при всяком значении x, лежащем в открытом промежутке $(-1, +1)$.

Примечание. Из неравенства (4.46) следует и более сильное утверждение, а именно: во всяком промежутке

$$-1+\varepsilon < x < +1-\varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$, функция $P_n(x)$ равномерно стремится к нулю, как $1/\sqrt{n}$.

§ 4. Свойства ортогональности сферических функций

Как известно, бесконечная последовательность функций

$$f_1(x),\quad f_2(x),\quad \ldots,\quad f_n(x),\quad \ldots$$

называется *ортогональной последовательностью в промежутке* (a, b), если

$$\int_a^b f_n(x) f_m(x)\,dx = 0$$

для любых двух неравных значений n и m.

Отсюда следует, что ни одна из этих функций не может быть представлена как линейная комбинация с постоянными коэффициентами остальных функций данной последовательности. Если функции, образующие последовательность, выбраны так, что

$$\int_a^b f_n^2(x)\,dx = 1$$

для всех значений n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, то данная ортогональная система функций называется *нормированной*.

Ортогональная система функций называется *полной*, если не существует такой, не равной тождественно нулю функции $\varphi(x)$, что

$$\int_a^b \varphi(x) f_n(x)\,dx = 0$$

для всех значений n.

Покажем прежде всего, применяя способ доказательства, принадлежащий самому Лежандру, что многочлены Лежандра

$$P_0(x),\quad P_1(x),\quad P_2(x),\quad \ldots,\quad P_n(x),\quad \ldots$$

образуют ортогональную в промежутке $(-1, +1)$ последовательность функций.

Формула (4.31′) дает следующие ряды

$$\Phi(\alpha, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(x),$$

$$\Phi(\beta, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \beta^m P_m(x),$$

абсолютно сходящиеся для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $|x| \leqslant 1$, если $|\alpha| < 1$ и $|\beta| < 1$. Так как произведение двух абсолютно сходящихся рядов есть также ряд абсолютно сходящийся, то мы можем перемножить два предыдущих равенства, что дает

$$\Phi(\alpha, x)\,\Phi(\beta, x) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \alpha^n \beta^m P_n(x)\,P_m(x).$$

Интегрируя последнее равенство по x в пределах от -1 до $+1$, имеем

$$\int_{-1}^{+1} \Phi(\alpha, x)\,\Phi(\beta, x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \alpha^n \beta^m \int_{-1}^{+1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx. \tag{4.47}$$

С другой стороны, как нетрудно проверить,

$$\int_{-1}^{+1} \Phi(\alpha, x)\,\Phi(\beta, x)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\Big|_{-1}^{+1} \ln\left[\sqrt{\beta(1-2\alpha x+\alpha^2)} + \sqrt{\alpha(1-2\beta x+\beta^2)}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \ln\frac{(1+\alpha)\sqrt{\beta}+(1+\beta)\sqrt{\alpha}}{(1-\alpha)\sqrt{\beta}+(1-\beta)\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\ln\frac{1+\sqrt{\alpha\beta}}{1-\sqrt{\alpha\beta}}.$$

Но, как известно, имеем следующее разложение:

$$\ln(1+z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{k+1}}{k+1},$$

абсолютно сходящееся при $|z| < 1$. С помощью этой формулы выводим без труда

$$\int_{-1}^{+1} \Phi(\alpha, x)\Phi(\beta, x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1}(\alpha\beta)^n. \tag{4.48}$$

Так как $|\alpha| < 1$ и $|\beta| < 1$, то и $|\alpha\beta| < 1$ и ряд (4.48) сходится абсолютно. Сравнивая равенства (4.47) и (4.48), имеем

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)P_m(x)\,dx = 0 \qquad (m \neq n) \tag{4.49}$$

и для $m = n$

$$\int_{-1}^{+1} P_n^2(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}. \tag{4.50}$$

Равенство (4.49) доказывает ортогональность многочленов Лежандра в промежутке $(-1, +1)$, а равенство (4.50) показывает, что эта система функций не является нормированной. Легко видеть, что если мы рассмотрим функции

$$\widetilde{P}_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,P_n(x),$$

которые также являются многочленами, удовлетворяющими уравнению Лежандра, то эти функции образуют ортогональную и нормированную систему в промежутке $(-1, +1)$. Однако в дальнейшем мы будем пользоваться именно многочленами Лежандра, т. е. ненормированной, ортогональной системой.

