Полагая еще, по аналогии с формулами (3.44) и (3.45),

$$U_0(\lambda) = \pi abc \int_\lambda^\infty \frac{ds}{R(s)},$$

$$U_1(\lambda) = -\pi abc \int_\lambda^\infty \frac{ds}{(a^2+s)R(s)} = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{U_0(\lambda)}{a}\right),$$

$$U_2(\lambda) = -\pi abc \int_\lambda^\infty \frac{ds}{(b^2+s)R(s)} = \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{U_0(\lambda)}{b}\right),$$

$$U_3(\lambda) = -\pi abc \int_\lambda^\infty \frac{ds}{(c^2+s)R(s)} = \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{U_0(\lambda)}{c}\right)^{*)},$$

мы представим формулы (3.50) и (3.51) в следующем виде:

$$U(P) = f\mu\delta\,[U_0(\lambda) + U_1(\lambda)x^2 + U_2(\lambda)y^2 + U_3(\lambda)z^2],$$
$$X(P) = 2f\mu\,\delta x U_1(\lambda),$$
$$Y(P) = 2f\mu\,\delta y U_2(\lambda),$$
$$Z(P) = 2f\mu\,\delta z U_3(\lambda).$$

Нетрудно видеть, что если положить в вышеприведенных формулах $\lambda = 0$, то получатся формулы предыдущего параграфа для случая внутренней точки.

§ 7. Притяжение однородных эллипсоидов вращения

Формулы, полученные нами для силовой функции и составляющих силы притяжения однородного трехосного эллипсоида, содержат квадратуры, не вычисляемые в элементарных функциях.

Действительно, все эти формулы содержат величину

$$R(s) = \sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)},$$

т. е. квадратный корень из многочлена третьей степени относительно переменной интегрирования s. Поэтому все эти

---

*) Нужно иметь в виду, что при этих дифференцированиях λ рассматривается как величина постоянная.

интегралы суть интегралы эллиптические и могут быть выражены, если угодно, через эллиптические функции.

Однако если две из полуосей равны между собой, т. е. если трехосный эллипсоид превращается в эллипсоид вращения, то в выражении для $R(s)$ под знаком корня остается только двучлен первой степени относительно s, вследствие чего все интересующие нас интегралы делаются легко вычисляемыми и выражаются через простые, элементарные, функции.

Чтобы показать это, преобразуем предварительно интегралы общего случая, вводя вместо полуосей эллипсоида E так называемые вторые эксцентриситеты l и l_1, определяемые формулами

$$l^2=\frac{a^2-c^2}{c^2}, \quad l_1^2=\frac{b^2-c^2}{c^2};$$

так как при принятом нами условии для полуосей

$$c \leqslant b \leqslant a,$$

то l^2 и l_1^2 не могут быть отрицательны.

Следовательно, l и l_1 всегда вещественны. Им приписывают обыкновенно только положительные значения, т. е. принимают

$$l=\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c}, \quad l_1=\frac{\sqrt{b^2-c^2}}{c}.$$

Заметим, что если мы введем первое и второе сжатия эллипсоида α и α_1, полагая, как принято,

$$\alpha=\frac{a-c}{a}, \quad \alpha_1=\frac{b-c}{b},$$

то будем иметь следующие соотношения:

$$\alpha=1-\frac{1}{\sqrt{1+l^2}}, \quad \alpha_1=1-\frac{1}{\sqrt{1+l_1^2}}$$

и

$$l=\frac{\sqrt{2\alpha-\alpha^2}}{1-\alpha}, \quad l_1=\frac{\sqrt{2\alpha_1-\alpha_1^2}}{1-\alpha_1}.$$

Отметим следующие частные случаи: 1) $l_1=l$, тогда и $\alpha_1=\alpha$, а также $b=a$, т. е. E в этом случае есть «сжатый» эллипсоид вращения; 2) $l_1=0$, $l\neq 0$, тогда $\alpha_1=0$ или $b=c$, т. е. в этом случае E есть «вытянутый» эллипсоид вращения; 3) $l_1=l=0$, т. е. $\alpha_1=\alpha=0$ и $c=b=a$, т. е. E есть шар.

Введем теперь вместо s новую переменную интегрирования t посредством подстановки

$$t=\frac{c}{\sqrt{c^2+s}}.$$

Тогда

$$a^2+s=\frac{c^2}{t^2}(1+l^2t^2),\quad b^2+s=\frac{c^2}{t^2}(1+l_1^2t^2),\quad c^2+s=\frac{c^2}{t^2},$$

