ние, как нетрудно проверить, определится формулой, аналогичной формуле (4.27)

$$Q_n^{(k)}(x)=P_n^{(k)}(x)\int\limits_{\infty}^{x}\frac{dx}{(1-x^2)\left[P_n^{(k)}(x)\right]^2}, \tag{4.28}$$

а общее решение уравнения (4.16) напишется в виде

$$z=C_1P_n^{(k)}(x)+C_2Q_n^{(k)}(x).$$

Функции $Q_n^{(k)}(x)$, определяемые формулой (4.28), называются *присоединенными функциями Лежандра второго рода* и являются также функциями трансцендентными.

§ 3. Свойства многочленов Лежандра

Как установлено в предыдущем параграфе, все элементарные сферические функции n-го порядка представляют собой произведения присоединенных функций Лежандра на косинусы или на синусы целых кратностей полярного угла λ. С другой стороны, присоединенные функции $P_n^{(k)}(\nu)$ выражаются через многочлены Лежандра, а поэтому основными элементарными функциями являются именно эти последние.

Рассмотрим некоторые свойства этих многочленов и некоторые дополнительные формулы, служащие для их представления и вычисления.

Заметим прежде всего, что из формулы Родрига (4.23) нетрудно получить развернутое выражение для многочлена Лежандра, позволяющее вычислять любой из этих многочленов независимо от всех предыдущих. Действительно, по формуле бинома Ньютона

$$(\nu^2-1)^n=\sum_{s=0}^{n}(-1)^s C_n^s \nu^{2n-2s},$$

откуда находим

$$\frac{d^n(\nu^2-1)^n}{d\nu^n}=\sum_{s=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)}(-1)^s C_n^s(2n-2s)(2n-2s-1)\ldots$$
$$\ldots[2n-2s-(n-1)]\,\nu^{n-2s},$$

где $E\left(\frac{n}{2}\right)$ обозначает наибольшее целое число, содержащееся в $\frac{n}{2}$. Теперь формула (4.23) дает

$$P_n(\nu) = \sum_{s=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} P_{ns} \cdot \nu^{n-2s}, \tag{4.29}$$

где P_{ns} суть постоянные коэффициенты, определяемые следующей формулой:

$$P_{ns} = (-1)^s \frac{(2n-2s)!}{2^n s!\,(n-s)!\,(n-2s)!}. \tag{4.30}$$

Отсюда, например,

$$P_4(\nu) = \frac{35}{8}\nu^4 - \frac{30}{8}\nu^2 + \frac{3}{8}.$$

Покажем теперь, что многочлены Лежандра являются коэффициентами разложения некоторой функции в ряд Тэйлора, а именно покажем, что справедлива следующая формула:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2x\alpha+\alpha^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(x). \tag{4.31}$$

Функция $(1-2x\alpha+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ называется по этой причине *производящей функцией многочленов Лежандра.*

Для вывода формулы (4.31) воспользуемся известной формулой Лагранжа *), дающей разложение по степеням α корня (или некоторой функции от корня) ζ уравнения Лагранжа

$$F(z) = z - x - \alpha f(z) = 0, \tag{4.32}$$

обращающегося в x при $\alpha = 0$.

В уравнении (4.32) $f(z)$ есть заданная функция комплексного переменного z, голоморфная в круге C с центром в точке x и такая, что на окружности имеем

$$|\alpha f(z)| < |z - x|.$$

---

*) См., например, Э. Гурса, Курс математического анализа, т. 2, пер. с франц., ГТТИ, 1933.

Если $\Pi(z)$ есть заданная функция, голоморфная в круге C, то упомянутая формула Лагранжа может быть написана в виде

$$\frac{\Pi(\zeta)}{F'(\zeta)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}[\Pi(x)f^n(x)]. \tag{4.33}$$

В теории аналитических функций показывается, что если $f(z)$ есть целая функция, или многочлен, то ряд (4.33) сходится абсолютно при значениях α, удовлетворяющих неравенству

$$|\alpha|<\bar{\alpha},$$

где $\bar{\alpha}$ есть максимум функции

$$R(r)=\frac{r}{M(r)},$$

а $M(r)$ есть наибольшее значение модуля функции $f(z)$ вдоль окружности радиуса r, с центром в точке x.

