выражаются простой формулой

$$P_n^{(k)}(\nu)=(1-\nu^2)^{\frac{k}{2}}\frac{d^kP_n^{(0)}(\nu)}{d\nu^k}.$$

Всякая другая, общая, сферическая функция того же порядка n представима как линейная комбинация функций (4.8) и может быть записана в виде

$$Y_n(\theta, \lambda)=\sum_{k=0}^{n} P_n^{(k)}(\nu)\,[A_{nk}\cos k\lambda+B_{nk}\sin k\lambda], \qquad (4.9)$$

где A_{nk} и B_{nk} суть $2n+1$ произвольных постоянных.

§ 2. Дифференциальные уравнения для сферических функций

Установить вид и структуру сферических функций непосредственно довольно затруднительно. Гораздо проще это сделать, рассматривая дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют эти функции. Выведем эти уравнения. Гармонический многочлен U_n, по определению, есть некоторое решение уравнения Лапласа (4.1). Переходя к сферическим координатам (4.5), мы представили этот многочлен в виде (4.6), а поэтому это выражение должно удовлетворять уравнению Лапласа в полярных координатах. Беря выражение (2.20) для оператора Лапласа в сферических координатах, мы напишем требуемое уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\lambda^2}=0. \qquad (4.10)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде произведения функции только от r на функцию только от θ и λ, т. е. в виде

$$U=f(r)\,Y(\theta, \lambda).$$

Подстановка этого выражения в уравнение (4.10) дает

$$Y(\theta, \lambda)\frac{d}{dr}[r^2f'(r)]+$$
$$+f(r)\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial Y(\theta, \lambda)}{\partial\theta}\right]+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y(\theta, \lambda)}{\partial\lambda^2}\right\}=0,$$

что можно переписать, разделяя переменные, в виде

$$\frac{1}{f(r)}\frac{d}{dr}[r^2 f'(r)] =$$
$$= -\frac{1}{Y(\theta,\lambda)}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\,\frac{\partial Y(\theta,\lambda)}{\partial\theta}\right]+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y(\theta,\lambda)}{\partial\lambda^2}\right\}.$$

Левая часть последнего равенства содержит только r, а правая только θ и λ, а поэтому каждая часть должна быть равна одной и той же постоянной. Обозначая эту постоянную через $\varkappa$, мы получим два следующих уравнения:

$$\frac{1}{f(r)}\frac{d}{dr}[r^2 f'(r)] = \varkappa \tag{4.11}$$

и

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\,\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right]+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\lambda^2}+\varkappa Y = 0. \tag{4.12}$$

Так как U_n определяется формулой (4.6), то функция $f(r)$ нам известна и равна r^n. Подставляя это значение в уравнение (4.11), мы найдем, что

$$\varkappa = n(n+1).$$

Заменяя теперь постоянную $\varkappa$ в уравнении (4.12) найденным ее значением, мы получим уравнение, которому должна удовлетворять всякая сферическая функция n-го порядка

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\,\frac{\partial Y_n}{\partial\theta}\right]+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial\lambda^2}+n(n+1)Y_n = 0. \tag{4.13}$$

Так как общая сферическая функция n-го порядка есть линейная комбинация одночленов, каждый из которых есть произведение функции только от θ на функцию только от λ, то частное решение уравнения (4.13) будем искать в виде

$$\Theta_n(\theta)\cdot L_n(\lambda),$$

а затем построим сумму таких частных решений, которая в силу линейности уравнения (4.13) также будет его решением.

