha'\gamma'\,d\omega}{A^2} = \iint\limits_{(\Sigma)} \frac{\alpha'\gamma'\,d\omega}{A^2} + \iint\limits_{(\Sigma')} \frac{\alpha'(-\gamma')\,d\omega}{A^2} = 0.$$

Точно так же показывается, что равны нулю и два других интеграла. Следовательно, $\overline{U}=0$, а заменяя теперь C его значением, мы представим $U(P)$ в виде

$$U(P) = f\mu\delta\,[U_0 + U_1x^2 + U_2y^2 + U_3z^2], \tag{3.43}$$

где введены обозначения

$$U_0 = \frac{1}{2} \iint\limits_{(\Omega)} \frac{d\omega}{A},$$

$$U_1 = \frac{1}{a^4} \iint\limits_{(\Omega)} \frac{\alpha'^2\, d\omega}{A^2} - \frac{1}{2a^2} \iint\limits_{(\Omega)} \frac{d\omega}{A},$$

$$U_2 = \frac{1}{b^4} \iint\limits_{(\Omega)} \frac{\beta'^2\, d\omega}{A^2} - \frac{1}{2b^2} \iint\limits_{(\Omega)} \frac{d\omega}{A},$$

$$U_3 = \frac{1}{c^4} \iint\limits_{(\Omega)} \frac{\gamma'^2\, d\omega}{A^2} - \frac{1}{2c^2} \iint\limits_{(\Omega)} \frac{d\omega}{A}.$$

Легко проверить теперь, что

$$U_1 = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{U_0}{a}\right), \quad U_2 = \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{U_0}{b}\right), \quad U_3 = \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{U_0}{c}\right),$$

а поэтому нахождение коэффициентов формы (3.43) сводится к вычислению одного-единственного интеграла U_0.

Чтобы получить классическое выражение для $U(P)$, введем вместо направляющих косинусов α', β', γ' два независимых угла ε, u, полагая

$$\alpha' = \cos\varepsilon, \quad \beta' = \sin\varepsilon\cos u, \quad \gamma' = \sin\varepsilon\sin u.$$

Тогда $d\omega = \sin\varepsilon\, d\varepsilon\, du$ и

$$A = \left(\frac{\cos^2\varepsilon}{a^2} + \frac{\sin^2\varepsilon}{b^2}\right)\cos^2 u + \\ + \left(\frac{\cos^2\varepsilon}{a^2} + \frac{\sin^2\varepsilon}{c^2}\right)\sin^2 u = p\cos^2 u + q\sin^2 u,$$

и мы находим, что

$$U_0 = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \sin\varepsilon\, d\varepsilon \int\limits_0^{2\pi} \frac{du}{p\cos^2 u + q\sin^2 u}.$$

Так как

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{du}{p\cos^2 u + q\sin^2 u} = \frac{4}{q}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\,\mathrm{tg}\, u}{\frac{p}{q} + \mathrm{tg}^2 u} = \\ = \frac{4}{\sqrt{pq}}\left|\begin{matrix} \frac{\pi}{2} \\ \\ 0 \end{matrix}\right. \mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}\, u}{\sqrt{p/q}}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{pq}},$$

то,

$$U_0 = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin\varepsilon\, d\varepsilon}{\sqrt{pq}} = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varepsilon\, d\varepsilon}{\sqrt{pq}}.$$

Вводя, наконец, вместо ε новую переменную интегрирования s при помощи подстановки

$$\cos\varepsilon = \frac{a}{\sqrt{a^2+s}}, \qquad \sin\varepsilon\, d\varepsilon = \frac{a\, ds}{2\,(a^2+s)^{3/2}},$$

мы получим

$$U_0 = \pi abc \int_0^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}} = \pi abc \int_0^{\infty} \frac{ds}{R(s)}, \tag{3.44}$$

после чего немедленно находим

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{U_0}{a}\right) = -\pi abc \int_0^{\infty} \frac{ds}{(a^2+s)\,R(s)},\\ U_2 &= \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{U_0}{b}\right) = -\pi abc \int_0^{\infty} \frac{ds}{(b^2+s)\,R(s)},\\ U_3 &= \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{U_0}{c}\right) = -\pi abc \int_0^{\infty} \frac{ds}{(c^2+s)\,R(s)}. \end{aligned}\right\} \tag{3.45}$$

