ГЛАВА IV

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В предыдущей главе мы рассмотрели некоторые простейшие случаи вычисления силовой функции взаимного притяжения некоторого определенного тела и шара (или шарового слоя), однородного или обладающего сферическим распределением плотностей. Мы видели, что даже в этих простейших случаях силовая функция большей частью не выражается в элементарных функциях и содержит еще по меньшей мере одну квадратуру. Даже в тех случаях, когда заданное тело таково, что силовая функция выражается элементарно (однородный отрезок, однородный эллипсоид вращения сжатый или вытянутый), это ее выражение оказывается настолько громоздким и неудобным, что пользоваться им на практике обыкновенно весьма затруднительно.

Только для сферического тела, если притягиваемая точка находится вне его, и для однородного шарового слоя, когда притягиваемая точка находится внутри слоя, для силовой функции получаются простые и удобные выражения.

Поэтому в общем случае и даже в разобранных простейших примерах приходится прибегать к какому-либо способу приближенного представления силовой функции.

Сказанное еще более верно для случая двух каких угодно взаимно притягивающихся тел (исключая простейший случай двух сферических тел), так как в самом общем случае силовая функция выражается шестикратным интегралом, в котором не удается выполнить ни одно из входящих в него шести интегрирований.

Одна возможность приближенного представления силовой функции была уже указана ранее, а именно, мы показали, что если два совершенно произвольных по форме и по структуре тела находятся весьма далеко друг от друга, то эти два тела притягиваются взаимно почти так же, как и две материальные точки, т. е. с силой, прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между их центрами масс (или вообще между произвольно выбранными центрами приведения).

Мы уже отмечали, что таким приближенным представлением силовой функции широко пользуются в различных областях астрономии, в частности в небесной механике, но мы указывали также, что этим простейшим представлением силовой функции далеко не всегда возможно пользоваться.

В ряде важнейших задач небесной механики, особенно в ее новом разделе—теории движения искусственных небесных тел — оказывается необходимым рассматривать более подробно влияния формы и структуры тел на их поступательные и вращательные движения, а для этого нужно знать приближенное выражение силовой функции более точное, чем то, которое непосредственно доставляет закон Ньютона для двух материальных точек.

Иными словами, закон притяжения Ньютона можно рассматривать всегда как «нулевое приближение», которое иногда оказывается достаточным, а в ряде случаев является неудовлетворительным. А тогда появляется надобность рассматривать последующие приближения и нужно иметь математический аппарат, позволяющий просто и легко строить эти последовательные приближения и оценивать точность, которую они дают.

Таким математическим аппаратом являются бесконечные ряды того или иного вида, теория которых позволяет разложить нужную силовую функцию на сумму бесчисленного множества простых слагаемых, из которой можно затем брать столько первых членов, сколько требуется в данной, конкретной задаче.

Одним из удобнейших и широко применяемых способов разложения силовой функции в бесконечный ряд является классическое разложение ее по так называемым сферическим, или шаровым, функциям, а поэтому необходимо прежде всего ознакомиться с элементами теории этих сферических функций.

Этим мы и будем заниматься в настоящей главе.

§ 1. Определение сферических функций

Сферические функции появляются при изучении некоторых частных решений уравнения Лапласа, которое, как известно, в прямоугольных декартовых координатах имеет вид

$$\nabla U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \tag{4.1}$$

Будем искать такие частные решения этого уравнения, которые имеют вид однородного многочлена с тремя независимыми переменными x, y, z данной степени n, где n есть целое положительное число. Такой многочлен будем обозначать через $U_n(x, y, z)$ и будем называть *гармоническим многочленом* степени n, так что

$$\nabla U_n(x, y, z) \equiv 0.$$

Нетрудно убедиться, что не всякий однородный многочлен n-й степени является гармоническим многочленом. Например, многочлен 2-й степени $x^2 + y^2 + z^2$ (а также просто x^2, или y^2, или z^2) не удовлетворяет уравнению Лапласа, а поэтому и не может быть назван гармоническим.

Для того чтобы многочлен n-й степени был гармоническим, необходимо, как мы прежде всего покажем, чтобы его коэффициенты удовлетворяли некоторым соотношениям, так что общее число произвольных коэффициентов гармонического многочлена меньше полного числа коэффициентов многочлена n-й степени.

Сосчитаем сначала число различных членов в многочлене n-й степени с тремя независимыми переменными.

