ГЛАВА V

РАЗЛОЖЕНИЕ СИЛОВОЙ ФУНКЦИИ НЬЮТОНОВСКОГО ПРИТЯЖЕНИЯ

§ 1. Разложение силовой функции произвольного притягивающего тела по сферическим функциям

Рассмотрим некоторое произвольное тело T (одномерное, двумерное или трехмерное), неподвижное относительно декартовой системы координат $Oxyz$.

Пусть $M(x', y', z')$ есть любая (текущая) точка тела T, в которой сосредоточена элементарная притягивающая масса dm.

Если $\delta(x', y', z')$ есть заданная плотность тела T, которую будем считать непрерывной функцией от координат x', y', z' текущей точки M, то

$$dm = \delta(x', y', z')\,dT,$$

где dT есть пространственный элемент, представляющий собой либо элемент линии для одномерного тела, либо элемент площади поверхности для двумерного тела, либо элемент объема для трехмерного тела.

Пусть $P(x, y, z)$ есть любая точка пространства, в которой сосредоточена точечная притягиваемая масса μ. Тогда притяжение тела T определяется, как нам уже известно, силовой функцией U по формуле

$$U(x, y, z) = f\mu \int\limits_{(T)} \frac{dm}{\Delta}, \tag{5.1}$$

где

$$\Delta^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \tag{5.2}$$

и интеграл распространен на всю притягивающую массу тела T, являясь обыкновенным криволинейным интегралом для одномерного тела, двойным поверхностным для двумерного и тройным для трехмерного тела.

Переходя к полярным сферическим координатам, имеем

$$x = r\sin\theta\cos\lambda,\qquad y = r\sin\theta\sin\lambda,\qquad z = r\cos\theta,$$
$$x' = r'\sin\theta'\cos\lambda',\qquad y' = r'\sin\theta'\sin\lambda',\qquad z' = r'\cos\theta',$$

а поэтому

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma, \tag{5.3}$$

где γ есть угол, образованный радиусами-векторами точек M и P, причем, очевидно, что

$$\cos\gamma = \frac{1}{rr'}(xx' + yy' + zz') = \\ = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\lambda - \lambda'). \tag{5.4}$$

Имея теперь в виду формулу для производящей функции многочленов Лежандра, мы можем получить следующие разложения:

если $r' < r$, то

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r'}{r}\cos\gamma + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}} = \\ = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{r'^n}{r^{n+1}}P_n(\cos\gamma), \tag{5.5}$$

если же $r < r'$, то

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r'}\frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r}{r'}\cos\gamma + \left(\frac{r}{r'}\right)^2}} = \\ = \frac{1}{r'}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r'}\right)^n P_n(\cos\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{r'^{n+1}}P_n(\cos\gamma); \tag{5.6}$$

полученные ряды сходятся абсолютно для любого значения угла γ.

Нетрудно также установить область, в которой каждый из этих рядов сходится не только абсолютно, но и равномерно, и оценить величину остаточного члена. Действительно, если

$$\frac{r'}{r} < q < 1,$$

то ряд (5.5) сходится равномерно, а его остаточный член

$$R_m = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\gamma)$$

удовлетворяет неравенству

$$|R_m| < \sum_{n=m}^{\infty} \frac{q^n}{r} = \frac{q^m}{r(1-q)},$$

так как, как показано в предыдущей главе, $|P_n(\cos\gamma)| \leqslant 1$.

Точно так же если

$$\frac{r}{r'} < q' < 1,$$

то ряд (5.6) сходится равномерно, а для его остаточного члена

$$R'_m = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{r^n}{r'^{n+1}} P_n(\cos\gamma)$$

получаем неравенство

$$|R'_m| < \frac{q'^m}{r'(1-q')}.$$

Допустим теперь, что система координат выбрана так, что для данной точки $P(x, y, z)$ мы имеем $r' < r$.

