откуда следует, что бесконечная последовательность сферических функций от двух переменных θ и λ

$$Y_0(\theta, \lambda), \quad Y_1(\theta, \lambda), \quad \ldots, \quad Y_n(\theta, \lambda), \quad \ldots$$

образует на сфере единичного радиуса ортогональную систему функций.

Далее при помощи равенства (4.59) найдем

$$\int\limits_{(\Omega)}\int Y_n^2(\theta, \lambda)\,d\omega = \frac{2\pi}{2n+1}\sum_{s=0}^{2n}\delta_k a_{ns}^2\frac{(n+k)!}{(n-k)!},$$

где по-прежнему $k=s$, если $s \leqslant n$, и $k=s-n$, если $s \geqslant n+1$.

§ 5. Разложение по сферическим функциям

Выведем предварительно одну важную формулу. Для этого заметим, что, как было уже показано, все элементарные сферические функции n-го порядка могут быть выражены через многочлен Лежандра $P_n(\nu)$, где $\nu = \cos\theta$, который является, таким образом, функцией угла, образованного радиусом-вектором точки сферы единичного радиуса $M(\theta, \lambda)$ с положительным направлением оси Oz.

Пусть $M'(\theta', \lambda')$ есть заданная точка на сфере Ω, а γ — угол между радиусами-векторами точек M и M'. Мы имеем

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\lambda - \lambda'). \qquad (4.63)$$

Преобразуем старую систему координат таким образом, чтобы новая ось аппликат Oz' проходила через точку M'.

Тогда $P_n(\cos\gamma)$ есть основная сферическая функция в новой системе координат. Но эта функция, очевидно, будет также сферической функцией и в старой системе координат, а поэтому она должна выражаться через элементарные сферические функции по формуле (4.9), т. е.

$$P_n(\cos\gamma) = \sum_{k=0}^{n} P_n^{(k)}(\cos\theta)\,[A_{nk}\cos k\lambda + B_{nk}\sin k\lambda], \qquad (4.64)$$

где коэффициенты A_{nk} и B_{nk} являются постоянными относительно переменных θ и λ, но, конечно, являются функциями от θ' и λ'.

Вычислим эти коэффициенты. Если мы подставим в многочлен $P_n(\cos\gamma)$ вместо $\cos\gamma$ его выражение (4.63) и во всех членах этого многочлена заменим степени $\cos(\lambda-\lambda')$ их выражениями через косинусы кратных $\lambda-\lambda'$, то увидим, что равенство (4.64), будучи симметричным относительно θ и θ', должно иметь вид

$$P_n(\cos\gamma)=\sum_{k=0}^{n} h_k P_n^{(k)}(\cos\theta)\,P_n^{(k)}(\cos\theta')\cos k(\lambda-\lambda'), \qquad (4.65)$$

где h_k суть числовые коэффициенты.

Чтобы найти эти коэффициенты h_k, рассмотрим частный случай равенства (4.65), когда $\theta'=\theta$.

Полагая для сокращения

$$\cos\theta=\cos\theta'=\nu, \quad \lambda-\lambda'=\omega,$$

напишем равенство (4.65) следующим образом:

$$P_n[\nu^2+(1-\nu^2)\cos\omega]=\sum_{k=0}^{n} h_k\left[P_n^{(k)}(\nu)\right]^2\cos k\omega. \qquad (4.66)$$

С другой стороны, формула (4.31) позволяет написать следующее равенство:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha[\nu^2+(1-\nu^2)\cos\omega]+\alpha^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n P_n[\nu^2+(1-\nu^2)\cos\omega].$$

Проинтегрируем обе части этого равенства по ν в пределах от -1 до $+1$, что дает

$$\frac{2}{\sqrt{2\alpha(1-\cos\omega)}}\arcsin\sqrt{\frac{2\alpha(1-\cos\omega)}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}}=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\int_{-1}^{+1}P_n[\nu^2+(1-\nu^2)\cos\omega]\,d\nu$$

