§ 6. Притяжение однородным эллипсоидом внешней точки

Прежде чем перейти к нахождению силовой функции однородного эллипсоида для случая, когда притягиваемая точка лежит вне эллипсоида, рассмотрим сначала две вспомогательные теоремы, одна из которых принадлежит Айвори, а другая называется теоремой Маклорена, или теоремой Лапласа.

Пусть даны два концентрических, софокусных и подобно расположенных эллипсоида E и E' с полуосями a, b, c, a', b', c' соответственно. Вообразим, что оба эллипсоида заполнены однородной притягивающей материей с плотностью δ. Рассмотрим некоторую определенную точку $P(x, y, z)$ эллипсоида E и соответствующую ей (в смысле Айвори) точку $P'(x', y', z')$ эллипсоида E'. Тогда координаты обеих точек связаны соотношениями

$$x' = \frac{a'}{a} x, \quad y' = \frac{b'}{b} y, \quad z' = \frac{c'}{c} z.$$

Установив это, сравним притяжение, которое оказывает эллипсоид E на материальную частицу массы μ, помещенную в точке P', с притяжением, которое оказывает эллипсоид E' на частицу той же массы μ, помещенную в точке P.

Для этого вычислим составляющие сил, действующих на точки P' и P, по формулам Римана (2.38), которые для нашего случая ($\delta = \text{const}$) значительно упрощаются и дают

$$X(P') = -f\mu\delta \int\limits_{(E)}\int \frac{\alpha\, d\sigma}{\Delta},$$

где Δ есть расстояние между точкой P' и текущей точкой $M(x_1, y_1, z_1)$ поверхности E, а α есть направляющий косинус внешней нормали к E в точке M; аналогично

$$X'(P) = -f\mu\delta \int\limits_{(E')}\int \frac{\alpha'\, d\sigma'}{\Delta'},$$

где Δ' есть расстояние от точки P до текущей точки $M'(x_1', y_1', z_1')$ поверхности E', а α' есть направляющий косинус внешней нормали к E' в точке M'.

Так как каждой точке эллипсоида E соответствует (в смысле Айвори) единственная точка эллипсоида E', то мы можем считать, что текущая точка M' на E' соответствует текущей точке M на E, т. е. что

$$x_1' = \frac{a'}{a} x_1, \quad y_1' = \frac{b'}{b} y_1, \quad z_1' = \frac{c'}{c} z_1;$$

аналогично точки P и P' также соответствуют друг другу, и по теореме Айвори, доказанной в предыдущем параграфе, мы имеем

$$\overline{PM'} = \overline{P'M}.$$

Заметим теперь, что $\alpha\, d\sigma$ есть проекция площади $d\sigma$ поверхности E на координатную плоскость yOz. Поэтому мы можем положить $\alpha\, d\sigma = dy_1\, dz_1$ и написать

$$X(P') = -2f\mu\delta \int\int_{(Э)} \frac{dy_1\, dz_1}{\Delta},$$

где интегрирование распространено на площадь Э эллипса, получающегося в пересечении поверхности E плоскостью yOz. Аналогично

$$X'(P) = -2f\mu\delta \int\int_{(Э')} \frac{dy_1'\, dz_1'}{\Delta'},$$

где интегрирование распространено на площадь Э$'$ эллипса, получающегося в пересечении поверхности E' той же плоскостью yOz. Но очевидно, что

$$dy_1'\, dz_1' = \frac{b'c'}{bc} dy_1\, dz_1$$

и, кроме того,

$$\Delta' = \Delta,$$

так что выражение для составляющей $X'(P)$ принимает вид

$$X'(P) = -2f\mu\delta \frac{b'c'}{bc} \int\int_{(Э)} \frac{dy_1\, dz_1}{\Delta}.$$

Отсюда выводим

$$X'(P) = \frac{b'c'}{bc} X(P'), \quad Y'(P) = \frac{c'a'}{ca} Y(P'), \quad Z'(P) = \frac{a'b'}{ab} Z(P),$$

причем два последних равенства написаны по очевидной аналогии.

Таким образом, мы доказали теорему, также принадлежащую Айвори.

Теорема Айвори. *Составляющие по одной и той же оси сил, действующих на частицы одинаковой массы, помещенные в соответственных точках двух софокусных эллипсоидов, относятся как площади главных сечений эллипсоидов, перпендикулярных к этой оси.*

Переходим ко второй вспомогательной теореме, которая может быть рассматриваема как следствие только что доказанной теоремы Айвори.