Тогда имеет место разложение (5.5), а, подставляя это разложение в формулу (5.1) и интегрируя почленно, мы получим некоторое разложение силовой функции в виде

$$U(r, \theta, \lambda) = f\mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int_{(T)} r'^n P_n(\cos\gamma)\, dm. \tag{5.7}$$

Так как по формуле сложения

$$P_n(\cos\gamma) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{\delta_k} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(\cos\theta) P_n^{(k)}(\cos\theta') \cos k(\lambda - \lambda') \tag{5.8}$$

является сферической функцией n-го порядка относительно координат θ и λ, то, интегрируя выражение $r'^n P_n(\cos\gamma)$ по переменным r', θ', λ', мы опять получим некоторую сферическую функцию того же порядка n. Полагая для сокращения

$$Y_n(\theta, \lambda) = \int\limits_{(T)} r'^n P_n(\cos\gamma)\, dm, \tag{5.9}$$

мы получим разложение силовой функции в виде

$$U(r, \theta, \lambda) = f\mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n(\theta, \lambda)}{r^{n+1}}. \tag{5.10}$$

Сферические функции $Y_n(\theta, \lambda)$, входящие в это разложение, можно написать в явном виде, заменяя в формуле (5.9) многочлен Лежандра $P_n(\cos\gamma)$ его выражением (5.8). Делая это, мы представим $Y_n(\theta, \lambda)$ в следующем виде:

$$Y_n(\theta, \lambda) = \sum_{k=0}^{n} P_n^{(k)}(\cos\theta)\,[A_{nk}\cos k\lambda + B_{nk}\sin k\lambda], \tag{5.11}$$

где

$$A_{nk} = \frac{2}{\delta_k}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\int\limits_{(T)} r'^n P_n^{(k)}(\cos\theta')\cos k\lambda'\, dm \tag{5.12}$$

и

$$B_{nk} = \frac{2}{\delta_k}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\int\limits_{(T)} r'^n P_n^{(k)}(\cos\theta')\sin k\lambda'\, dm \tag{5.13}$$

суть постоянные, зависящие исключительно от формы и распределения масс притягивающего тела T.

Обратимся теперь к случаю, когда мы имеем $r' > r$. Тогда имеет место разложение (5.6), а подставляя его в формулу (5.1) и интегрируя, мы получим другое разложение силовой функции в виде

$$U(r, \theta, \lambda) = f\mu \sum_{n=0}^{\infty} r^n \int\limits_{(T)} \frac{P_n(\cos\gamma)\, dm}{r'^{n+1}}, \tag{5.14}$$

или, полагая

$$\widetilde{Y}_n(\theta, \lambda) = \int\limits_{(T)} \frac{P_n(\cos\gamma)\, dm}{r'^{n+1}}, \tag{5.15}$$

в следующем виде:

$$U(r,\ \theta,\ \lambda)=f\mu\sum_{n=0}^{\infty} r^n \tilde{Y}_n(\theta,\ \lambda). \tag{5.16}$$

Здесь $\tilde{Y}_n$ суть также сферические функции, которые определяются следующей формулой:

$$\tilde{Y}_n(\theta,\ \lambda)=\sum_{k=0}^{n} P_n^{(k)}(\cos\theta)[\tilde{A}_{nk}\cos k\lambda+\tilde{B}_{nk}\sin k\lambda], \tag{5.17}$$

где

$$\tilde{A}_{nk}=\frac{2}{\delta_k}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\int\limits_{(T)} P_n^{(k)}(\cos\theta')\frac{\cos k\lambda'}{r'^{n+1}}\,dm \tag{5.18}$$

и

$$\tilde{B}_{nk}=\frac{2}{\delta_k}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\int\limits_{(T)} P_n^{(k)}(\cos\theta')\frac{\sin k\lambda'}{r'^{n+1}}\,dm \tag{5.19}$$

суть постоянные, зависящие исключительно от формы и распределения масс притягивающего тела T.

Формулы (5.10) и (5.15) дают выражения для силовой функции в полярных сферических координатах r, θ и λ в виде бесконечных рядов сферических функций, области сходимости которых в общем случае могут быть установлены лишь довольно грубо.

Действительно, пусть существует такая положительная постоянная $\bar{r}$, что для всех точек тела T будет выполняться неравенство $r'\leqslant\bar{r}$. Тогда ряд (5.10) заведомо будет сходящимся абсолютно и равномерно во всех точках пространства, внешних по отношению к сфере радиуса $\bar{r}$, с центром в начале координат.