или

$$\sqrt{\frac{2}{1-\cos\omega}}\arcsin\sqrt{\frac{2\alpha(1-\cos\omega)}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}}=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n+\frac{1}{2}}\int_{-1}^{+1}P_n[\nu^2+(1-\nu^2)\cos\omega]\,d\nu.$$

Дифференцируя теперь полученное равенство, которое является тождеством, по α, мы получим после упрощения

$$\frac{1+\alpha}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}\alpha^n\int_{-1}^{+1}P_n[\nu^2+(1-\nu^2)\cos\omega]\,d\nu. \tag{4.67}$$

Разложим левую часть равенства тоже по степеням α. Для этого заметим, что, как легко проверить *),

$$\frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}=\frac{1}{1-\alpha e^{i\omega}}+\frac{1}{1-\alpha e^{-i\omega}}-1,$$

а поэтому мы будем иметь

$$\frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}=-1+\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n(e^{ni\omega}+e^{-ni\omega})=$$

$$=-1+2\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\cos n\omega=1+2\alpha\cos\omega+2\alpha^2\cos 2\omega+\ldots$$

Теперь находим

$$\frac{1+\alpha}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}=\frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}=$$

$$=(1+\alpha+\alpha^2+\ldots)(1+2\alpha\cos\omega+2\alpha^2\cos 2\omega+\ldots)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n(1+2\cos\omega+2\cos 2\omega+\ldots+2\cos n\omega).$$

Сравнение этого равенства с равенством (4.67) дает

$$\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1}P_n[\nu^2+(1-\nu^2)\cos\omega]\,d\nu=1+2\cos\omega+\ldots+2\cos n\omega$$

или

$$\int_{-1}^{1}P_n[\nu^2+(1-\nu^2)\cos\omega]\,d\nu=\frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{\delta_k}\cos k\omega. \tag{4.68}$$

---

*) Для этого нужно воспользоваться формулой Эйлера $2\cos\omega=e^{i\omega}+e^{-i\omega}$ и разложить затем дробь на сумму элементарных дробей.

Возвращаясь теперь к равенству (4.66), проинтегрируем обе его части по ν в пределах от -1 до $+1$; имеем

$$\int_{-1}^{+1} P_n[\nu^2+(1-\nu^2)\cos\omega]\,d\nu=\sum_{k=0}^{n} h_k\cos k\omega \int_{-1}^{+1}[P_n^{(k)}(\nu)]^2\,d\nu.$$

Отсюда с помощью формулы (4.56) получаем

$$\int_{-1}^{+1} P_n[\nu^2+(1-\nu^2)\cos\omega]\,d\nu=\frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{n} h_k\frac{(n+k)!}{(n-k)!}\cos k\omega. \tag{4.69}$$

Приравнивая теперь правые части равенств (4.68) и (4.69), а затем сравнивая коэффициенты при $\cos k\omega$ в левой и правой частях получившегося равенства, мы найдем

$$h_k=\frac{2}{\delta_k}\frac{(n-k)!}{(n+k)!},$$

где, как и раньше, $\delta_0=2,\ \delta_1=\delta_2=\ldots=1$.

Заменяя, наконец, в формуле (4.65) коэффициенты h_k их выражениями, мы получим окончательно

$$P_n(\cos\gamma)=P_n(\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos\omega)=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{\delta_k}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}P_n^{(k)}(\cos\theta)P_n^{(k)}(\cos\theta')\cos k\omega. \tag{4.70}$$

Эта формула называется *формулой сложения для сферических функций.*

Заметим, между прочим, что из формулы сложения (4.70) можно получить еще одну формулу для многочлена Лежандра. Действительно, положим в формуле (4.70) $\theta=\theta'=\frac{\pi}{2}$, что дает

$$P_n(\cos\omega)=\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{\delta_k}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}[P_n^{(k)}(0)]^2\cos k\omega.$$

