Поэтому равенство (4.84) дает в пределе

$$\lim_{m\to\infty} S_m(\theta, \lambda) = f(\theta, \lambda), \tag{4.85}$$

что и доказывает равномерную на всей сфере Ω сходимость ряда (4.75) к заданной функции $f(\theta, \lambda)$.

Заметим, что доказанная теорема о разложимости произвольной функции, заданной на сфере единичного радиуса и удовлетворяющей только некоторым условиям достаточно общего вида, в ряд по сферическим функциям показывает также, что *сферические функции образуют полную систему ортогональных на сфере единичного радиуса функций.*

Это важное положение было доказано впервые А. М. Ляпуновым *).

§ 6. Некоторые интегральные свойства многочленов Лежандра

В заключение этой главы рассмотрим некоторые дополнительные свойства многочленов Лежандра.

Пусть

$$F_n(k) = \int_{-1}^{+1} x^k P_n(x)\,dx, \tag{4.86}$$

где k обозначает целое положительное число.

Непосредственно очевидно, что при любом k, для которого $n+k$ есть число нечетное, интеграл (4.86) равен нулю. Покажем, что этот интеграл равен нулю также при всяком k, меньшем, чем n.

Для доказательства этого важного свойства многочленов Лежандра воспользуемся формулой Родрига (4.23), которая позволяет написать следующее равенство:

$$F_n(k) = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{+1} x^k \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}\,dx.$$

Считая теперь, что $k < n$, применим к последнему интегралу формулу интегрирования по частям k раз подряд. Замечая,

*) См. А. М. Ляпунов, Собрание сочинений, т. 4, Изд. АН СССР, 1959.

что все производные от $(x^2-1)^n$ порядков, меньших чем n, обращаются в нуль при $x=\pm 1$, получим

$$F_n(k)=\frac{(-1)^k k!}{2^n n!}\int_{-1}^{+1}\frac{d^{n-k}(x^2-1)^n}{dx^{n-k}}\,dx,$$

откуда

$$F_n(k)=\frac{(-1)^k k!}{2^n n!}\left.\frac{d^{(n-k-1)}(x^2-1)^n}{dx^{n-k-1}}\right|_{-1}^{+1}=0,$$

если $k\leqslant n-1$, что и требовалось показать.

Вычислим теперь интеграл (4.86), когда $k\geqslant n$ и сумма $n+k$ есть число четное. Найдем сначала $F_{2n}(2k)$ при $k\geqslant n$. Используя формулу (4.29), имеем

$$F_{2n}(2k)=\int_{-1}^{+1}x^{2k}P_{2n}(x)\,dx=2\int_0^1 x^{2k}P_{2n}(x)\,dx=$$

$$=2\sum_{s=0}^{n}\frac{P_{2n,\,s}}{2n+2k-2s+1}.$$

Приведя дроби к одному знаменателю, получим

$$F_{2n}(2k)=\frac{2\Phi_{2n}(2k)}{\prod\limits_{s=0}^{n}(2n+2k-2s+1)},$$

где $\Phi_{2n}(2k)$ есть некоторый многочлен относительно величины $2k$, степени n. Этот многочлен легко вычислить. Действительно, так как $F_{2n}(2k)$, как мы уже доказали, обращается в нуль при $2k<2n$, то

$$0,\quad 2,\quad 4,\quad \ldots,\quad 2n-4,\quad 2n-2$$

суть корни многочлена $\Phi_{2n}(2k)$, а следовательно,

$$\Phi_{2n}(2k)=A_{2n}\prod_{s=0}^{n-1}(2k-2s).$$

Но коэффициент при высшей степени $2k$ в многочлене $\Phi_{2n}(2k)$, очевидно, равен

$$A_{2n}=\sum_{s=0}^{n}P_{2n,\,s}=P_{2n}(1)=1,$$

и мы имеем окончательно для $k \geqslant n$:

$$F_{2n}(2k) = \int_{-1}^{+1} x^{2k} P_{2n}(x)\, dx = \frac{2 \prod\limits_{s=0}^{n-1} (2k-2s)}{\prod\limits_{s=0}^{n} (2n+2k-2s+1)}. \tag{4.87}$$

Совершенно так же найдем

$$F_{2n+1}(2k+1) = \int_{-1}^{+1} x^{2k+1} P_{2n+1}(x)\, dx = \frac{2 \prod\limits_{s=0}^{n-1} (2k-2s-1)}{\prod\limits_{s=0}^{n} (2n+2k-2s+2)} \tag{4.88}$$

для всякого $k \geqslant n$.

Рассмотренные свойства многочленов Лежандра позволяют вывести одну важную формулу, которая дана Лежандром и имеет вид

$$\int_{-1}^{+1} \frac{P_{2n}(x)\, dx}{(1+px^2)^{n+\frac{3}{2}}} = \frac{2}{2n+1} \frac{(-p)^n}{(1+p)^{n+\frac{1}{2}}}, \tag{4.89}$$

где p есть любое число, удовлетворяющее условию

$$-1 < p < +1.$$

Формула Лежандра выводится совершенно элементарно. Действительно, по теореме Ньютона имеем разложение

$$(1+px^2)^{-n-\frac{3}{2}} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(n+\frac{3}{2}\right) \ldots \left(n+\frac{3}{2}+r-1\right)}{r!} (-p)^r x^{2r},$$

равномерно сходящееся в промежутке $-1 \leqslant x \leqslant +1$.

Помножая обе части этого равенства на $P_{2n}(x)$ и интегрируя почленно, мы получим, обозначая для сокращения интеграл через $J_n(p)$,

$$J_n(p) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(n+\frac{3}{2}\right) \ldots \left(n+\frac{3}{2}+r-1\right)}{r!} (-p)^r \int_{-1}^{+1} x^{2r} P_{2n}(x)\, dx.$$

Все члены, для которых $r < n$, равны нулю, в силу доказанного выше, а поэтому предыдущую формулу можно переписать в следующем виде:

$$J_n(p) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(n+\frac{3}{2}\right)\dots\left(n+\frac{3}{2}+n+s-1\right)}{(n+s)!}(-p)^{n+s} F_{2n}(2n+2s). \tag{4.90}$$

Но, согласно (4.87),

$$F_{2n}(2n+2s) = \frac{2\prod_{r=0}^{n-1}(2n+2s-2r)}{\prod_{r=0}^{n}(4n+2s-2r+1)},$$

поэтому получаем

$$J_n(p) = \frac{2(-p)^n}{2n+1}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\dots\left(n+\frac{1}{2}+s-1\right)}{s!}(-p)^s =$$

$$= \frac{2}{2n+1}\frac{(-p)^n}{(1+p)^{n+\frac{1}{2}}},$$

что и требовалось доказать *).

---

*) Более подробное изложение теории сферических функций можно найти в трактате Тиссерана или в обширной монографии Гобсона. (См. список литературы.)