§ 8. Притяжение неоднородного эллипсоида

Мы видели, что легко найти силовую функцию шара, не являющегося однородным, но обладающим сферическим распределением плотностей.

Покажем теперь, что этот результат можно некоторым образом обобщить также и для трехосного эллипсоида, заменяя только сферическое распределение плотностей эллипсоидальным. Разъясним прежде всего, что мы будем подразумевать под эллипсоидальным распределением плотностей.

Пусть задан трехосный эллипсоид E с полуосями a, b, c, причем, как и ранее, будем считать, что

$$c \leqslant b \leqslant a.$$

Если за оси координат принять, как мы уже делали, главные оси эллипсоида, то его уравнение можно написать в виде

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{E}$$

Пусть x', y', z' суть текущие координаты внутренней точки M и $\delta(x', y', z')$ — плотность эллипсоида в точке M. Вообразим семейство концентрических, подобных и подобно расположенных эллипсоидов с параметром k

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=k^2. \tag{E'_k}$$

Если при фиксированном значении k плотность δ имеет постоянное значение во всех точках поверхности E'_k, но изменяется произвольным образом при переходе с одной поверхности на другую, т. е. при изменении параметра k, то мы будем говорить, что эллипсоидальное тело T, ограниченное поверхностью эллипсоида E, обладает *эллипсоидальной структурой* или имеет *эллипсоидальное распределение плотностей*. Плотность $\delta(M)$ будет тогда функцией одного параметра k $(0 \leqslant k \leqslant 1)$, причем $k=0$ соответствует центру O эллипсоида E, а $k=1$ — его поверхности. Следовательно, мы можем написать

$$\delta(M)=\delta(k)=\delta\left(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}\right). \tag{3.55}$$

Ясно, что если $c=b=a$, то эллипсоид E превращается в шар и его плотность будет зависеть только от расстояния r от центра шара, т. е. в этом случае эллипсоидальное распределение превращается в сферическое.

Рассмотрим силовую функцию такого эллипсоидального тела и покажем, что для нее получается выражение, которое можно представить в виде некоторого однократного интеграла, похожего на интеграл в формуле (3.50).

Для вывода силовой функции мы поступим следующим образом: выделим из тела T бесконечно тонкий эллипсоидальный слой, ограниченный двумя бесконечно близкими поверхностями семейства E'_k, и найдем прежде всего выражение для силовой функции этого слоя, который можно считать однородным, на внешнюю и внутреннюю точку P.

Расслаивая все тело T на бесчисленное множество таких бесконечно тонких, однородных, эллипсоидальных слоев, мы получим затем силовую функцию всего тела как сумму силовых функций всех бесконечно тонких слоев, т. е. как интеграл от выражения силовой функции слоя, взятый по параметру k в пределах от нуля до единицы.

Итак, прежде всего нужно найти выражение для силовой функции бесконечно тонкого слоя T' с постоянной плотностью δ, ограниченного двумя бесконечно близкими, концентрическими, подобными и подобно расположенными эллипсоидами.

Для этого придется воспользоваться уже известной теоремой Ньютона, для которой мы дадим, пользуясь случаем, еще одно доказательство, основанное на чисто геометрическом рассмотрении.

Возьмем два эллипсоида E'_1 и E'_2 из семейства E' и предположим, что пространство между ними заполнено притягивающей материей с постоянной плотностью δ.

Рассмотрим точку P, лежащую во внутренней полости этого слоя T'. Проведем через эту точку произвольную прямую L, и пусть M_1 и N_1 суть точки пересечения L с E'_1, а M_2, N_2 — с E'_2. Тогда, как было показано в § 4, имеем всегда

$$\overline{M_1N_1}=\overline{M_2N_2}.$$

Вообразим теперь бесконечно тонкий конус с вершиной в точке P, осью которого является прямая L. Этот конус вырежет из слоя T' два конических сегмента равной высоты $\overline{M_1N_1}$ и $\overline{M_2N_2}$. Обозначая через Δ расстояние текущей точки прямой L от точки P, а через $d\omega$ телесный угол конуса, мы находим, что элемент массы слоя равен $\delta\Delta^2 d\Delta\, d\omega$, а сила притяжения, с которой этот элемент массы действует на частицу P массы μ, равна

$$f\mu \frac{\delta\Delta^2 d\Delta\, d\omega}{\Delta^2} = f\mu\delta\, d\Delta\, d\omega.$$