Но с помощью формул (4.26), (4.29) и (4.30) мы имеем следующее выражение для присоединенной функции Лежандра:

$$P_n^{(k)}(\nu)=(1-\nu^2)^{\frac{k}{2}}\sum_{s=0}^{E\left(\frac{n-k}{2}\right)}P_{n,s}^{(k)}\nu^{n-2s-k},$$

где коэффициенты определяются формулой

$$P_{n,s}^{(k)} = (-1)^s \frac{(2n-2s)!}{2^n s!(n-s)!(n-2s-k)!}.$$

Из формулы для $P_n^{(k)}(\nu)$ непосредственно усматриваем, что $P_n^{(k)}(0)$ равно нулю, если $n-k$ есть число нечетное. Если же $n-k$ есть число четное, то, полагая $n-k=2k'$, будем иметь

$$P_n^{(k)}(0) = (-1)^{k'} \frac{(2k)!}{2^n k'!(n-k')!}.$$

Используя это равенство, можно представить выражение для $P_n(\cos\omega)$ в следующем виде:

$$P_n(\cos\omega) = \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \overline{P}_{n,k} \cos(n-2k)\omega, \tag{4.71}$$

где коэффициенты определяются формулой

$$\overline{P}_{n,k} = \frac{2}{\delta_{n-2k}} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{(2n-2k-1)!!}{(2n-2k)!!}. \tag{4.72}$$

Например, формулы (4.71) и (4.72) дают

$$P_2(\cos\omega) = \frac{1}{4}(3\cos 2\omega + 1),$$

$$P_3(\cos\omega) = \frac{1}{8}(5\cos 3\omega + 3\cos\omega),$$

$$P_4(\cos\omega) = \frac{1}{64}(35\cos 4\omega + 20\cos 2\omega + 9),$$

$$P_5(\cos\omega) = \frac{1}{128}(63\cos 5\omega + 35\cos 3\omega + 30\cos\omega).$$

Перейдем теперь к разложению функции, заданной на поверхности сферы Ω единичного радиуса, в ряд по сферическим функциям.

Пусть нам дана функция $f(\theta, \lambda)$ от двух независимых переменных — сферических координат θ и λ произвольной точки M сферы Ω.

Предположим, что в каждой точке M сферы эта функция конечна, однозначна, непрерывна, и покажем, что ее можно представить рядом вида

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \lambda), \tag{4.73}$$

где $Y_n(\theta, \lambda)$ — сферическая функция n-го порядка

$$Y_n(\theta, \lambda) = \sum_{k=0}^{n} P_n^{(k)}(\cos\theta)\,[A_{nk}\cos k\lambda + B_{nk}\sin k\lambda], \quad (4.74)$$

коэффициенты которой полностью определяются функцией f.

Для этого покажем прежде всего, что если такое представление возможно, то оно единственно и коэффициенты A_{nk} и B_{nk} имеют вполне определенные значения, а после этого докажем, что ряд (4.73) сходится равномерно на всей поверхности сферы Ω к заданной функции $f(\theta, \lambda)$.

Итак, покажем, что если ряд (4.73) сходится равномерно, то его коэффициенты можно найти единственным образом, пользуясь свойством ортогональности сферических функций. Действительно, подставляя выражения для Y_n в формулу (4.73), мы имеем

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} P_n^{(k)}(\cos\theta)\,[A_{nk}\cos k\lambda + B_{nk}\sin k\lambda]. \quad (4.75)$$

Для определения коэффициентов этого разложения применяется тот же способ, что и при определении коэффициентов ряда Фурье. Заменим в формуле (4.75) координаты точки M, которую будем считать фиксированной, на координаты θ' и λ' текущей точки сферы M', затем помножим обе части полученного равенства на элементарную сферическую функцию

$$P_n^{(k)}(\cos\theta')\cos k\lambda' \quad \text{или} \quad P_n^{(k)}(\cos\theta')\sin k\lambda'$$

и проинтегрируем по всей поверхности сферы Ω.