Для этого заметим, что однородный многочлен n-й степени с двумя независимыми переменными

$$c_0 x^n + c_1 x^{n-1} y + \ldots + c_{n-1} x y^{n-1} + c_n y^n$$

содержит $n+1$ коэффициентов.

Однородный многочлен n-й степени с тремя независимыми переменными может быть записан в виде

$$c_0 z^n + u_1(x, y) \cdot z^{n-1} + u_2(x, y) z^{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + u_{n-1}(x, y) \cdot z + u_n(x, y),$$

где $u_k(x, y)$ обозначают однородные многочлены степени k от x и y. Следовательно, общее число коэффициентов в однородном многочлене n-й степени от x, y, z будет равно

$$N_n = 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Теперь покажем, что в гармоническом многочлене n-й степени с тремя независимыми переменными только $2n+1$ из этих N_n коэффициентов могут быть заданы произвольно, а все остальные $\frac{n(n-1)}{2}$ коэффициенты суть линейные комбинации этих произвольных.

Действительно, запишем многочлен n-й степени с тремя независимыми переменными в виде

$$U_n(x, y, z) = \sum c_n^{(m_1, m_2, m_3)} x^{m_1} y^{m_2} z^{m_3}, \tag{4.2}$$

где суммирование распространяется на все целые неотрицательные числа m_1, m_2, m_3, удовлетворяющие условию

$$m_1 + m_2 + m_3 = n,$$

а $c_n^{(m_1, m_2, m_3)}$ суть $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ его коэффициентов.

Оператор Лапласа от многочлена (4.2) есть, очевидно, также однородный многочлен от x, y, z, но уже $(n-2)$-й степени, а потому он содержит всего N_{n-2} различных членов, коэффициенты которых суть линейные однородные функции от коэффициентов многочлена $U_n(x, y, z)$. Для того чтобы многочлен (4.2) был гармоническим, нужно, чтобы $\nabla U_n(x, y, z)$ был равен тождественно нулю, а для этого необходимо, чтобы все коэффициенты многочлена ∇U_n были равны нулю.

Приравнивая нулю эти коэффициенты многочлена ∇U_n, мы получим систему N_{n-2} линейных однородных уравнений относительно N_n коэффициентов многочлена (4.2).

Если эти уравнения независимы, то из них можно определить ровно N_{n-2} коэффициентов в функции всех остальных $N_n - N_{n-2}$, остающихся произвольными. Но

$$N_n - N_{n-2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = 2n+1,$$

а поэтому число произвольных коэффициентов гармонического многочлена $U_n(x, y, z)$ действительно равно $2n+1$.

В приведенном рассуждении остается неясным, будут ли упомянутые линейные уравнения действительно независимыми, а поэтому мы дадим еще другое доказательство высказанного предложения.

Так как всякий многочлен может быть представлен в виде многочлена Тэйлора, то коэффициенты многочлена (4.2) определяются формулами Тэйлора, а именно

$$c_n^{(m_1, m_2, m_3)} = \frac{1}{m_1!\, m_2!\, m_3!} \left[\frac{\partial^n U_n(x, y, z)}{\partial x^{m_1}\, \partial y^{m_2}\, \partial z^{m_3}} \right]_{x=y=z=0} \tag{4.3}$$

Переписывая теперь уравнение Лапласа в виде

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2},$$

мы можем в выражениях коэффициентов (4.3) исключить дифференцирование по переменной z выше первого порядка. Действительно, мы имеем с помощью уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^n U_n}{\partial x^{m_1}\, \partial y^{m_2}\, \partial z^{m_3}} = \frac{\partial^{n-2}}{\partial x^{m_1}\, \partial y^{m_2}\, \partial z^{m_3-2}} \left(\frac{\partial^2 U_n}{\partial z^2} \right) =$$

$$= -\frac{\partial^n U_n(x, y, z)}{\partial x^{m_1+2}\, \partial y^{m_2}\, \partial z^{m_3-2}} - \frac{\partial^n U_n(x, y, z)}{\partial x^{m_1}\, \partial y^{m_2+2}\, \partial z^{m_3-2}}.$$

В каждой из двух последних производных число дифференцирований по z уменьшилось на две единицы, а число дифференцирований по x или по y соответственно увеличилось. Отсюда ясно, что, повторяя такую операцию достаточное число раз, мы либо вовсе исключим дифференцирования по z (если m_3 четное), либо сведем число этих дифференцирований к единице (если m_3 нечетное). Таким образом, произвольными останутся лишь те коэффициенты $c_n^{(m_1, m_2, m_3)}$, для вычисления которых или вовсе не нужно дифференцировать по z, или нужно произвести это дифференцирование только один раз. То есть произвольными останутся следующие коэффициенты:

$$c_n^{(m_1, m_2, 0)} \qquad (m_1 + m_2 = n),$$

число которых равно $n+1$, и

$$c_n^{(m_1, m_2, 1)} \qquad (m_1 + m_2 = n - 1),$$

число которых равно n, а общее число тех и других как раз равно $2n+1$, что мы и хотели показать.