Интегрируя последнее выражение по Δ, получим величины сил притяжения, с которыми два бесконечно тонких конических сегмента действуют на точку P:

$$F_1 = f\mu\delta\, d\omega \int\limits_{\overline{PM_1}}^{\overline{PN_1}} d\Delta = f\mu\delta\, d\omega\, \overline{M_1N_1}$$

и

$$F_2 = f\mu\delta\, d\omega \int\limits_{\overline{PM_2}}^{\overline{PN_2}} d\Delta = f\mu\delta\, d\omega\, \overline{M_2N_2}.$$

Так как $\overline{M_1N_1} = \overline{M_2N_2}$, то эти силы равны по величине, а так как их направления противоположны, то они взаимно уравновешиваются, и под действием такой пары сил точка P не испытывает никакого притяжения.

Так как прямая L произвольна, то, воображая бесчисленное множество подобных прямых, мы разобьем всю притягивающую массу слоя на бесчисленное множество пар конических сегментов, действия которых на точку P равны по величине и противоположны по направлению.

Отсюда следует, что точка P массы μ, находящаяся во внутренней полости слоя T', не испытывает со стороны слоя никакого притяжения. А это и есть теорема Ньютона.

Если же точка P не испытывает притяжения от слоя, то составляющие силы притяжения по осям координат суть нули, а значит, силовая функция слоя на внутреннюю точку P имеет постоянное значение во всей внутренней полости слоя.

Рассмотрим теперь два бесконечно тонких эллипсоидальных слоя T' и T''. Пусть T' ограничен опять эллипсоидами E_1' и E_2' с полуосями соответственно a', b', c' и ka', kb', kc', где k — бесконечно мало отличается от единицы. Подобным же образом пусть слой T'' ограничен эллипсоидами

E_1'' и E_2'' с полуосями соответственно a'', b'', c'' и ka'', kb'', kc''. Плотности слоев T' и T'' пусть будут δ' и δ''.

Положим, что

$$a''^2 - a'^2 = b''^2 - b'^2 = c''^2 - c'^2,$$

т. е. что оба слоя софокусны.

Каждой текущей точке M' поверхности E_1' поставим в соответствие (в смысле Айвори) текущую точку M'' поверхности E_1', так что

$$x'' = \frac{a''}{a'} x', \quad y'' = \frac{b''}{b'} y', \quad z'' = \frac{c''}{c'} z'.$$

Тогда элементы объемов $d\tau'$ и $d\tau''$ слоев T' и T'' находятся в постоянном отношении, так как

$$d\tau'' : d\tau' = dx''\, dy''\, dz'' : dx'\, dy' dz' = a''b''c'' : a'b'c'.$$

Возьмем теперь на поверхностях E_1' и E_1'' соответственные точки P' и P''. Тогда по теореме Айвори, доказанной в § 4, имеем

$$\overline{P'M''} = \overline{P''M'}.$$

Обозначим через $U'(P'')$ силовую функцию слоя T' на точку P'' и через $U''(P')$ силовую функцию слоя T'' на точку P'. Тогда

$$U'(P'') = f\mu\delta' \int\int_{(T')}\int \frac{d\tau'}{\Delta'},$$

где можно считать, ввиду бесконечно малой толщины слоя T', расстояние Δ' равным $\overline{M'P''}$ и

$$U''(P') = f\mu\delta'' \int\int_{(T'')}\int \frac{d\tau''}{\Delta''},$$

где точно так же можно считать Δ'' равным $\overline{M''P'}$.