Чтобы получить теперь нужную нам формулу (4.31), положим в (4.32) и (4.33)

$$f(z)=\frac{z^2-1}{2}.$$

Тогда уравнение Лагранжа превращается в простое квадратное уравнение относительно z, и тот его корень, который стремится к x при $\alpha\to 0$, определяется формулой

$$\zeta=\frac{1-\sqrt{1-2x\alpha+\alpha^2}}{\alpha}.$$

Возьмем в формуле (4.33) $\Pi(z)=1$. Так как в нашем случае

$$F'(\zeta)=1-\alpha\zeta=\sqrt{1-2x\alpha+\alpha^2},$$

то формула (4.33) дает

$$\frac{1}{\sqrt{1-2x\alpha+\alpha^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!\,2^n}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n};$$

отсюда, воспользовавшись формулой Родрига (4.23), мы получаем искомую формулу (4.31).

Найдем теперь число $\bar{\alpha}$, т. е. область тех значений α, при которых ряд в формуле (4.31) сходится абсолютно.

Для этого нужно определить сначала наибольшее значение модуля функции $f(z)$ на окружности C радиуса r, с центром в точке x, а затем найти максимум величины $R(r)$, когда r изменяется от нуля до бесконечности.

Так как в нашем случае x есть косинус некоторого угла, то $-1 \leqslant x \leqslant +1$ и точка x лежит на действительной оси. Обозначая через φ угол между произвольным радиусом r окружности C и положительным направлением оси абсцисс, мы будем иметь на C

$$z = x + r\cos\varphi + ir\sin\varphi,$$
$$\bar{z} = x + r\cos\varphi - ir\sin\varphi,$$

где $\bar{z}$ есть число, сопряженное z.

Далее можем написать

$$4\,|f(z)|^2 = (1 - z^2)(1 - \bar{z}^2)$$

и, следовательно, модуль функции $f(z)$ на окружности C определится формулой

$$4\,|f(z)|^2 = [1 + r^2\sin^2\varphi - (x + r\cos\varphi)^2]^2 + \\ + 4r^2\sin^2\varphi\,(x + r\cos\varphi)^2.$$

Наибольшее значение эта величина получает при $\varphi = \frac{\pi}{2}$, так что

$$4M^2(r) = (1 + r^2 - x^2)^2 + 4x^2r^2.$$

Чтобы найти теперь максимум $R(r)$, мы должны решить уравнение $R'(r) = 0$ или уравнение

$$M(r) - rM'(r) = 0,$$

которое приводится к виду

$$(1 + r^2 - x^2)(1 - r^2 - x^2) = 0.$$

Это уравнение имеет единственный вещественный положительный корень $r_0 = \sqrt{1 - x^2}$, который, как нетрудно проверить, действительно соответствует максимуму функции $R(r)$.

Теперь находим

$$\bar{\alpha} = \max R(r) = \frac{r_0}{M(r_0)} = 1$$

и ряд (4.31) сходится абсолютно при условии, что $|x| \leqslant 1$, если

$$|\alpha| < 1.$$

Полученный результат можно проверить еще следующим образом. Если $|x| \leqslant 1$, то квадратный трехчлен

$$\alpha^2 - 2x\alpha + 1$$

имеет следующие корни:

$$x \pm i\sqrt{1-x^2},$$

и модуль каждого из них равен единице. Поэтому особые точки ветвления производящей функции многочленов Лежандра, рассматриваемой как функция от α, лежат на окружности единичного радиуса с центром в точке $\alpha = 0$, а поэтому ряд (4.31) действительно сходится абсолютно только при $|\alpha| < 1$.

Применим теперь производящую функцию для получения некоторых числовых значений многочленов Лежандра и для вывода некоторых их свойств.

Положим в формуле (4.31) $x = +1$, что дает

$$\frac{1}{1-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(+1),$$

откуда немедленно выводим

$$P_n(+1) = +1. \tag{4.34}$$

Полагая теперь $x = -1$, имеем

$$\frac{1}{1+\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(-1),$$

откуда получаем

$$P_n(-1) = (-1)^n. \tag{4.35}$$

Наконец, полагая $x = 0$, можем написать

$$\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \alpha^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(0),$$

откуда находим

$$P_{2n-1}(0) = 0, \qquad P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\;{}^{*)}. \tag{4.36}$$

---

*) Символ $n!!$ обозначает произведение всех целых чисел, не превышающих n и такой же четности, как n. Например:

$$10!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10, \quad 13!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13.$$

Последние значения легко также вывести непосредственно из формулы (4.29).

Перейдем к выводу некоторых рекуррентных соотношений для многочленов Лежандра. Так как равенство (4.31) есть тождество, то мы можем дифференцировать его и по α и по x, в результате чего опять получим тождества.