и если мы положим еще

$$u=\frac{c}{\sqrt{c^2+\lambda}},$$

то u будет удовлетворять уравнению

$$\frac{x^2}{1+l^2u^2}+\frac{y^2}{1+l_1^2u^2}+\frac{z^2}{1}=\frac{c^2}{u^2}.$$

Делая теперь указанную подстановку, мы получим для силовой функции и составляющих силы притяжения следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned}
U(P)&=\frac{3}{2}f\mu m[\bar{U}_0(u)+\bar{U}_1(u)x^2+\\
&\qquad\qquad+\bar{U}_2(u)y^2+\bar{U}_3(u)z^2],\\
X(P)&=3f\mu mx\bar{U}_1(u),\\
Y(P)&=3f\mu my\bar{U}_2(u),\\
Z(P)&=3f\mu mz\bar{U}_3(u),
\end{aligned}\right\}\tag{3.52}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
c\bar{U}_0(u)&=+\int_0^u\frac{dt}{\sqrt{(1+l^2t^2)(1+l_1^2t^2)}},\\
c^3\bar{U}_1(u)&=-\int_0^u\frac{t^2\,dt}{(1+l^2t^2)\sqrt{(1+l^2t^2)(1+l_1^2t^2)}},\\
c^3\bar{U}_2(u)&=-\int_0^u\frac{t^2\,dt}{(1+l_1^2t^2)\sqrt{(1+l^2t^2)(1+l_1^2t^2)}},\\
c^3\bar{U}_3(u)&=-\int_0^u\frac{t^2\,dt}{\sqrt{(1+l^2t^2)(1+l_1^2t^2)}},
\end{aligned}\right\}\tag{3.53}$$

$$m=\frac{4}{3}\pi abc\delta=\frac{4}{3}\pi c^3\delta\sqrt{(1+l^2)(1+l_1^2)}.$$

Формулы (3.52) и (3.53) справедливы также и для случая внутренней точки. Только в последнем случае $\lambda=0$, и следовательно, в формулах (3.52) и (3.53) нужно положить $u=1$.

Заметим еще, что вычисление $\bar{U}_1$ и $\bar{U}_2$ приводится к вычислению $\bar{U}_0$, так как мы имеем легко проверяемые соотношения

$$c^3\bar{U}_1(u)=\frac{1}{l}\frac{\partial(c\bar{U}_0)}{\partial l}, \qquad c^3\bar{U}_2(u)=\frac{1}{l_1}\frac{\partial(c\bar{U}_0)}{\partial l_1}. \tag{3.54}$$

Переходим теперь к рассмотрению частных случаев. Полагая в формулах (3.53) $l_1=l$, имеем

$$c\bar{U}_0(u)=\int_0^u \frac{dt}{1+l^2t^2},$$

$$c^3\bar{U}_1(u)=c^3\bar{U}_2(u)=-\int_0^u \frac{t^2\,dt}{(1+l^2t^2)^2},$$

$$c^3\bar{U}_3(u)=-\int_0^u \frac{t^2\,dt}{1+l^2t^2}.$$

Первый из этих интегралов — табличный, второй вычисляется по формуле (3.54), а третий сводится к первому. Выполняя эти вычисления, найдем

$$c\bar{U}_0(u)=\frac{1}{l}\operatorname{arctg}(lu),$$

$$c^3\bar{U}_1(u)=c^3\bar{U}_2(u)=\frac{1}{l^3}\left[\frac{lu}{1+l^2u^2}-\operatorname{arctg}(lu)\right],$$

$$c^3\bar{U}_3(u)=\frac{1}{l^3}\left[\operatorname{arctg}(lu)-lu\right],$$

причем u определяется из уравнения

$$\frac{x^2+y^2}{1+l^2u^2}+\frac{z^2}{1}=\frac{c^2}{u^2}.$$

Подставляя эти выражения в формулы (3.52), мы получаем выражения для силовой функции и составляющих силы притяжения однородного сжатого эллипсоида вращения, когда притягиваемая точка P находится вне эллипсоида:

$$U(P)=\frac{3f\mu m}{2lc}\left\{\operatorname{arctg}(lu)+\frac{x^2+y^2}{l^2c^2}\left[\frac{lu}{1+l^2u^2}-\operatorname{arctg}(lu)\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{z^2}{l^2c^2}[\operatorname{arctg}(lu)-lu]\right\},$$

$$\frac{X(P)}{x}=\frac{Y(P)}{y}=\frac{3f\mu m}{l^3c^3}\left[\frac{lu}{1+l^2u^2}-\operatorname{arctg}(lu)\right],$$

$$\frac{Z(P)}{z}=\frac{3f\mu m}{l^3c^3}[\operatorname{arctg}(lu)-lu].$$

Полагая здесь $u=1$, получим выражения для силовой функции и составляющих силы притяжения, для случая, когда притягиваемая точка P находится внутри или на поверхности эллипсоида.

Полезно еще выписать выражение для силовой функции однородного сжатого эллипсоида вращения, получающееся из общей формулы (3.50) при $b=a$:

$$U(P)=\frac{3}{4}f\mu m\int_{\lambda}^{\infty}\left[1-\frac{x^2+y^2}{a^2+s}-\frac{z^2}{c^2+s}\right]\frac{ds}{(a^2+s)\sqrt{c^2+s}},$$

где $m=\frac{4}{3}\pi a^2c\delta$ и λ определяется уравнением

$$\frac{x^2+y^2}{a^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1;$$

при $\lambda=0$ получаем силовую функцию сжатого эллипсоида вращения для внутренней точки.