Преобразуем второй интеграл, учитывая, что $\Delta'' = \Delta'$:

$$U''(P') = f\mu \frac{\delta'' a'' b'' c''}{\delta' a' b' c'} \delta' \int\int_{(T')}\int \frac{d\tau'}{\Delta'} = \frac{a''b''c''\delta''}{a'b'c'\delta'} U'(P'').$$

Но $U''(P')$ есть силовая функция однородного слоя, ограниченного двумя подобными эллипсоидами E''_1 и E''_2 на точку P', лежащую во внутренней полости слоя T''.

По теореме Ньютона $U''(P')=\text{const}$, а следовательно, $U'(P'')$ также есть величина постоянная. Таким образом доказана следующая теорема.

Силовая функция однородного слоя, ограниченного двумя подобными, бесконечно близкими эллипсоидами, имеет постоянное значение во всех точках эллипсоида, софокусного данному слою.

Пусть $P(x, y, z)$ есть точка, лежащая вне слоя T', ограниченного поверхностью E'_1 с полуосями a', b', c' и бесконечно близкой к ней поверхностью E'_2. Тогда уравнение эллипсоида, проходящего через точку P и софокусного эллипсоиду E'_1, имеет вид

$$\frac{x^2}{a'^2+\lambda'}+\frac{y^2}{b'^2+\lambda'}+\frac{z^2}{c'^2+\lambda'}=1. \tag{3.56}$$

Во всех точках эллипсоида (3.56) силовая функция слоя T' имеет, согласно только что доказанной теореме, постоянное значение, но при переходе с одного софокусного эллипсоида на другой, т. е. при изменении λ', силовая функция также, конечно, будет изменяться. Следовательно, силовая функция U' бесконечно тонкого слоя T' на внешнюю точку P, массы μ, есть функция только от λ', которая есть в свою очередь функция от координат точки P.

Чтобы найти эту функцию, вспомним, что силовая функция любой притягивающей массы во внешнем относительно этой массы пространстве всегда удовлетворяет уравнению Лапласа. Следовательно,

$$\nabla U'(\lambda')=0.$$

Так как U' зависит только от λ', то мы можем использовать формулу (3.40) § 4, которая дает для U' следующее уравнение:

$$\frac{d^2U'}{d\lambda'^2}+\frac{1}{R'}\frac{dR'}{d\lambda'}\frac{dU'}{d\lambda'}=0, \tag{3.57}$$

где

$$R'(\lambda')=\sqrt{(a'^2+\lambda)(b'^2+\lambda)(c'^2+\lambda)}.$$

Уравнение (3.57) есть линейное, однородное дифференциальное уравнение второго порядка, которое легко проинтегрировать. Действительно, непосредственная проверка показывает, что

$$U_1' = 1, \quad U_2' = \int\limits_{\lambda_0'}^{\lambda'} \frac{ds'}{R'(s')},$$

где λ_0' — какая угодно постоянная, суть два линейно независимых решения уравнения (3.57), а поэтому общее решение этого уравнения представится формулой

$$U' = C_1 + C_2 \int\limits_{\lambda_0'}^{\lambda'} \frac{ds'}{R'(s')}. \tag{3.58}$$

Здесь C_1 и C_2 суть две произвольные постоянные.

Эти произвольные постоянные определяются из условий, которым должна удовлетворять силовая функция на бесконечности,

$$\lim_{r \to \infty} U' = 0, \qquad \lim_{r \to \infty} (rU') = f\mu m', \tag{3.59}$$

где r обозначает расстояние притягиваемой точки от центра слоя (от начала координат), а m' есть масса этого слоя.

Так как при $r \to \infty$ также и $\lambda' \to +\infty$, то первое из условий (3.59) дает

$$C_1 + C_2 \int\limits_{\lambda_0'}^{\infty} \frac{ds'}{R'(s')} = 0, \qquad C_1 = C_2 \int\limits_{\infty}^{\lambda_0'} \frac{ds'}{R'(s')},$$