Результат подстановки запишется в виде

$$\frac{L_n}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\,\frac{d\Theta_n}{d\theta}\right]+\frac{\Theta_n}{\sin^2\theta}\frac{d^2 L_n}{d\lambda^2}+n(n+1)\Theta_n L_n = 0;$$

разделяя переменные, получим

$$\frac{\sin\theta}{\Theta_n}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{d\Theta_n}{d\theta}\right]+n(n+1)\sin^2\theta=-\frac{1}{L_n}\frac{d^2L_n}{d\lambda^2}.$$

Отсюда следует, что каждая часть равенства должна быть равна одной и той же постоянной, которую обозначим через l. Таким образом, имеем уравнения для определения каждого из множителей частного решения уравнения (4.13)

$$\frac{d^2L_n}{d\lambda^2}=-l\cdot L_n \qquad (4.14)$$

и

$$\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{d\Theta_n}{d\theta}\right]+[n(n+1)\sin^2\theta-l]\,\Theta_n=0. \qquad (4.15)$$

На основании формул (4.7) и (4.8) постоянная l должна быть квадратом целого числа, так как иначе функция L_n не будет линейной комбинацией косинуса и синуса.

Полагая $l=k^2$, мы будем иметь для L_n выражения вида

$$\cos k\lambda, \qquad \sin k\lambda,$$

а множитель Θ_n определится тогда уравнением (4.15), в котором нужно l заменить через k^2.

Делая в уравнении (4.15) замену независимой переменной по формуле

$$\nu=\cos\theta$$

и обозначая неизвестную функцию через P, мы получим следующее основное уравнение:

$$\frac{d}{d\nu}\left[(1-\nu^2)\frac{dP}{d\nu}\right]+\left[n\,(n+1)-\frac{k^2}{1-\nu^2}\right]P=0. \qquad (4.16)$$

Обозначив частное решение этого уравнения, имеющее вид многочлена n-й степени, или многочлена $(n-1)$-й степени, помноженного на $\sqrt{1-\nu^2}$, через $P_n^{(k)}(\nu)$, получим следующие элементарные сферические функции:

$$P_n^{(k)}(\nu)\cos k\lambda, \quad P_n^{(k)}(\nu)\sin k\lambda.$$

Придавая теперь параметру k последовательно значения

$$0, \ 1, \ 2, \ \ldots, \ n,$$

мы и получим нужное число $2n+1$ элементарных, сферических функций, а общее выражение для сферической функции

n-го порядка действительно запишется тогда в виде (4.9) с произвольными постоянными A_{nk} и B_{nk}, число которых равно $2n+1$.

Итак, остается теперь показать, что линейное уравнение (4.16) действительно имеет частное решение требуемого вида. Таким образом, все сводится к рассмотрению и исследованию уравнения Лежандра (4.16), которое и является аналитической основой для изучения сферических функций.

Рассмотрим предварительно некоторую вспомогательную функцию, а именно

$$y=(x^2-1)^p, \tag{4.17}$$

где p — целое положительное число. Беря логарифмические производные от обеих частей равенства (4.17), мы имеем

$$\frac{y'}{y}=\frac{2px}{x^2-1},$$

откуда следует, что вспомогательная функция y удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$(1-x^2)\frac{dy}{dx}+2pxy=0.$$

Продифференцируем это уравнение $m+1$ раз, для чего применим известную формулу Лейбница для вычисления высших производных от произведения двух функций:

$$\frac{d^n(u\cdot v)}{dx^n}=\sum_{s=0}^{n} C_n^s\frac{d^{n-s}u}{dx^{n-s}}\frac{d^s v}{dx^s}, \tag{4.18}$$

где

$$C_n^s=\frac{n!}{(n-s)!\,s!}$$

суть биномиальные коэффициенты.