Тогда по свойству ортогональности сферических функций, выражаемому формулами (4.60), (4.61) и (4.62), мы получим

$$A_{nk} = \frac{2n+1}{2\pi\delta_k}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta', \lambda')\,P_n^{(k)}(\cos\theta')\cos k\lambda' \sin\theta'\,d\theta'\,d\lambda' \quad (4.76)$$

и

$$B_{nk} = \frac{2n+1}{2\pi\delta_k}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta', \lambda')\,P_n^{(k)}(\cos\theta')\sin k\lambda' \sin\theta'\,d\theta'\,d\lambda'. \quad (4.77)$$

Эти формулы показывают, что если ряд (4.75) сходится равномерно, то это разложение единственно. Коэффициенты A_{nk} и B_{nk}, вполне определяемые заданием функции $f(\theta, \lambda)$, можно назвать *коэффициентами Фурье* для этой функции.

Рассмотрим доказательство сходимости ряда (4.75), коэффициенты которого определяются формулами (4.76) и (4.77). Положим

$$S_m(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} P_n^{(k)}(\cos\theta)\left[A_{nk}\cos k\lambda + B_{nk}\sin k\lambda\right]. \quad (4.78)$$

Подставляя сюда вместо A_{nk} и B_{nk} их выражения, определяемые формулами (4.76) и (4.77), и используя формулу сложения (4.70), мы можем написать

$$S_m(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{m} \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta', \lambda') P_n(\cos\gamma) \sin\theta' \, d\theta' \, d\lambda'$$

или

$$S_m(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{m} \frac{2n+1}{4\pi} \iint_{(\Omega)} f(M') P_n(\cos\gamma) \, d\sigma', \quad (4.79)$$

где $f(M')$ обозначает значение функции $f(\theta, \lambda)$ в точке $M'(\theta', \lambda')$ и $d\sigma = \sin\theta' \, d\theta' \, d\lambda'$ есть элемент поверхности сферы Ω.

Для упрощения дальнейших вычислений введем в рассмотрение некоторую новую систему координат, в которой за ось аппликат принято направление $\overrightarrow{OM}$, идущее от начала к фиксированной точке $M(\theta, \lambda)$. Тогда одна из новых координат точки M' есть γ, а другую — новую долготу — обозначим через φ, так что

$$d\sigma' = \sin\gamma \, d\gamma \, d\varphi.$$

Теперь формула (4.79) перепишется в виде

$$S_m(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{m} \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{\pi} P_n(\cos\gamma) \sin\gamma \, d\gamma \int_0^{2\pi} f(M') \, d\varphi.$$

Введем новую функцию $\Phi(\gamma)$, которая представляет собой среднее значение функции $f(M')$ на различных параллелях в новой системе координат

$$\Phi(\gamma)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(M')\,d\varphi. \tag{4.80}$$

Тогда

$$S_m(\theta, \lambda)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{m}(2n+1)\int_0^{\pi}\Phi(\gamma)P_n(\cos\gamma)\sin\gamma\,d\gamma. \tag{4.81}$$

Введем в интеграле формулы (4.81) новую переменную интегрирования, полагая $x=\cos\gamma$, и положим еще

$$\Phi(\gamma)=\Psi(x).$$

Это дает возможность написать формулу (4.81) в виде

$$S_m(\theta, \lambda)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\Psi(x)\left[\sum_{n=0}^{m}(2n+1)P_n(x)\right]dx.$$

Применяя здесь формулу (4.41), получим

$$S_m(\theta, \lambda)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\left[P'_{m+1}(x)+P'_m(x)\right]\Psi(x)\,dx. \tag{4.82}$$

Так как, по условию, функция $f(M')$ непрерывна на сфере Ω, то функция $\Psi(x)$ имеет в промежутке $-1\leqslant x\leqslant\leqslant+1$ непрерывную производную. Поэтому мы можем применить в формуле (4.82) правило интегрирования по частям, что дает

$$S_m(\theta, \lambda)=\frac{1}{2}\left[P_{m+1}(x)+P_m(x)\right]\Psi(x)\Big|_{-1}^{+1}-\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\left[P_{m+1}(x)+P_m(x)\right]\Psi'(x)\,dx.$$