и формула (3.58) принимает вид

$$U' = -C_2 \int\limits_{\lambda'}^{\infty} \frac{ds'}{R'(s')}.$$

Чтобы определить вторую постоянную, установим прежде порядок роста функции λ'. Полагая

$$x = r\cos(r, x), \quad y = r\cos(r, y), \quad z = r\cos(r, z),$$

напишем уравнение (3.56), которое определяет λ', в виде

$$\frac{\cos^2(r, x)}{\left(\frac{a'}{r}\right)^2+\frac{\lambda'}{r^2}}+\frac{\cos^2(r, y)}{\left(\frac{b'}{r}\right)^2+\frac{\lambda'}{r^2}}+\frac{\cos^2(r, z)}{\left(\frac{c'}{r}\right)^2+\frac{\lambda'}{r^2}}=1,$$

откуда

$$\lim_{r\to\infty}\left(\frac{\lambda'}{r^2}\right)=1.$$

Теперь заметим, что из $c'\leqslant b'\leqslant a'$ следует

$$c'^2+s'\leqslant b'^2+s'\leqslant a'^2+s',$$

а отсюда вытекает неравенство

$$\frac{1}{(a'^2+s')^{3/2}}\leqslant\frac{1}{R'(s')}\leqslant\frac{1}{(c'^2+s')^{3/2}}.$$

Интегрируя это неравенство в пределах от λ' до ∞ и помножая получившееся неравенство на r, имеем

$$\frac{2r}{\sqrt{a'^2+\lambda'}}\leqslant r\int_{\lambda'}^{\infty}\frac{ds'}{R'(s')}\leqslant\frac{2r}{\sqrt{c'^2+\lambda'}},$$

откуда

$$\lim_{r\to\infty}\left[r\int_{\lambda'}^{\infty}\frac{ds'}{R'(s')}\right]=2.$$

Теперь второе из условий (3.59) дает

$$\lim_{r\to\infty}(rU')=-C_2\lim_{r\to\infty}\left[r\int_{\lambda'}^{\infty}\frac{ds'}{R'(s')}\right]=-2C_2=f\mu m'$$

и, следовательно,

$$-C_2=\frac{1}{2}f\mu m'.$$

Поэтому для силовой функции бесконечно тонкого слоя T' на внешнюю точку P имеем следующее выражение:

$$U'=f\mu\frac{m'}{2}\int_{\lambda'}^{\infty}\frac{ds'}{R'(s')}, \tag{3.60}$$

где λ' есть положительный корень уравнения (3.56).

При приближении точки P к поверхности E_1' $\lambda' \to 0$. Поэтому, учитывая, что силовая функция непрерывна во всем пространстве, а внутри слоя T' она, по теореме Ньютона, есть величина постоянная, для внутренней точки P имеем следующее выражение:

$$U' = f\mu \frac{m}{2} \int_0^\infty \frac{ds'}{R'(s')}. \tag{3.61}$$

Перейдем теперь к нахождению силовой функции эллипсоида T, ограниченного поверхностью E, плотность которого определяется законом (3.55). Рассмотрим семейство подобных концентрических эллипсоидов E_k' и выделим слой T', ограниченный эллипсоидом E_1' с полуосями $a' = ka$, $b' = kb$, $c' = kc$ и эллипсоидом E_2' с полуосями $a'' = (k + dk)a$, $b'' = (k + dk)b$, $c'' = (k + dk)c$. Тогда силовая функция слоя T' на внешнюю точку $P(x, y, z)$ определится формулой (3.60), причем масса

$$m' = \frac{4}{3}\pi abc\delta(k^2)[(k + dk)^3 - k^3],$$

откуда, пренебрегая членами выше первого порядка относительно dk, получим

$$m' \approx dm = 4\pi abc\delta(k^2) \cdot k^2\, dk.$$

Делая еще подстановку $s' = k^2\sigma$ и обозначая силовую функцию слоя T' (как бесконечно малую часть силовой функции всего тела T) через dU вместо U', можем написать

$$dU = 2f\mu\pi abck\delta(k^2)\, dk \int_s^\infty \frac{d\sigma}{R(\sigma)}, \tag{3.62}$$