Нетрудно проверить, что результат дифференцирования запишется в виде

$$(1-x^2)\frac{d^{m+2}y}{dx^{m+2}}-(2m-2p+2)\,x\,\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}+$$
$$+(2p-m)(m+1)\frac{d^m y}{dx^m}=0.$$

Отсюда видно, что функция

$$z=\frac{d^m(x^2-1)^p}{dx^m}\qquad (m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2p) \tag{4.19}$$

удовлетворяет следующему линейному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$(1-x^2)\frac{d^2z}{dx^2}-(2m-2p+2)x\frac{dz}{dx}+ \\ +(2p-m)(m+1)z=0. \quad (4.20)$$

Вернемся теперь к уравнению (4.16), которое перепишем, обозначая независимую переменную через x и искомую функцию через z, в виде

$$(1-x^2)\frac{d^2z}{dx^2}-2x\frac{dz}{dx}+\left[n(n+1)-\frac{k^2}{1-x^2}\right]z=0. \quad (4.16')$$

Рассмотрим сначала случай $k=0$. Тогда это уравнение примет вид

$$(1-x^2)\frac{d^2z}{dx^2}-2x\frac{dz}{dx}+n(n+1)z=0 \quad (4.21)$$

и совпадет с уравнением (4.20) при $p=m=n$.

Отсюда непосредственно следует, что уравнение (4.21) имеет частное решение вида

$$z=C\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}, \quad (4.22)$$

где C — какая угодно постоянная. Беря

$$C=\frac{1}{2^n\cdot n!}$$

и возвращаясь к уравнению (4.16), мы видим, что в случае $k=0$ это уравнение имеет частное решение

$$P_n(\nu)=\frac{1}{2^n\cdot n!}\frac{d^n(\nu^2-1)^n}{d\nu^n}. \quad (4.23)$$

Нетрудно обнаружить, что функция $P_n(\nu)$ есть многочлен n-й степени, содержащий только четные степени ν, если n есть число четное, и только нечетные степени ν, если n — нечетное.

Многочлен $P_n(\nu)$ называется *многочленом Лежандра* (или полиномом Лежандра), а формула (4.23), определяющая эти многочлены, называется *формулой Родрига*.

Формула Родрига может также служить для непосредственного вычисления многочленов Лежандра, по крайней мере при не очень больших значениях n.

Полагая $n=0, 1, 2, 3$, находим

$$P_0(\nu)=1,$$
$$P_1(\nu)=\nu,$$
$$P_2(\nu)=\frac{3}{2}\nu^2-\frac{1}{2},$$
$$P_3(\nu)=\frac{5}{2}\nu^3-\frac{3}{2}\nu.$$

Для больших значений n, как будет показано в следующем параграфе, многочлены Лежандра легче вычислять несколько иначе.

Перейдем к рассмотрению случая $k\neq 0$. Преобразуя уравнение (4.16′) подстановкой

$$z=(1-x^2)^{\frac{k}{2}}\zeta, \tag{4.24}$$

мы получим следующее уравнение:

$$(1-x^2)\frac{d^2\zeta}{dx^2}-2(k+1)x\frac{d\zeta}{dx}+[n(n+1)-k(k+1)]\zeta=0. \tag{4.25}$$

Это уравнение, как нетрудно проверить, совпадает с уравнением (4.20) при $p=n$ и $m=n+k$. Поэтому уравнение (4.25) заведомо имеет частное решение

$$\zeta=C\frac{d^{n+k}(x^2-1)^n}{dx^{n+k}},$$

а следовательно, уравнение (4.16′) имеет частное решение вида

$$z=C(1-x^2)^{\frac{k}{2}}\frac{d^{n+k}(x^2-1)^n}{dx^{n+k}}.$$

Если выбрать постоянную C так же, как и в формуле (4.22), и возвратиться к обозначениям уравнения (4.16), то мы получим следующее частное его решение:

$$P_n^{(k)}(\nu)=(1-\nu^2)^{\frac{k}{2}}\frac{d^kP_n(\nu)}{d\nu^k}, \tag{4.26}$$

причем эта функция есть действительно или многочлен (когда k есть число четное) степени n, или (когда k — нечетное) многочлен $(n-1)$-й степени, помноженный на $\sqrt{1-\nu^2}$.