Но, как было показано в § 3,

$$P_{m+1}(1)=P_m(1)=1,\quad P_m(-1)=-P_{m+1}(-1)=(-1)^m,$$

и мы получаем

$$S_m(\theta, \lambda)=\Psi(1)-\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\left[P_{m+1}(x)+P_m(x)\right]\Psi'(x)\,dx \tag{4.83}$$

или, так как

$$\Psi(1)=\Phi(0)=f(M)=f(\theta, \lambda),$$

то

$$S_m(\theta, \lambda)=f(\theta, \lambda)-\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}[P_{m+1}(x)+P_m(x)]\,\Psi'(x)\,dx. \quad (4.84)$$

Теперь докажем, что интеграл, стоящий в формуле (4.84), стремится к нулю при $m\to\infty$. Пусть A есть наибольшая величина абсолютного значения непрерывной функции $\Psi'(x)$ в промежутке $(-1, +1)$. Тогда

$$\left|\int_{-1}^{+1}[P_{m+1}(x)+P_m(x)]\,\Psi'(x)\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant A\int_{-1}^{+1}\{|P_{m+1}(x)|+|P_m(x)|\}\,dx.$$

Применяя неравенство Шварца *), мы имеем

$$\left\{\int_{-1}^{+1}|P_m(x)|\,dx\right\}^2\leqslant\int_{-1}^{+1}P_m^2(x)\,dx\int_{-1}^{+1}1^2\cdot dx=2\int_{-1}^{+1}P_m^2(x)\,dx$$

или в силу формулы (4.50)

$$\int_{-1}^{+1}|P_m(x)|\,dx\leqslant\frac{2}{\sqrt{2m+1}}.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{m\to\infty}\int_{-1}^{+1}|P_m(x)|\,dx=0,$$

а следовательно,

$$\lim_{m\to\infty}\int_{-1}^{+1}[P_{m+1}(x)+P_m(x)]\,\Psi'(x)\,dx=0.$$

---

*) См., например, Э. Гурса, Курс математического анализа, т. 3, пер. с франц., ОНТИ, 1934.

Поэтому равенство (4.84) дает в пределе

$$\lim_{m\to\infty} S_m(\theta, \lambda) = f(\theta, \lambda), \tag{4.85}$$

что и доказывает равномерную на всей сфере Ω сходимость ряда (4.75) к заданной функции $f(\theta, \lambda)$.

Заметим, что доказанная теорема о разложимости произвольной функции, заданной на сфере единичного радиуса и удовлетворяющей только некоторым условиям достаточно общего вида, в ряд по сферическим функциям показывает также, что *сферические функции образуют полную систему ортогональных на сфере единичного радиуса функций.*

Это важное положение было доказано впервые А. М. Ляпуновым *).

§ 6. Некоторые интегральные свойства многочленов Лежандра

В заключение этой главы рассмотрим некоторые дополнительные свойства многочленов Лежандра.

Пусть

$$F_n(k) = \int_{-1}^{+1} x^k P_n(x)\,dx, \tag{4.86}$$

где k обозначает целое положительное число.

Непосредственно очевидно, что при любом k, для которого $n+k$ есть число нечетное, интеграл (4.86) равен нулю. Покажем, что этот интеграл равен нулю также при всяком k, меньшем, чем n.

Для доказательства этого важного свойства многочленов Лежандра воспользуемся формулой Родрига (4.23), которая позволяет написать следующее равенство:

$$F_n(k) = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{+1} x^k \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}\,dx.$$

Считая теперь, что $k < n$, применим к последнему интегралу формулу интегрирования по частям k раз подряд. Замечая,

*) См. А. М. Ляпунов, Собрание сочинений, т. 4, Изд. АН СССР, 1959.