где

$$R(\sigma) = \sqrt{(a^2 + \sigma)(b^2 + \sigma)(c^2 + \sigma)},$$

а $k^2 s = \lambda'$, и следовательно, s определяется уравнением, выводимым из уравнения (3.56),

$$\frac{x^2}{a^2 + s} + \frac{y^2}{b^2 + s} + \frac{z^2}{c^2 + s} = k^2. \tag{3.63}$$

Интегрируя теперь равенство (3.62) по k или, что то же, по k^2 в пределах от нуля до единицы, мы получим полную силовую функцию тела T в виде

$$U(P)=f\mu\pi abc\int\limits_0^1 \delta(k^2)\,dk^2\int\limits_s^\infty \frac{d\sigma}{R(\sigma)}, \tag{3.64}$$

что можно также написать короче, полагая, как в § 6,

$$U_0(s)=\pi abc\int\limits_s^\infty \frac{d\sigma}{R(\sigma)},$$

в следующем виде:

$$U(P)=f\mu\int\limits_0^1 U_0(s)\,\delta(k^2)\,dk^2. \tag{3.65}$$

Чтобы привести формулу (3.64) или (3.65) к классическому виду силовой функции эллипсоида, будем считать функцию $\delta(k^2)$ интегрируемой в промежутке $0\leqslant k^2\leqslant 1$ и положим

$$\varkappa(k^2)=\int\limits_{k^2}^1 \delta(k^2)\,dk^2. \tag{3.66}$$

Применяя к интегралу (3.65) формулу интегрирования по частям, получим

$$U(P)=f\mu\left\{-\Big|_0^1 \varkappa(k^2)\,U_0(s)+\int\limits_0^1 \varkappa(k^2)\,dU_0(s)\right\}.$$

Но при $k^2=1$ имеем $\varkappa(1)=0$, а при $k^2=0$, как видно из уравнения (3.63), имеем $s=\infty$, а значит, $U_0(\infty)=0$, и проинтегрированная часть исчезает. В оставшемся интеграле примем за переменную интегрирования s вместо k^2, тогда новые пределы будут ∞ и λ, где λ определится уравнением, получающимся из (3.63) при $k^2=1$, т. е. уравнением

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1, \tag{3.67}$$

а выражение для силовой функции примет следующий окончательный вид *):

$$U(P)=f\mu\pi abc\int\limits_\lambda^\infty \frac{\varkappa(k^2)\,ds}{R(s)}. \tag{3.68}$$

*) Формула (3.68) выведена также С. А. Чаплыгиным. См. С. А. Чаплыгин, Собрание сочинений, т. I, изд. АН СССР, 1948.

Если $\delta = \text{const}$, то $\varkappa = (1 - k^2)\delta$, где k^2 определяется уравнением (3.63), и мы получаем знакомую формулу для силовой функции однородного эллипсоида на внешнюю точку.

Найдем теперь составляющие силы, с которой тело T, обладающее эллипсоидальной структурой, действует на внешнюю материальную точку массы μ. Дифференцируя (3.68), например, по x, мы имеем

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{f\mu\pi abc}{R(\lambda)}\frac{\partial\lambda}{\partial x}[\varkappa(k^2)]_{s=\lambda} - 2f\mu\pi abc\int\limits_{\lambda}^{\infty}\frac{\delta(k^2)\,ds}{(a^2+s)R(s)};$$

так как при $s = \lambda$ $k^2 = 1$ и $\varkappa(k^2) = 0$, то

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\partial U}{\partial x} = -2f\mu\pi abcx\int\limits_{\lambda}^{\infty}\frac{\delta(k^2)\,ds}{(a^2+s)R(s)},\\ Y &= \frac{\partial U}{\partial y} = -2f\mu\pi abcy\int\limits_{\lambda}^{\infty}\frac{\delta(k^2)\,ds}{(b^2+s)R(s)},\\ Z &= \frac{\partial U}{\partial z} = -2f\mu\pi abcz\int\limits_{\lambda}^{\infty}\frac{\delta(k^2)\,ds}{(c^2+s)R(s)}. \end{aligned}\right\} \tag{3.69}$$

При $\delta = \text{const}$ эти формулы превращаются в формулы (3.51) для составляющих силы притяжения однородного эллипсоида.