Дифференцируя равенство (4.31) по α, получим тождество

$$(x-\alpha)(1-2x\alpha+\alpha^2)^{-\frac{3}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^{n-1}P_n(x),$$

которое можно написать также следующим образом:

$$(x-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n P_n(x)=(1-2x\alpha+\alpha^2)\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^{n-1}P_n(x).$$

Приравнивая коэффициенты при α^n в левой и правой частях этого равенства, получим

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0, \tag{4.37}$$

а это есть рекуррентное соотношение, связывающее три последовательных многочлена Лежандра и позволяющее вычислить многочлен P_{n+1}, зная P_{n-1} и P_n.

Так, например, мы получим

$$P_5(x)=\frac{9}{5}\,xP_4(x)-\frac{4}{5}\,P_3(x)=\frac{63}{8}\,x^5-\frac{70}{8}\,x^3+\frac{15}{8}\,x.$$

Дифференцируя теперь равенство (4.31) по x, имеем

$$\alpha(1-2x\alpha+\alpha^2)^{-\frac{3}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n P_n'(x),$$

или

$$\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n P_n(x)=(1-2x\alpha+\alpha^2)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n P_n'(x).$$

Приравнивая коэффициенты при α^{n+1} в левой и правой частях равенства, получаем

$$P_n(x)=P_{n+1}'(x)-2xP_n'(x)+P_{n-1}'(x). \tag{4.38}$$

Это есть второе рекуррентное соотношение между многочленами Лежандра.

Дифференцируя соотношение (4.37) по x, найдем

$$(n+1)P'_{n+1}(x)-(2n+1)[P_n(x)+xP'_n(x)]+nP'_{n-1}(x)=0. \tag{4.39}$$

Исключая теперь из соотношений (4.38) и (4.39) производную $P'_n(x)$, найдем третье рекуррентное соотношение

$$(2n+1)P_n(x)=P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x). \tag{4.40}$$

Придавая в этом равенстве значку n все целые значения от 1 до m и складывая полученные равенства, мы получим еще следующее соотношение:

$$\sum_{n=0}^{m}(2n+1)P_n(x)=P'_{m+1}(x)+P'_m(x). \tag{4.41}$$

Если же мы исключим из равенств (4.38) и (4.39) производную $P'_{n-1}(x)$, то получим следующее, четвертое рекуррентное соотношение:

$$P'_{n+1}(x)-xP'_n(x)=(n+1)P_n(x). \tag{4.42}$$

Перейдем теперь к рассмотрению некоторых оценок для многочленов Лежандра.

Выведем для этого сначала формулу, принадлежащую Лапласу, представляющую многочлен Лежандра n-го порядка в виде некоторого определенного интеграла.

Для этого заметим, что формула (4.31) дает разложение в ряд Тэйлора по степеням α функции

$$\Phi(\alpha,\ x)=\frac{1}{\sqrt{1-2x\alpha+\alpha^2}}, \tag{4.31'}$$

причем этот ряд сходится абсолютно внутри круга радиуса единица, с центром в точке $\alpha=0$.

Поэтому формулы для коэффициентов ряда Тэйлора дают

$$P_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{\Phi(\alpha,\ x)\,d\alpha}{\alpha^{n+1}},$$

или

$$P_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{1}{\sqrt{1-2x\alpha+\alpha^2}}\cdot\frac{d\alpha}{\alpha^{n+1}}, \tag{4.43}$$

где интегралы берутся по окружности упомянутого круга.

Делая в интеграле (4.43) подстановку

$$\frac{1}{\alpha}=x+i\sqrt{1-x^2}\cos\varphi,$$

мы имеем

$$\frac{d\alpha}{\alpha^2}=i\sqrt{1-x^2}\sin\varphi\,d\varphi,\quad \sqrt{1-2x\alpha+\alpha^2}=\alpha\sqrt{1-x^2}\sin\varphi$$

и, следовательно,

$$P_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x+i\sqrt{1-x^2}\cos\varphi\right)^n d\varphi. \tag{4.44}$$

Формула (4.44) и называется *формулой Лапласа* и может служить также для фактического вычисления многочленов Лежандра, причем входящая под интегралом мнимость при вычислении сама собой исчезает. Действительно, разлагая подынтегральную функцию по формуле бинома Ньютона, мы имеем

$$\left(x+i\sqrt{1-x^2}\cos\varphi\right)^n=\sum_{k=0}^{\infty}C_n^k i^k(1-x^2)^{\frac{k}{2}}x^{n-k}\cos^k\varphi.$$

Следовательно, по формуле (4.44)

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}C_n^k i^k(1-x^2)^{\frac{k}{2}}x^{n-k}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^k\varphi\,d\varphi.$$

Но входящий сюда интеграл равен нулю, когда k нечетное, а при k четном имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^{2k}\varphi\,d\varphi=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}.$$

Таким образом, окончательно

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)}(-1)^k C_n^{2k}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}(1-x^2)^k x^{n-2k}, \tag{4.45}$$

что дает также некоторую новую формулу для многочленов Лежандра.