Это рассуждение показывает одновременно, что упомянутые выше линейные уравнения, связывающие коэффициенты многочлена $U_n(x, y, z)$, действительно оказываются независимыми.

Для иллюстрации рассмотрим некоторые частные значения n.

Если $n=0$, то имеем

$$N_n=N_0=1, \quad 2n+1=2\cdot 0+1=1,$$

т. е. единственный гармонический многочлен нулевой степени есть

$$U_0(x, y, z)=C_0,$$

где C_0 — произвольная постоянная.

Для $n=1$ имеем

$$N_n=N_1=3, \quad 2n+1=2\cdot 1+1=3$$

и общий вид гармонических многочленов первой степени будет

$$U_1(x, y, z)=C_1^{(1)}x+C_1^{(2)}y+C_1^{(3)}z,$$

где $C_1^{(s)}$ $(s=1, 2, 3)$ суть три произвольные постоянные.

Пусть $n=2$, тогда

$$N_n=N_2=6, \quad 2n+1=2\cdot 2+1=5,$$

т. е. из шести коэффициентов однородного многочлена второй степени для гармонического многочлена пять коэффициентов можно выбрать произвольно. Действительно, легко видеть, что

$$c_2^{(2, 0, 0)}+c_2^{(0, 2, 0)}+c_2^{(0, 0, 2)}=0,$$

и следовательно, общий гармонический многочлен второй степени можно представить (слегка меняя обозначения) в виде

$$U_2(x, y, z)=C_2^{(1)}(x^2-z^2)+C_2^{(2)}(y^2-z^2)+\\+C_2^{(3)}xy+C_2^{(4)}yz+C_2^{(5)}zx,$$

где $C_2^{(s)}$ $(s=1, \ldots, 5)$ суть независимые произвольные постоянные.

Вообще всякий общий гармонический многочлен n-й степени мы можем представить в виде

$$U_n(x, y, z)=\sum_{s=1}^{2n+1} C_n^{(s)}U_n^{(s)}(x, y, z), \tag{4.4}$$

где $C_n^{(s)}$ $(s=1,\ 2,\ \ldots,\ 2n+1)$ суть независимые произвольные постоянные, а

$$U_n^{(s)}(x,\ y,\ z) \qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ 2n+1)$$

суть некоторые, специально выбранные гармонические многочлены n-й степени, которые можно назвать *основными* или *элементарными* и которые между собой, очевидно, линейно независимы. Разумеется, что выбирать эти основные многочлены, линейной комбинацией которых является общий гармонический многочлен той же степени, можно бесчисленным множеством способов.

Чтобы получить явные выражения для основных гармонических многочленов данной степени n, перейдем сначала к полярным сферическим координатам, полагая

$$x=r\sin\theta\cos\lambda, \quad y=r\sin\theta\sin\lambda, \quad z=r\cos\theta. \tag{4.5}$$

Тогда всякий однородный многочлен n-й степени представится в виде

$$U_n=r^nY_n(\theta,\ \lambda), \tag{4.6}$$

где

$$Y_n(\theta,\ \lambda)=\sum_{m_1+m_2+m_3=n} c_n^{(m_1,\ m_2,\ m_3)}\sin^{m_1+m_2}\theta\cos^{m_3}\theta\cos^{m_1}\lambda\sin^{m_2}\lambda. \tag{4.7}$$

Если U_n есть гармонический многочлен, то выражение (4.6) называется обычно *объемной сферической функцией*, а множитель $Y_n(\theta,\ \lambda)$, определяемый формулой (4.7), называется *поверхностной сферической функцией* или просто *сферической функцией n-го порядка*.