Покажем еще, что силовая функция U, определяемая формулой (3.68), удовлетворяет уравнению Лапласа.

Действительно, дифференцируя формулы (3.69) по x, y, z соответственно и складывая результаты, мы получаем

$$\nabla U = f\mu\pi abc\left\{-2\int\limits_{\lambda}^{\infty}\left(\frac{1}{a^2+s}+\frac{1}{b^2+s}+\frac{1}{c^2+s}\right)\frac{\delta(k^2)\,ds}{R(s)} - \right.$$
$$-4\int\limits_{\lambda}^{\infty}\frac{d\delta(k^2)}{dk^2}\left[\frac{x^2}{(a^2+s)^2}+\frac{y^2}{(b^2+s)^2}+\frac{z^2}{(c^2+s)^2}\right]\frac{ds}{R(s)} +$$
$$\left. + \frac{2\delta(1)}{R(\lambda)}\left[\frac{x}{a^2+\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\frac{y}{b^2+\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial y}+\frac{z}{c^2+\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right]\right\}.$$

Легко проверить, что

$$\frac{1}{a^2+s}+\frac{1}{b^2+s}+\frac{1}{c^2+s}=\frac{2R'(s)}{R(s)}.$$

Далее, имея в виду (3.63), найдем

$$\frac{d\delta(k^2)}{d(k^2)}\left[\frac{x^2}{(a^2+s)^2}+\frac{y^2}{(b^2+s)^2}+\frac{z^2}{(c^2+s)^2}\right]=-\frac{d\delta(k^2)}{ds}.$$

Наконец, формулы для производных первого порядка от λ, полученные в § 4, дают

$$\frac{x}{a^2+\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\frac{y}{b^2+\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial y}+\frac{z}{c^2+\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial z}=2.$$

С помощью выписанных соотношений оператор Лапласа приводится к следующему виду:

$$\nabla U=f\mu\pi abc\left\{-4\int_{\lambda}^{\infty}\frac{\delta(k^2)R'(s)}{R^2(s)}ds+\right.$$
$$\left.+4\int_{\lambda}^{\infty}\delta'(k^2)\frac{ds}{R(s)}+\frac{4\delta(1)}{R(\lambda)}\right\},$$

откуда

$$\nabla U=f\mu\pi abc\left\{4\int_{\lambda}^{\infty}\frac{d}{ds}\left[\frac{\delta(k^2)}{R(s)}\right]ds+\frac{4\delta(1)}{R(\lambda)}\right\}=$$
$$=f\mu\pi abc\left\{-\frac{4\delta(1)}{R(\lambda)}+\frac{4\delta(1)}{R(\lambda)}\right\}=0,$$

что мы и хотели показать.

Наконец, отметим, что когда точка P удаляется в бесконечность, то $\lambda\to\infty$, а поэтому как силовая функция, так и ее первые частные производные в бесконечности обращаются в нуль.

Перейдем к рассмотрению силовой функции эллипсоидального тела T, обладающего эллипсоидальным распределением плотностей, для случая, когда притягиваемая точка P массы μ лежит внутри эллипсоида E, т. е. когда

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}<1.$$

Выделим из семейства подобных эллипсоидов E'_k тот, который проходит через точку P, и обозначим через k_0

($0 < k_0 < 1$) значение параметра k, соответствующее этому эллипсоиду.

Очевидно, что для всех бесконечно тонких эллипсоидальных слоев T', лежащих внутри эллипсоида E'_{k_0} ($0 \leqslant k \leqslant k_0$), точка P является внешней, а для всех слоев, лежащих вне эллипсоида E'_{k_0} $\left(k_0 \leqslant k \leqslant 1\right)$, точка P является внутренней.