Отметим еще, что из формулы (4.44) можно вывести также интегральное представление для производящей функции многочленов Лежандра. Действительно, мы находим

$$\Phi(\alpha, x) = \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(x) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{1-\alpha(x+i\sqrt{1-x^2}\cos\varphi)}.$$

Пользуясь формулой Лапласа, мы можем вывести также и свойства многочленов Лежандра. Например, формула (4.44) дает сразу

$$P_n(\pm 1) = (\pm 1)^n.$$

Покажем теперь, что при всех других значениях x, заключающихся в промежутке $(-1, +1)$, абсолютные значения многочленов Лежандра не превосходят единицы. Действительно, при $|x| < 1$ имеем неравенство

$$|x+i\sqrt{1-x^2}| = \sqrt{x^2+(1-x^2)\cos^2\varphi} =$$
$$= \sqrt{\cos^2\varphi + x^2\sin^2\varphi} < 1,$$

откуда при помощи формулы Лапласа получаем

$$|P_n(x)| < \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |x+i\sqrt{1-x^2}\cos\varphi|^n\, d\varphi < 1.$$

Получим теперь более точную оценку для многочлена Лежандра. Для этого перепишем последнее неравенство в виде *)

$$|P_n(x)| < \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [1-(1-x^2)\sin^2\varphi]^{\frac{n}{2}}\, d\varphi.$$

Так как для $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ имеем

$$\frac{\sin\varphi}{\varphi} \geqslant \frac{2}{\pi},$$

*) Здесь использована формула $|x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$.

то можем написать

$$1-(1-x^2)\sin^2\varphi \leqslant 1-\left(\frac{2}{\pi}\right)^2(1-x^2)\varphi^2,$$

вследствие чего получим такое неравенство

$$|P_n(x)| < \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\xi^2\varphi^2)^{\frac{n}{2}}\,d\varphi,$$

где положено для сокращения

$$\xi=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}.$$

Так как

$$1-z^2\varphi^2 \leqslant e^{-z^2\varphi^2},$$

то предыдущее неравенство можно еще усилить следующим образом:

$$|P_n(x)| < \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{nz^2\varphi^2}{2}}\,d\varphi.$$

Полагая здесь

$$t=z\varphi\sqrt{\frac{n}{2}},\quad T=\frac{z\pi}{2}\sqrt{\frac{n}{2}},$$

получим

$$|P_n(x)| < \sqrt{\frac{2}{n(1-x^2)}}\int_0^T e^{-t^2}\,dt.$$

Но известно, что

$$\int_0^T e^{-t^2}\,dt < \int_0^\infty e^{-t^2}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

а поэтому мы имеем окончательное неравенство

$$|P_n(x)| < \sqrt{\frac{\pi}{2n(1-x^2)}}, \tag{4.46}$$

показывающее, что

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x)=0.$$

при всяком значении x, лежащем в открытом промежутке $(-1, +1)$.

Примечание. Из неравенства (4.46) следует и более сильное утверждение, а именно: во всяком промежутке

$$-1+\varepsilon < x < +1-\varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$, функция $P_n(x)$ равномерно стремится к нулю, как $1/\sqrt{n}$.

§ 4. Свойства ортогональности сферических функций

Как известно, бесконечная последовательность функций

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad \ldots, \quad f_n(x), \quad \ldots$$

называется *ортогональной последовательностью в промежутке* (a, b), если

$$\int_a^b f_n(x) f_m(x)\, dx = 0$$

для любых двух неравных значений n и m.

Отсюда следует, что ни одна из этих функций не может быть представлена как линейная комбинация с постоянными коэффициентами остальных функций данной последовательности. Если функции, образующие последовательность, выбраны так, что

$$\int_a^b f_n^2(x)\, dx = 1$$

для всех значений n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, то данная ортогональная система функций называется *нормированной*.

Ортогональная система функций называется *полной*, если не существует такой, не равной тождественно нулю функции $\varphi(x)$, что

$$\int_a^b \varphi(x) f_n(x)\, dx = 0$$

для всех значений n.