Перейдем к рассмотрению свойства ортогональности присоединенных функций Лежандра, для чего выведем сначала некоторую формулу приведения. Рассмотрим интеграл

$$J_{nm}^{(k)} = \int_{-1}^{+1} P_n^{(k)}(x)P_m^{(k)}(x)\,dx. \tag{4.51}$$

Подставляя сюда вместо присоединенных функций их выражения, определяемые формулой (4.26), имеем

$$J_{nm}^{(k)} = \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^k \frac{d^kP_n}{dx^k}\frac{d^kP_m}{dx^k}\,dx,$$

а применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$J_{nm}^{(k)} = -\int_{-1}^{+1} \frac{d^{k-1}P_m}{dx^{k-1}} \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d^kP_n}{dx^k}\right] dx. \tag{4.52}$$

С другой стороны, многочлен Лежандра $P_n(x)$ удовлетворяет уравнению (4.21), что дает тождество

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\right] + n(n+1)P_n \equiv 0.$$

Дифференцируя это тождество $k-1$ раз, получим новое тождество

$$\frac{d^k}{dx^k}\left[(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\right] + n(n+1)\frac{d^{k-1}P_n}{dx^{k-1}} \equiv 0,$$

которое после применения формулы Лейбница примет вид

$$(1-x^2)\frac{d^{k+1}P_n}{dx^{k+1}} - 2kx\frac{d^kP_n}{dx^k} - \\ - [k(k-1) - n(n+1)]\frac{d^{k-1}P_n}{dx^{k-1}} \equiv 0,$$

или после умножения на $(1-x^2)^{k-1}$

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^k \frac{d^kP_n}{dx^k}\right] \equiv [k(k-1) - n(n+1)]\frac{d^{k-1}P_n}{dx^{k-1}}.$$

С помощью этого тождества формула (4.52) может быть написана в следующем виде:

$$J_{nm}^{(k)} = (n+k)(n+1-k)J_{nm}^{(k-1)}. \tag{4.53}$$

Заменяя здесь k на $k-1$, $k-2$, ..., 2, 1, получим следующую систему равенств:

$$J_{nm}^{(k-1)} = (n+k-1)(n+2-k)J_{nm}^{(k-2)},$$
$$J_{nm}^{(k-2)} = (n+k-2)(n+3-k)J_{nm}^{(k-3)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$J_{nm}^{(2)} = (n+2)(n-1)J_{nm}^{(1)},$$
$$J_{nm}^{(1)} = (n+1)nJ_{nm}^{(0)}.$$

Перемножая все эти равенства вместе с равенством (4.53), получим после сокращений

$$J_{nm}^{(k)}=\{(n+k)(n+k-1)(n+k-2)\ldots(n+2)(n+1)\}\times$$
$$\times\{[n-(k-1)][n-(k-2)][n-(k-3)]\ldots[n-1]n\}J_{nm}^{(0)},$$

что можно записать, очевидно, следующим образом:

$$J_{nm}^{(k)}=\frac{(n+k)!}{(n-k)!}J_{nm}^{(0)}. \tag{4.54}$$

Но

$$J_{nm}^{(0)}=\int_{-1}^{+1}P_n(x)P_m(x)\,dx,$$

а поэтому формулы (4.49) и (4.50) позволяют получить из (4.54) следующие соотношения:

$$\int_{-1}^{+1}P_n^{(k)}(x)P_m^{(k)}(x)\,dx=0 \qquad (m\neq n) \tag{4.55}$$

и для $m=n$

$$\int_{-1}^{+1}[P_n^{(k)}(x)]^2\,dx=\frac{2}{2n+1}\frac{(n+k)!}{(n-k)!}. \tag{4.56}$$

Эти равенства показывают, что всякая система функций

$$P_0^{(k)}(x),\quad P_1^{(k)}(x),\quad \ldots,\quad P_n^{(k)}(x),\quad P_{n+1}^{(k)}(x),\quad \ldots$$

для которых k имеет определенное значение, образует ортогональную, но не нормированную в промежутке $(-1, +1)$ последовательность.