Как показывает формула (4.7), сферическая функция n-го порядка есть многочлен относительно синусов и косинусов углов θ и λ, каждый член которого есть произведение функции одного только θ на функцию одной только λ. Каждому элементарному гармоническому многочлену соответствует по формуле (4.6) некоторая сферическая функция, которую также будем называть *элементарной*. Следовательно, всякая общая сферическая функция является линейной комбинацией $2n+1$ элементарных сферических функций, обладающих вышеуказанной структурой. Мы еще более уточним эту структуру, рассматривая отдельно множители каждого члена формулы (4.7). А именно, множитель, содержащий только угол θ, мы будем рассматривать преимущественно как функцию $\nu = \cos\theta$, так что

$$\sin^{m_1+m_2}\theta \cos^{m_3}\theta = (1-\nu^2)^{\frac{m_1+m_2}{2}} \nu^{m_3}.$$

Это есть многочлен n-й степени относительно ν, если m_1+m_2 есть число четное, и произведение $\sqrt{1-\nu^2}$ на многочлен $(n-1)$-й степени, если m_1+m_2 есть число нечетное.

Другой множитель, содержащий только угол λ, мы будем представлять в виде тригонометрического многочлена относительно синусов и косинусов целых кратностей λ. Этот многочлен будет содержать только косинусы, если m_2 есть число четное, и только синусы, если m_2 — нечетное, а наибольшая кратность λ будет, очевидно, равна $m_1+m_2 \leqslant n$. Поэтому число членов с косинусами различных кратностей угла λ будет равно $n+1$, а число членов с синусами равно n. Таким образом, число различных тригонометрических одночленов, каждый из которых содержит либо только косинус, либо только синус целой кратности λ, равно как раз $2n+1$, т. е. полному числу элементарных сферических функций n-го порядка. Так как выбор элементарных гармонических многочленов, а следовательно, и элементарных сферических функций вполне произволен, то мы можем распорядиться этим выбором так, чтобы каждая элементарная сферическая функция n-го порядка представляла собой произведение некоторой функции от ν на косинус или на синус угла $k\lambda$, где k пробегает все значения от нуля до n. Обозначая, как принято, упомянутые выше функции от ν через $P_n^{(k)}(\nu)$, мы можем выписать следующий полный набор элементарных сферических функций n-го порядка:

$$\left.\begin{array}{l} P_n^{(0)}(\nu),\ P_n^{(1)}(\nu)\cos\lambda,\ P_n^{(2)}(\nu)\cos 2\lambda,\ \ldots,\ P_n^{(n)}(\nu)\cos n\lambda, \\ \qquad\quad P_n^{(1)}(\nu)\sin\lambda,\ P_n^{(2)}(\nu)\sin 2\lambda,\ \ldots,\ P_n^{(n)}(\nu)\sin n\lambda. \end{array}\right\} \quad (4.8)$$

Из сказанного выше следует, что функция $P_n^{(k)}(\nu)$ есть либо многочлен n-й степени, либо многочлен $(n-1)$-й степени, помноженный на $\sqrt{1-\nu^2}$. Мы покажем далее, что все функции $P_n^{(k)}(\nu)$ приводятся к $P_n^{(0)}(\nu)$, которая есть многочлен, и выражаются простой формулой

$$P_n^{(k)}(\nu) = (1-\nu^2)^{\frac{k}{2}} \frac{d^k P_n^{(0)}(\nu)}{d\nu^k}.$$

Всякая другая, общая, сферическая функция того же порядка n представима как линейная комбинация функций (4.8) и может быть записана в виде

$$Y_n(\theta, \lambda) = \sum_{k=0}^{n} P_n^{(k)}(\nu)\,[A_{nk}\cos k\lambda + B_{nk}\sin k\lambda], \qquad (4.9)$$

где A_{nk} и B_{nk} суть $2n+1$ произвольных постоянных.

§ 2. Дифференциальные уравнения для сферических функций

Установить вид и структуру сферических функций непосредственно довольно затруднительно. Гораздо проще это сделать, рассматривая дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют эти функции. Выведем эти уравнения. Гармонический многочлен U_n, по определению, есть некоторое решение уравнения Лапласа (4.1). Переходя к сферическим координатам (4.5), мы представили этот многочлен в виде (4.6), а поэтому это выражение должно удовлетворять уравнению Лапласа в полярных координатах. Беря выражение (2.20) для оператора Лапласа в сферических координатах, мы напишем требуемое уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\lambda^2} = 0. \qquad (4.10)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде произведения функции только от r на функцию только от θ и λ, т. е. в виде

$$U = f(r)\,Y(\theta, \lambda).$$

Подстановка этого выражения в уравнение (4.10) дает

$$Y(\theta, \lambda)\frac{d}{dr}[r^2 f'(r)] +$$
$$+ f(r)\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial Y(\theta, \lambda)}{\partial\theta}\right] + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y(\theta, \lambda)}{\partial\lambda^2}\right\} = 0,$$