Точно так же, если существует такая положительная постоянная $\underline{r}$, что для всех точек тела T выполняется неравенство $\underline{r}\leqslant r'$, то ряд (5.16) будет сходиться абсолютно и равномерно во всех точках пространства, лежащих внутри сферы радиуса $\underline{r}$, с центром в начале.

Но в некоторых случаях области сходимости рядов могут быть более широкими и одновременно более сложными по своей структуре.

Зная разложение силовой функции, можно путем обычного почленного дифференцирования найти разложения частных производных от U по координатам r, θ, λ, что даст составляющие силы притяжения, действующей на точку P, определяемые формулами (1.13) главы I, т. е. составляющие

$$F_r = \frac{\partial U}{\partial r}, \quad F_T = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial U}{\partial \lambda}, \quad F_W = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}.$$

Зная эти составляющие, мы можем найти также обычные составляющие силы притяжения по осям x, y, z декартовой системы координат. Эти составляющие найдутся опять из формул (1.13), которые дают

$$X = \frac{x}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{y}{\rho^2} \frac{\partial U}{\partial \lambda} + \frac{xz}{\rho r^2} \frac{\partial U}{\partial \theta},$$

$$Y = \frac{y}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{x}{\rho^2} \frac{\partial U}{\partial \lambda} + \frac{yz}{\rho r^2} \frac{\partial U}{\partial \theta},$$

$$Z = \frac{z}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\rho}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \theta},$$

где

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Однако предпочтительнее получить разложение U по функциям декартовых координат x, y, z, а затем найти составляющие X, Y, Z непосредственным дифференцированием.

Чтобы установить вид разложения, о котором идет речь, заметим, что по формуле (4.6) каждой сферической функции n-го порядка соответствует некоторый однородный, гармонический многочлен n-й степени, так что мы имеем равенство следующего вида:

$$Y_n(\theta, \lambda) = \frac{1}{r^n} U_n(x, y, z).$$

Подставляя это выражение для Y_n в формулу (5.10), мы получим для силовой функции U разложение

$$U(x, y, z) = f\mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_n(x, y, z)}{r^{2n+1}}, \tag{5.20}$$

сходящееся абсолютно и равномерно во всяком случае в области, определяемой неравенством $r > \bar{r}$.

Точно так же сферической функции $\widetilde{Y}_n$, входящей в формулу (5.16), соответствует некоторый другой однородный, гармонический многочлен, который обозначим через $\widetilde{U}_n$, так что имеем

$$r^n \widetilde{Y}_n(\theta, \lambda) = \widetilde{U}_n(x, y, z).$$

Подставляя это выражение в формулу (5.16), получим другое разложение силовой функции

$$U(x, y, z) = f\mu \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{U}_n(x, y, z), \tag{5.21}$$

сходящееся абсолютно и равномерно во всяком случае в области, определяемой неравенством $r < \underline{r}$.

Найти многочлены U_n и $\widetilde{U}_n$ можно различными способами. Например, можно исходить из выражений для Y_n и $\widetilde{Y}_n$, даваемых формулами (5.11) и (5.17), и выразить в этих формулах функции от θ и λ через прямоугольные координаты x, y, z по формулам преобразования координат. Можно поступить и иначе.

Действительно, рассмотрим выражение $P_n(\cos\gamma)$, входящее в формулы (5.9) и (5.15), которое есть не что иное, как многочлен Лежандра n-го порядка относительно $\cos\gamma$. Поэтому, применяя формулу (4.29), полагая там $\nu = \cos\gamma$, имеем

$$P_n(\cos\gamma) = \sum_{s=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} P_{ns} \cos^{n-2s}\gamma;$$

заменяя здесь $\cos\gamma$ его выражением через координаты точек P и M и умножая обе части равенства на $(rr')^n$, получим

$$(rr')^n P_n(\cos\gamma) = \sum_{s=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} P_{ns}(xx' + yy' + zz')^{n-2s} r^{2s} r'^{2s}. \tag{5.22}$$

Каждый член последней суммы есть, очевидно, однородный многочлен n-й степени как относительно координат точки P, так и относительно координат точки M.