Наконец обратимся к элементарным сферическим функциям (4.8) n-го порядка, которые образуют полный набор из $2n+1$ функций. Эти функции мы можем обозначить единообразно так:

$$Y_{n0},\ Y_{n1},\ \ldots,\ Y_{nk},\ Y_{n,k+1},\ \ldots,\ Y_{n,2n},$$

и какую-нибудь из них будем обозначать через Y_{ns}, где s пробегает все значения от нуля до $2n$. Наряду с числом s будем рассматривать число k, полагая $s=k$, если $s\leqslant n$, и

$s = n + k$, если $s \geqslant n+1$. Таким образом,

$$Y_{ns}(\theta, \lambda) = P_n^{(k)}(\nu)\cos k\lambda, \qquad s \leqslant n \qquad (k = s),$$
$$Y_{ns}(\theta, \lambda) = P_n^{(k)}(\nu)\sin k\lambda, \qquad s \geqslant n+1 \qquad (k = s - n).$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$J_{n,m}^{(s,\sigma)} = \iint\limits_{(\Omega)} Y_{ns} Y_{m\sigma}\, d\omega, \tag{4.57}$$

где интегрирование распространено на всю сферу Ω радиуса единицы. Покажем, что если функции Y_{ns} и $Y_{m\sigma}$ отличаются друг от друга хотя бы одним значком, то интеграл (4.57) равен нулю. Действительно, так как $\nu = \cos\theta$, то элемент площади сферы $d\omega = \sin\theta\, d\theta\, d\lambda$ можно заменить через $d\nu\, d\lambda$ и интегрирование по ν вести в пределах от -1 до $+1$. Тогда мы можем написать

$$J_{n,m}^{(s,\sigma)} = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-1}^{+1} P_n^{(k)}(\nu) P_m^{(\varkappa)}(\nu) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(k\lambda) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(\varkappa\lambda)\, d\nu\, d\lambda =$$
$$= \int\limits_0^{2\pi} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(k\lambda) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(\varkappa\lambda)\, d\lambda \int\limits_{-1}^{+1} P_n^{(k)}(\nu) P_m^{(\varkappa)}(\nu)\, d\nu.$$

Если теперь $\varkappa \neq k$, то первый множитель, т. е. интеграл, взятый по долготе λ, равен, очевидно, нулю и весь двойной интеграл также равен нулю. Если же $\varkappa = k$, но $m \neq n$, то второй интеграл равен нулю в силу равенства (4.55), и мы имеем окончательно

$$\iint\limits_{(\Omega)} Y_{ns} Y_{m\sigma}\, d\omega = 0 \qquad \begin{pmatrix}\sigma \neq s, \\ \sigma = s, \ m \neq n\end{pmatrix}. \tag{4.58}$$

Равенство (4.58) и устанавливает свойство ортогональности семейства элементарных сферических функций (4.8), где n пробегает все целые положительные значения от нуля до бесконечности.

Найдем теперь интеграл от квадрата сферической функции, т. е. интеграл

$$J_{n,n}^{(s,s)} = \iint\limits_{(\Omega)} Y_{ns}^2\, d\omega = \int\limits_0^{2\pi} \begin{matrix}\cos^2\\ \sin^2\end{matrix}(k\lambda)\, d\lambda \int\limits_{-1}^{+1} [P_n^{(k)}(\nu)]^2\, d\nu.$$

Если $k \neq 0$, то

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2}{\sin^2}(k\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1 \pm \cos 2k\lambda)\,d\lambda = \pi,$$

а если $k = 0$, то

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2}{\sin^2}(0 \cdot \lambda)\,d\lambda = \begin{cases} 2\pi, \\ 0, \end{cases}$$