Рассмотрим для этого два концентрических, софокусных и подобно расположенных эллипсоида E_1 и E_2 с полуосями a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2 соответственно. Представим себе, что эллипсоид E_1 заполнен однородной притягивающей материей с плотностью δ_1, а E_2 — материей с плотностью δ_2.

Возьмем точку $P'(x', y', z')$, лежащую вне обоих эллипсоидов, и пусть E' есть эллипсоид с полуосями a', b', c', проходящий через эту точку и софокусный эллипсоидам E_1 и E_2.

Вообразим, что E' заполняется однородной материей с плотностью δ_1 или с плотностью δ_2.

Пусть теперь P_1 и P_2 суть точки, лежащие соответственно на E_1 и E_2 и соответствующие (в смысле Айвори) точке P' на E'. Тогда

$$x' = \frac{a'}{a_1} x_1, \quad y' = \frac{b'}{b_1} y_1, \quad z' = \frac{c'}{c_1} z_1$$

и

$$x' = \frac{a'}{a_2} x_2, \quad y' = \frac{b'}{b_2} y_2, \quad z' = \frac{c'}{c_2} z_2,$$

откуда имеем также

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{a_1}{a_2}, \quad \frac{y_1}{y_2} = \frac{b_1}{b_2}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Поместим теперь в точках P', P_1, P_2 материальные частицы массы μ и обозначим через $X_1(P')$, $X_2(P')$ составляющие сил, действующих на точку P' со стороны эллипсоидов E_1 и E_2. Далее, обозначим через $X_1'(P_1)$ и $X_2'(P_2)$ составляющие сил, действующих на точки P_1 и P_2, соответственно, со стороны эллипсоида E', заполненного материей с плотностью δ_1 и δ_2. Тогда по теореме Айвори будем иметь

$$X_1(P') = \frac{b_1 c_1}{b'c'} X_1'(P_1), \quad X_2(P') = \frac{b_2 c_2}{b'c'} X_2'(P_2), \tag{3.48}$$

откуда

$$X_1(P') : X_2(P') = b_1 c_1 X_1'(P_1) : b_2 c_2 X_2'(P_2).$$

Так как формулы (3.47), примененные к точкам P_1 и P_2, которые лежат внутри E', дают

$$X_1'(P_1) : X_2'(P_2) = \delta_1 x_1 : \delta_2 x_2 = \delta_1 a_1 : \delta_2 a_2,$$

то из отношений (3.48) находим

$$X_1(P') : X_2(P') = \delta_1 a_1 b_1 c_1 : \delta_2 a_2 b_2 c_2 = m_1 : m_2 \,^{*}).$$

Совершенно точно так же

$$Y_1(P') : Y_2(P') = m_1 : m_2, \quad Z_1(P') : Z_2(P') = m_1 : m_2,$$

откуда и получается

Теорема Лапласа. *Однородные софокусные эллипсоиды притягивают внешнюю точку с силами, направления которых совпадают и величины которых пропорциональны массам эллипсоидов.*

Обозначим теперь через $U_1(P)$ и $U_2(P)$ силовые функции двух софокусных эллипсоидов E_1 и E_2 на точку $P(x, y, z)$, внешнюю для них обоих. Тогда по теореме Лапласа можем написать

$$\frac{1}{m_1}\frac{\partial U_1}{\partial x} - \frac{1}{m_2}\frac{\partial U_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{1}{m_1}\frac{\partial U_1}{\partial y} - \frac{1}{m_2}\frac{\partial U_2}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{1}{m_1}\frac{\partial U_1}{\partial z} - \frac{1}{m_2}\frac{\partial U_2}{\partial z} = 0,$$

откуда имеем

$$\frac{U_1}{m_1} - \frac{U_2}{m_2} = \text{const}.$$

---

*) Объем трехосного эллипсоида равен $^4/_3\,\pi abc$.

Но по свойствам силовой функции во внешнем пространстве U_1 и U_2 обращаются в нули, когда точка P удаляется в бесконечность. Поэтому постоянная в правой части равенства есть нуль, и мы имеем

$$U_1 : U_2 = m_1 : m_2,$$

что дает теорему Маклорена.

Теорема Маклорена. *Силовые функции двух однородных софокусных эллипсоидов на внешнюю точку относятся как массы этих эллипсоидов.*

Теперь нетрудно получить выражение для силовой функции однородного эллипсоида E с полуосями a, b, c и с плотностью δ, когда точка $P(x, y, z)$ массы μ находится вне эллипсоида E, т. е. когда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} > 1.$$

Проведем через точку P эллипсоид E', софокусный эллипсоиду E. Полуоси эллипсоида E' определяются, как известно, формулами

$$a'^2 = a^2 + \lambda, \quad b'^2 = b^2 + \lambda, \quad c'^2 = c^2 + \lambda,$$

где λ есть положительный корень уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1 \tag{3.49}$$

и есть некоторая функция от x, y, z.