Величины $P_n^{(k)}(\nu)$, определяемые формулой (4.26), называются *присоединенными функциями Лежандра* и вычисляются без всяких затруднений. Выпишем для примера присоединенные функции для $n=3$ и, стало быть, для $k=1, 2, 3$. Мы получим

$$P_3^{(1)}(\nu)=(1-\nu^2)^{\frac{1}{2}}\frac{dP_3(\nu)}{d\nu}=\sqrt{1-\nu^2}\left(\frac{15}{2}\nu^2-\frac{3}{2}\right),$$

$$P_3^{(2)}(\nu)=(1-\nu^2)^{\frac{2}{2}}\frac{d^2P_3(\nu)}{d\nu^2}=15\nu(1-\nu^2),$$

$$P_3^{(3)}(\nu)=(1-\nu^2)^{\frac{3}{2}}\frac{d^3P_3(\nu)}{d\nu^3}=15(1-\nu^2)\sqrt{1-\nu^2}.$$

Примечание. Многочлен Лежандра есть частное решение линейного, однородного, дифференциального уравнения 2-го порядка (4.21). Из теории линейных уравнений известно, что, зная одно частное решение однородного уравнения 2-го порядка, можно найти при помощи квадратур второе его решение, линейно независимое с первым. Нетрудно проверить, что это второе решение можно представить в виде

$$Q_n(x)=P_n(x)\int\limits_{\infty}^{x}\frac{dx}{(1-x^2)P_n^2(x)}. \tag{4.27}$$

Общее же решение уравнения Лежандра (4.21) будет иметь вид

$$z=C_1P_n(x)+C_2Q_n(x),$$

где C_1 и C_2 — две произвольные постоянные.

Функции $Q_n(x)$, называемые *функциями Лежандра второго рода*, уже не являются многочленами и суть некоторые трансцендентные функции логарифмического характера. Эти функции легко вычисляются по формуле (4.27), и мы имеем, например,

$$Q_0(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1},\quad Q_1(x)=\frac{1}{2}x\ln\frac{x+1}{x-1}-1,\ \ldots$$

Точно так же, присоединенная функция Лежандра $P_n^{(k)}(x)$ есть частное решение уравнения (4.16′), а поэтому второе, линейно независимое частное решение этого уравнения также найдется при помощи квадратур. Это второе частное решение, как нетрудно проверить, определится формулой, аналогичной формуле (4.27)

$$Q_n^{(k)}(x)=P_n^{(k)}(x)\int\limits_{\infty}^{x}\frac{dx}{(1-x^2)\left[P_n^{(k)}(x)\right]^2}, \qquad (4.28)$$

а общее решение уравнения (4.16) напишется в виде

$$z=C_1P_n^{(k)}(x)+C_2Q_n^{(k)}(x).$$

Функции $Q_n^{(k)}(x)$, определяемые формулой (4.28), называются *присоединенными функциями Лежандра второго рода* и являются также функциями трансцендентными.

§ 3. Свойства многочленов Лежандра

Как установлено в предыдущем параграфе, все элементарные сферические функции n-го порядка представляют собой произведения присоединенных функций Лежандра на косинусы или на синусы целых кратностей полярного угла λ. С другой стороны, присоединенные функции $P_n^{(k)}(\nu)$ выражаются через многочлены Лежандра, а поэтому основными элементарными функциями являются именно эти последние.

Рассмотрим некоторые свойства этих многочленов и некоторые дополнительные формулы, служащие для их представления и вычисления.

Заметим прежде всего, что из формулы Родрига (4.23) нетрудно получить развернутое выражение для многочлена Лежандра, позволяющее вычислять любой из этих многочленов независимо от всех предыдущих. Действительно, по формуле бинома Ньютона

$$(\nu^2-1)^n=\sum_{s=0}^{n}(-1)^s C_n^s \nu^{2n-2s},$$

откуда находим

$$\frac{d^n(\nu^2-1)^n}{d\nu^n}=\sum_{s=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)}(-1)^s C_n^s(2n-2s)(2n-2s-1)\dots$$

$$\dots[2n-2s-(n-1)]\,\nu^{n-2s},$$