Следовательно, и вся сумма также есть многочлен такого же рода, и мы можем написать

$$r^n r'^n P_n(\cos\gamma) = \overline{P}_n(P, M) = \sum P_n^{(k_1, k_2, k_3)}(x', y', z')\, x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3},$$

где сумма распространена на все целые неотрицательные числа k_1, k_2, k_3, удовлетворяющие условию $k_1+k_2+k_3=n$, а каждый коэффициент есть целый однородный многочлен n-й степени относительно координат x', y', z' точки M.

Теперь формула (5.9) дает

$$Y_n(\theta, \lambda)=\int\limits_{(T)} r'^n P_n(\cos\gamma)\,dm = \frac{1}{r^n}\int\limits_{(T)} \bar{P}_n(P, M)\,dm = \frac{1}{r^n} U_n(x, y, z),$$

и многочлены U_n полностью определяются.

Эти многочлены мы можем представить в следующем виде:

$$U_n(x, y, z)=\sum U_n^{(k_1, k_2, k_3)} x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3} \tag{5.23}$$

с тем же способом суммирования, причем коэффициенты определяются формулами

$$U_n^{(k_1, k_2, k_3)}=\int\limits_{(T)} P_n^{(k_1, k_2, k_3)}(x', y', z')\,dm \tag{5.24}$$

и зависят исключительно от формы и распределения масс притягивающего тела T.

Точно так же формула (5.15) дает

$$r^n\tilde{Y}_n(\theta, \lambda)=\int\limits_{(T)} \frac{r^n P_n(\cos\gamma)\,dm}{r'^{n+1}} = \int\limits_{(T)} \frac{\bar{P}_n(P, M)\,dm}{r'^{2n+1}} = \tilde{U}_n(x, y, z),$$

причем многочлены $\tilde{U}_n$ определятся формулой

$$\tilde{U}_n(x, y, z)=\sum \tilde{U}_n^{(k_1, k_2, k_3)} x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3} \tag{5.25}$$

с тем же способом суммирования, где

$$\tilde{U}_n^{(k_1, k_2, k_3)}=\int\limits_{(T)} \frac{P_n^{(k_1, k_2, k_3)}(x', y', z')\,dm}{r'^{2n+1}} \tag{5.26}$$

суть коэффициенты, зависящие исключительно от формы и распределения масс притягивающего тела T.

Дифференцируя теперь разложения (5.20) и (5.21), мы и получим выражения для прямоугольных составляющих силы притяжения тела T, действующей на материальную точку P, масса которой есть μ, в виде:

для случая, когда $r > \bar{r}$:

$$\left.\begin{aligned} X(x, y, z) &= \frac{\partial U}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X_n(x, y, z)}{r^{2n+3}}, \\ Y(x, y, z) &= \frac{\partial U}{\partial y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n(x, y, z)}{r^{2n+3}}, \\ Z(x, y, z) &= \frac{\partial U}{\partial z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z_n(x, y, z)}{r^{2n+3}}, \end{aligned}\right\} \tag{5.27}$$

где X_n, Y_n, Z_n суть однородные многочлены $(n+1)$-й степени, определяемые формулами

$$X_n(x, y, z) = r^2 \frac{\partial U_n}{\partial x} - (2n+1)\, xU_n,$$

$$Y_n(x, y, z) = r^2 \frac{\partial U_n}{\partial y} - (2n+1)\, yU_n,$$

$$Z_n(x, y, z) = r^2 \frac{\partial U_n}{\partial z} - (2n+1)\, zU_n,$$

и для случая, когда $r < \underline{r}$:

$$\left.\begin{aligned} X(x, y, z) &= \frac{\partial U}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial \widetilde{U}_n}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{X}_n(x, y, z), \\ Y(x, y, z) &= \frac{\partial U}{\partial y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial \widetilde{U}_n}{\partial y} = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{Y}_n(x, y, z), \\ Z(x, y, z) &= \frac{\partial U}{\partial z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial \widetilde{U}_n}{\partial z} = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{Z}_n(x, y, z), \end{aligned}\right\} \tag{5.28}$$

где $\widetilde{X}_n$, $\widetilde{Y}_n$, $\widetilde{Z}_n$ суть, очевидно, некоторые однородные многочлены $(n-1)$-й степени.