и мы получим

$$J_{n,\,n}^{(s,\,s)} = \iint\limits_{(\Omega)} Y_{ns}^2\,d\omega = \frac{2\pi\delta_k}{2n+1}\,\frac{(n+k)!}{(n-k)!}, \qquad (4.59)$$

где δ_k обозначает число, определяемое условиями

$$\delta_0 = 2, \quad \delta_k = 1 \quad (k > 0).$$

Равенства (4.58) и (4.59) могут быть написаны также следующим образом:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_n^{(k)}(\cos\theta)\,P_m^{(\varkappa)}(\cos\theta)\,\frac{\cos}{\sin}(k\lambda)\,\frac{\cos}{\sin}(\varkappa\lambda)\sin\theta\,d\theta\,d\lambda = 0 \qquad (4.60)$$

и

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left[P_n^{(k)}(\cos\theta)\cos k\lambda\right]^2 \sin\theta\,d\theta\,d\lambda = \frac{2\pi\delta_k}{2n+1}\,\frac{(n+k)!}{(n-k)!}, \qquad (4.61)$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left[P_n^{(k)}(\cos\theta)\sin k\lambda\right]^2 \sin\theta\,d\theta\,d\lambda = \frac{2\pi\delta_k}{2n+1}\,\frac{(n+k)!}{(n-k)!}. \qquad (4.62)$$

Примечание. Обращаясь к общей сферической функции n-го порядка, определяемой формулой (4.9), заметим, что эта формула может быть также написана в виде

$$Y_n(\theta,\,\lambda) = \sum_{s=0}^{2n} a_{ns} Y_{ns}(\theta,\,\lambda).$$

Отсюда, в силу равенства (4.58), немедленно выводим, что если $m \neq n$, то

$$\iint\limits_{(\Omega)} Y_n(\theta,\,\lambda)\,Y_m(\theta,\,\lambda)\,d\omega = 0,$$

откуда следует, что бесконечная последовательность сферических функций от двух переменных θ и λ

$$Y_0(\theta, \lambda), \quad Y_1(\theta, \lambda), \quad \ldots, \quad Y_n(\theta, \lambda), \quad \ldots$$

образует на сфере единичного радиуса ортогональную систему функций.

Далее при помощи равенства (4.59) найдем

$$\int\limits_{(\Omega)}\int Y_n^2(\theta, \lambda)\, d\omega = \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{s=0}^{2n} \delta_k a_{ns}^2 \frac{(n+k)!}{(n-k)!},$$

где по-прежнему $k=s$, если $s \leqslant n$, и $k=s-n$, если $s \geqslant n+1$.

§ 5. Разложение по сферическим функциям

Выведем предварительно одну важную формулу. Для этого заметим, что, как было уже показано, все элементарные сферические функции n-го порядка могут быть выражены через многочлен Лежандра $P_n(\nu)$, где $\nu = \cos\theta$, который является, таким образом, функцией угла, образованного радиусом-вектором точки сферы единичного радиуса $M(\theta, \lambda)$ с положительным направлением оси Oz.

Пусть $M'(\theta', \lambda')$ есть заданная точка на сфере Ω, а γ — угол между радиусами-векторами точек M и M'. Мы имеем

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\lambda - \lambda'). \tag{4.63}$$

Преобразуем старую систему координат таким образом, чтобы новая ось аппликат Oz' проходила через точку M'.

Тогда $P_n(\cos\gamma)$ есть основная сферическая функция в новой системе координат. Но эта функция, очевидно, будет также сферической функцией и в старой системе координат, а поэтому она должна выражаться через элементарные сферические функции по формуле (4.9), т. е.

$$P_n(\cos\gamma) = \sum_{k=0}^{n} P_n^{(k)}(\cos\theta)\,[A_{nk}\cos k\lambda + B_{nk}\sin k\lambda], \tag{4.64}$$

где коэффициенты A_{nk} и B_{nk} являются постоянными относительно переменных θ и λ, но, конечно, являются функциями от θ' и λ'.