Представим себе, что эллипсоид E' заполнен притягивающей материей с плотностью δ. Так как точка P лежит на поверхности E', то ее можно рассматривать с одинаковым правом и как внешнюю и как внутреннюю точку для E'. Рассматривая точку P как внешнюю для E', мы можем применить теорему Маклорена и написать

$$U(P) : U'(P) = m : m',$$

где $U'(P)$ обозначает силовую функцию эллипсоида E', а m' — массу этого эллипсоида.

Рассматривая теперь точку P как внутреннюю для E', мы можем определить $U'(P)$ по формуле (3.46), что дает

$$U'(P) = f\mu\,\delta\pi a'b'c' \int_0^\infty \left[1 - \frac{x^2}{a'^2+s} - \frac{y^2}{b'^2+s} - \frac{z^2}{c'^2+s}\right] \frac{ds'}{R'(s')}.$$

Подставляя это значение для $U'(P)$ в предыдущее равенство и заменяя m и m' их значениями, мы получим

$$U(P) = f\mu\,\delta\pi abc \int_0^\infty \frac{\left[1 - \frac{x^2}{a^2+\lambda+s'} - \frac{y^2}{b^2+\lambda+s'} - \frac{z^2}{c^2+\lambda+s'}\right] ds'}{\sqrt{(a^2+\lambda+s')(b^2+\lambda+s')(c^2+\lambda+s')}}.$$

Делая здесь подстановку $s = \lambda + s'$, будем иметь окончательно

$$U(P) = f\mu\,\delta\pi abc \int_\lambda^\infty \left[1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}\right] \frac{ds}{R(s)}, \tag{3.50}$$

а это и есть классическое выражение силовой функции однородного эллипсоида на внешнюю точку.

Теперь простым дифференцированием (3.50) получим составляющие силы, с которой эллипсоид притягивает внешнюю точку P:

$$\left.\begin{aligned} X(P) &= \frac{\partial U}{\partial x} = -2f\mu\,\delta\pi abcx \int_\lambda^\infty \frac{ds}{(a^2+s)R(s)}, \\ Y(P) &= \frac{\partial U}{\partial y} = -2f\mu\,\delta\pi abcy \int_\lambda^\infty \frac{ds}{(b^2+s)R(s)}, \\ Z(P) &= \frac{\partial U}{\partial z} = -2f\mu\,\delta\pi abcz \int_\lambda^\infty \frac{ds}{(c^2+s)R(s)}. \end{aligned}\right\} \tag{3.51}$$

Полагая еще, по аналогии с формулами (3.44) и (3.45),

$$U_0(\lambda) = \pi abc \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{R(s)},$$

$$U_1(\lambda) = -\pi abc \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{(a^2+s)\,R(s)} = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{U_0(\lambda)}{a}\right),$$

$$U_2(\lambda) = -\pi abc \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{(b^2+s)\,R(s)} = \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{U_0(\lambda)}{b}\right),$$

$$U_3(\lambda) = -\pi abc \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{(c^2+s)\,R(s)} = \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{U_0(\lambda)}{c}\right)^{*)},$$

мы представим формулы (3.50) и (3.51) в следующем виде:

$$U(P) = f\mu\delta\,[U_0(\lambda) + U_1(\lambda)\,x^2 + U_2(\lambda)\,y^2 + U_3(\lambda)\,z^2],$$
$$X(P) = 2f\mu\,\delta x U_1(\lambda),$$
$$Y(P) = 2f\mu\,\delta y U_2(\lambda),$$
$$Z(P) = 2f\mu\,\delta z U_3(\lambda).$$

Нетрудно видеть, что если положить в вышеприведенных формулах $\lambda = 0$, то получатся формулы предыдущего параграфа для случая внутренней точки.

§ 7. Притяжение однородных эллипсоидов вращения

Формулы, полученные нами для силовой функции и составляющих силы притяжения однородного трехосного эллипсоида, содержат квадратуры, не вычисляемые в элементарных функциях.

Действительно, все эти формулы содержат величину

$$R(s) = \sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)},$$

т. е. квадратный корень из многочлена третьей степени относительно переменной интегрирования s. Поэтому все эти

*) Нужно иметь в виду, что при этих дифференцированиях λ рассматривается как величина постоянная.