Поэтому, чтобы получить выражение для полной силовой функции тела T на внутреннюю точку P, надо проинтегрировать выражение (3.62) по k^2 от нуля до k_0^2 и прибавить к полученному выражению результат интегрирования выражения, подобного (3.62), для силовой функции слоя T' на внутреннюю точку по k^2 в пределах от k_0^2 до единицы. Но из (3.61) легко выведем выражение силовой функции бесконечно тонкого слоя T' на внутреннюю точку в виде (3.62), где нижний предел интеграла нужно заменить нулем, а поэтому имеем

$$U(P) = f\mu\pi abc \left\{ \int_0^{k_0^2} \delta(k^2)\, dk^2 \int_s^\infty \frac{d\sigma}{R(\sigma)} + \int_{k_0^2}^{1} \delta(k^2)\, dk^2 \int_0^\infty \frac{d\sigma}{R(\sigma)} \right\}.$$

Применяя к первому из этих интегралов формулу интегрирования по частям и учитывая, что при $k^2 = 0$ имеем $s = \infty$, а при $k^2 = k_0^2$ имеем $s = 0$, получим

$$U(P) = f \int_0^{k_0^2} \varkappa(k^2)\, dU_0(s),$$

а переходя здесь к переменной интегрирования s, окончательно найдем

$$U(P) = f\mu\pi abc \int_0^\infty \frac{\varkappa(k^2)\, ds}{R(s)}. \tag{3.70}$$

При $\delta = \text{const}$ опять получим выражение силовой функции однородного эллипсоида на внутреннюю точку.

Дифференцируя выражение (3.70) по x, y, z соответственно, найдем составляющие силы притяжения, действующей на частицу массы μ, находящуюся внутри тела T:

$$\left.\begin{aligned} X&=\frac{\partial U}{\partial x}=-2f\mu\pi abcx\int_0^\infty \frac{\delta(k^2)\,ds}{(a^2+s)\,R(s)},\\ Y&=\frac{\partial U}{\partial y}=-2f\mu\pi abcy\int_0^\infty \frac{\delta(k^2)\,ds}{(b^2+s)\,R(s)},\\ Z&=\frac{\partial U}{\partial z}=-2f\mu\pi abcz\int_0^\infty \frac{\delta(k^2)\,ds}{(c^2+s)\,R(s)}.\end{aligned}\right\}\qquad(3.71)$$

Покажем теперь, что силовая функция U, определяемая формулой (3.70), удовлетворяет уравнению Пуассона.

Дифференцируя формулы (3.71) по x, y, z соответственно и складывая, мы найдем, совершенно так же как и выше, для оператора Лапласа следующее выражение:

$$\nabla U=4f\mu\pi abc\int_0^\infty \frac{d}{ds}\left[\frac{\delta(k^2)}{R(s)}\right]ds,$$

откуда

$$\nabla U=-4f\mu\pi\delta\left(k_0^2\right),$$

где

$$k_0^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}.$$

Таким образом, справедливость теоремы Пуассона установлена.

Обратим внимание на то, что при проверке как уравнения Пуассона, так и уравнения Лапласа мы неявно предполагали, что функция $\delta(k^2)$ имеет первую производную по k^2, а значит, имеет также первые частные производные по координатам текущей точки M.

Примечание 1. Основываясь на формулах (3.68) и (3.70), можно получить также выражения для силовой функции эллипсоидального слоя, ограниченного двумя концентрическими, подобными и подобно расположенными эллипсоидами и обладающего эллипсоидальным распределением плотностей. Эту силовую функцию можно также получить соответствующим интегрированием выражения (3.62) и выражения, получающегося из последнего заменой s нулем.

Не производя на этот раз выкладок, которые совершенно аналогичны выполненным выше, приведем здесь только окончательные выражения для силовой функции такого слоя.

Пусть снаружи слой ограничен опять эллипсоидом E, а внутри эллипсоидом E_1, которому соответствует значение параметра k, равное заданному числу k_1.