Рассмотрим теперь случай вытянутого эллипсоида вращения. Полагая для этого в формулах (3.53) $l_1=0$, мы имеем

$$c\bar{U}_0(u)=\int_0^u\frac{dt}{\sqrt{1+l^2t^2}},$$

$$c^3\bar{U}_1(u)=-\int_0^u\frac{t^2\,dt}{(1+l^2t^2)\sqrt{1+l^2t^2}},$$

$$c^3\bar{U}_2(u)=c^3\bar{U}_3(u)=-\int_0^u\frac{t^2\,dt}{\sqrt{1+l^2t^2}}.$$

Первый из этих интегралов — табличный, второй вычисляется по формуле (3.54), а третий сводится к табличным интегралам при помощи интегрирования по частям. Производя эти вычисления, мы получим

$$c\bar{U}_0(u) = \frac{1}{l}\ln\left(\sqrt{1+l^2u^2}+lu\right),$$

$$c^3\bar{U}_1(u) = \frac{1}{l^3}\left[\frac{lu}{\sqrt{1+l^2u^2}} - \ln\left(\sqrt{1+l^2u^2}+lu\right)\right],$$

$$c^3\bar{U}_2(u) = c^3\bar{U}_3(u) = \frac{1}{l^3}\left[\ln\left(\sqrt{1+l^2u^2}+lu\right) - lu\sqrt{1+l^2u^2}\right],$$

причем u определяется из уравнения

$$\frac{x^2}{1+l^2u^2} + \frac{y^2+z^2}{1} = \frac{c^2}{u^2}.$$

Подставляя полученные выражения в формулы (3.52), мы будем иметь выражения для силовой функции и составляющих силы притяжения однородного вытянутого эллипсоида вращения для случая, когда притягиваемая точка находится вне эллипсоида:

$$U(P) = \frac{3f\mu m}{2lc}\left\{\ln\left(\sqrt{1+l^2u^2}+lu\right) + \right.$$
$$+\frac{x^2}{l^2c^2}\left[\frac{lu}{\sqrt{1+l^2u^2}} - \ln\left(\sqrt{1+l^2u^2}+lu\right)\right] +$$
$$\left. + \frac{y^2+z^2}{l^2c^2}\left[\ln\left(\sqrt{1+l^2u^2}+lu\right) - lu\sqrt{1+l^2u^2}\right]\right\},$$

$$\frac{X(P)}{x} = \frac{3f\mu m}{l^3c^3}\left[\frac{lu}{\sqrt{1+l^2u^2}} - \ln\left(\sqrt{1+l^2u^2}+lu\right)\right],$$

$$\frac{Y(P)}{y} = \frac{Z(P)}{z} = \frac{3f\mu m}{l^3c^3}\left[\ln\left(\sqrt{1+l^2u^2}+lu\right) - lu\sqrt{1+l^2u^2}\right].$$

Полагая здесь $u=1$, получим формулы для силовой функции и составляющих силы притяжения для случая, когда притягиваемая точка находится внутри или на поверхности эллипсоида.

Здесь также полезно выписать еще выражение для силовой функции однородного вытянутого эллипсоида, получающееся из общей формулы (3.50) при $b=c$:

$$U(P)=\frac{3}{4}f\mu m\int_{\lambda}^{\infty}\left[1-\frac{x^2}{a^2+s}-\frac{y^2+z^2}{c^2+s}\right]\frac{ds}{(c^2+s)\sqrt{a^2+s}},$$

где $m=\frac{4}{3}\pi ac^2\delta$ и λ определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2+z^2}{b^2+\lambda}=1;$$

при $\lambda=0$ получаем силовую функцию вытянутого эллипсоида вращения для внутренней точки.

Наконец, при $l=l_1=0$ формулы (3.53) дают

$$c\bar{U}_0(u)=u,\quad c^3\bar{U}_1(u)=c^3\bar{U}_2(u)=c^3\bar{U}_3(u)=-\frac{1}{3}u^3,$$

откуда

$$U(P)=\frac{3f\mu m}{2c}\left[u-\frac{1}{3}u^3\frac{x^2+y^2+z^2}{c^2}\right]$$

и

$$\frac{X(P)}{x}=\frac{Y(P)}{y}=\frac{Z(P)}{z}=-\frac{f\mu m}{c^3}u^3,$$

где для внешней точки u определяется из уравнения

$$x^2+y^2+z^2=\frac{c^2}{u^2},$$

а для внутренней точки $u=1$.

Полагая

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

имеем для внешней точки

$$u=\frac{c}{r},$$

откуда выражение для силовой функции принимает вид

$$U(P)=f\frac{\mu m}{r}.$$

Для внутренней точки получаем силовую функцию в виде

$$U(P)=\frac{f\mu m}{2c^3}(3c^2-r^2).$$

Таким образом, мы еще раз получили формулы для силовой функции однородного шара для внешней и внутренней точек.