Здесь, как и в предыдущем параграфе, положено

$$R(s) = \sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}.$$

Теперь с помощью формул (3.44) и (3.45) мы можем представить формулу (3.43) в следующем классическом виде:

$$U(P) = f\mu\delta\pi abc \int_0^{\infty} \left[1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}\right] \frac{ds}{R(s)}. \tag{3.46}$$

Отметим, что U_0, $-U_1$, $-U_2$, $-U_3$ суть заведомо положительные числа, а поэтому значение силовой функции в центре эллипсоида, т. е.

$$U(0)=f\mu\delta U_0=f\mu\delta\pi abc\int_0^\infty\frac{ds}{R(s)},$$

есть ее максимум.

Из выписанных формул сразу получаем составляющие силы притяжения, действующей на точку P, лежащую внутри эллипсоида

$$\left.\begin{aligned}X&=\frac{\partial U}{\partial x}=2f\mu\delta U_1\cdot x,\\ Y&=\frac{\partial U}{\partial y}=2f\mu\delta U_2\cdot y,\\ Z&=\frac{\partial U}{\partial z}=2f\mu\delta U_3\cdot z,\end{aligned}\right\}\qquad(3.47)$$

каждая из которых пропорциональна соответствующей координате точки.

С помощью формулы (3.46) легко доказать общую теорему Ньютона (уже доказанную нами выше для шарового слоя).

Теорема Ньютона. *Однородный слой, заключенный между двумя концентрическими, подобными и подобно расположенными эллипсоидами, не оказывает никакого притяжения на материальную точку, находящуюся во внутренней полости этого слоя.*

Пусть даны два концентрических подобных и подобно расположенных эллипсоида E и E' с полуосями соответственно

$$a,\ b,\ c \text{ и } a'=ka,\quad b'=kb,\quad c'=kc\quad (k>1).$$

Обозначим силовую функцию однородного слоя с плотностью δ, заключенного между эллипсоидами E и E', через V. Очевидно, что эта силовая функция может быть рассматриваема как разность силовых функций двух полных однородных эллипсоидов E' и E, т. е. мы можем написать

$$V(P)=f\mu\delta\,[V_0+V_1x^2+V_2y^2+V_3z^2],$$

где

$$V_0=U_0'-U_0,\ V_1=U_1'-U_1,\ V_2=U_2'-U_2,\ V_3=U_3'-U_3.$$

Полагая теперь аналогично предыдущему

$$R'(s')=\sqrt{(a'^2+s')(b'^2+s')(c'^2+s')},$$

мы получим для U'_0, $U'_1, \ldots$ следующие выражения:

$$U'_0=\pi a'b'c'\int_0^\infty \frac{ds'}{R'(s')},\quad U'_1=-\pi a'b'c'\int_0^\infty \frac{ds'}{(a'^2+s')R'(s')},\ldots$$

Делая в этих интегралах подстановку $s'=k^2 s$, мы найдем, что

$$U'_0=k^2U_0,\quad U'_1=U_1,\quad U'_2=U_2,\quad U'_3=U_3,$$

откуда

$$V_0=(k^2-1)U_0,\quad V_1=V_2=V_3=0.$$

Следовательно,

$$V(P)=f\mu\delta(k^2-1)U_0=\text{const},$$

и составляющие силы притяжения, действующей на точку P, равны нулю. Таким образом, теорема Ньютона доказана.

Если во внутренней полости однородного эллипсоидального слоя находится не материальная точка (частица), а некоторое материальное тело (т. е. совокупность множества материальных частиц), то это тело также не испытывает притяжения со стороны слоя и, разумеется, само не оказывает на этот слой никакого влияния.

Примечание. Можно показать, как это сделано Дивом *), что теорема Ньютона допускает обращение. А именно, Див доказал, что если материальная точка, находящаяся во внутренней пустой полости некоторого однородного тела, ограниченного подобными поверхностями, не испытывает никакого притяжения, то это тело есть необходимо однородный эллипсоидальный слой, ограниченный двумя концентрическими, подобными и подобно расположенными эллипсоидами.

---

*) P. Dive, Attraction des ellipsoides homogénes et réciproque d'un théorème de Newton, Bulletin de la Société Mathematique de France, т. LIX, 1931.