Пусть, далее, λ_1 есть положительный корень уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda_1}+\frac{y^2}{b^2+\lambda_1}+\frac{z^2}{c^2+\lambda_1}=k_1^2.$$

Тогда, если точка P лежит во внутренней полости слоя, т. е. если ее координаты удовлетворяют условию

$$0\leqslant\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant k_1^2,$$

то

$$U(P)=f\mu\pi abc\varkappa\left(k_1^2\right)\int_0^\infty\frac{ds}{R(s)}.$$

Таким образом, в этом случае силовая функция имеет постоянное значение, что дает некоторое обобщение теоремы Ньютона. Далее, если точка P лежит внутри слоя, т. е. если

$$k_1^2\leqslant\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1,$$

то

$$U(P)=f\mu\pi abc\left\{\int_0^{\lambda_1}\frac{\varkappa\left(k^2\right)ds}{R(s)}+\varkappa\left(k_1^2\right)\int_{\lambda_1}^\infty\frac{ds}{R(s)}\right\}.$$

Наконец, если точка P лежит вне слоя, т. е. если

$$1\leqslant\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}<\infty,$$

то имеем

$$U(P)=f\mu\pi abc\left\{\int_\lambda^{\lambda_1}\frac{\varkappa\left(k^2\right)ds}{R(s)}+\varkappa\left(k_1^2\right)\int_{\lambda_1}^\infty\frac{ds}{R(s)}\right\}.$$

Если $k_1=0$, т. е. если тело не имеет вовсе внутренней, пустой полости, то $\lambda_1=\infty$, и мы получаем формулы, дающие силовую функцию сплошного эллипсоида. Заметим еще, что все три вышенаписанные формулы можно объединить и записать в виде одной формулы

$$U(P)=f\mu\pi abc\int_{\lambda}^{\infty}\frac{\bar{\varkappa}(k^2)\,ds}{R(s)},$$

где функция $\bar{\varkappa}(k^2)$ определяется условиями

$$\bar{\varkappa}(k^2)=\varkappa(k^2) \quad \text{при} \quad \lambda\leqslant s\leqslant\lambda_1,$$
$$\bar{\varkappa}(k^2)=\varkappa(k_1^2) \quad \text{при} \quad \lambda_1\leqslant s\leqslant\infty.$$

Тогда при $\lambda=\lambda_1=0$ получаем силовую функцию для точки, лежащей во внутренней полости, при $\lambda_1\neq 0$, $\lambda=0$ получаем силовую функцию для точки, лежащей внутри слоя, а при $\lambda_1\neq 0$, $\lambda\neq 0$ имеем силовую функцию для точки, лежащей вне внешней поверхности слоя.

Примечание 2. Все вышеприведенные формулы дают нам выражение для силовой функции эллипсоидального тела (полного эллипсоида или слоя, однородного или обладающего эллипсоидальной структурой) и материальной частицы массы μ, отнесенной к системе координат, совпадающей с главными осями эллипсоида. Те же формулы дают выражение взаимной силовой функции эллипсоидального тела и шара, обладающего сферической структурой, центр которого находится в точке P, масса которого есть μ и который не имеет общей части с телом T.

Если же заменить в выведенных формулах буквы x, y, z на буквы ξ', η', ζ', а последние заменить выражениями (3.12), в которых x, y, z обозначают опять координаты центра шара, ξ, η, ζ — координаты центра эллипсоидального тела T, а a_{ik} — направляющие косинусы главных осей эллипсоида E в произвольно выбранной системе координат, то мы получим формулы для взаимной силовой функции шара и эллипсоидального тела.

Эта силовая функция будет зависеть от девяти независимых переменных, а ее частные производные первого порядка дадут составляющие силы притяжения, действующей на шар и на эллипсоид, а также составляющие момента силы, действующей на тело T, относительно центра эллипсоида E.

Эти производные определятся, как нетрудно видеть, формулами вида

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial \xi} = a_{11}\frac{\partial U}{\partial \xi'} + a_{12}\frac{\partial U}{\partial \eta'} + a_{13}\frac{\partial U}{\partial \zeta'}, \quad \ldots,$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial \xi'}\frac{\partial \xi'}{\partial \varphi} + \frac{\partial U}{\partial \eta'}\frac{\partial \eta'}{\partial \varphi} + \frac{\partial U}{\partial \zeta'}\frac{\partial \zeta'}{\partial \varphi}, \quad \ldots,$$

где, повторяем, ξ', η', ζ' суть новые обозначения координат точки P в формулах этого параграфа.