§ 2. Первые члены разложения силовой функции произвольного притягивающего тела

Разложения, полученные нами в предыдущем параграфе, имеют совершенно общий характер, т. е. дают общее выражение для силовой функции произвольного притягивающего тела в виде некоторого бесконечного ряда, структура общего члена которого установлена приведенными выше формулами.

Однако в практических приложениях, обыкновенно используются только несколько первых членов подобных рядов, а поэтому полезно привести формулы, дающие развернутые выражения этих первых членов. Мы ограничимся выписыванием только первых пяти членов, т. е. найдем выражения сферических функций или сферических многочленов для $n=0, 1, 2, 3, 4$.

Прежде всего, составим для указанных значений n многочлены $\overline{P}_n(P, M)$, определяемые формулой (5.22).

Имеем

$$\overline{P}_0(P, M)=P_0(\cos\gamma)=1. \tag{5.29}$$

Далее, так же просто получаем

$$\overline{P}_1(P, M)=rr'P_1(\cos\gamma)=rr'\cos\gamma=xx'+yy'+zz'. \tag{5.30}$$

Полагая теперь $n=2$, находим

$$\overline{P}_2(P, M)=r^2r'^2P_2(\cos\gamma)=r^2r'^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\gamma-\frac{1}{2}\right),$$

откуда

$$\overline{P}_2(P, M)=\frac{3}{2}(xx'+yy'+zz')^2-\frac{1}{2}r'^2(x^2+y^2+z^2),$$

или в развернутом виде

$$\overline{P}_2(P, M)=\frac{x^2}{2}(3x'^2-r'^2)+\frac{y^2}{2}(3y'^2-r'^2)+$$
$$+\frac{z^2}{2}(3z'^2-r'^2)+3xy\cdot x'y'+3xz\cdot x'z'+3yz\cdot y'z'. \tag{5.31}$$

Далее, для $n=3$ получаем

$$\overline{P}_3(P, M)=r^3r'^3P_3(\cos\gamma)=r^3r'^3\left(\frac{5}{2}\cos^3\gamma-\frac{3}{2}\cos\gamma\right)=$$
$$=\frac{5}{2}(rr'\cos\gamma)^3-\frac{3}{2}(rr'\cos\gamma)\,r^2r'^2$$

или

$$\overline{P}_3(P,\ M)=\frac{5}{2}(xx'+yy'+zz')^3-$$
$$-\frac{3}{2}r'^2(xx'+yy'+zz')(x^2+y^2+z^2),$$

а в развернутом виде

$$\overline{P}_3(P,\ M)=x^3\left(\frac{5}{2}x'^3-\frac{3}{2}x'r'^2\right)+x^2y\left(\frac{15}{2}y'x'^2-\frac{3}{2}y'r'^2\right)+$$
$$+x^2z\left(\frac{15}{2}z'x'^2-\frac{3}{2}z'r'^2\right)+xy^2\left(\frac{15}{2}x'y'^2-\frac{3}{2}x'r'^2\right)+$$
$$+15xyz\cdot x'y'z'+xz^2\left(\frac{15}{2}x'z'^2-\frac{3}{2}x'r'^2\right)+$$
$$+y^3\left(\frac{5}{2}y'^3-\frac{3}{2}y'r'^2\right)+y^2z\left(\frac{15}{2}z'y'^2-\frac{3}{2}z'r'^2\right)+$$
$$+yz^2\left(\frac{15}{2}y'z'^2-\frac{3}{2}y'r'^2\right)+z^3\left(\frac{5}{2}z'^3-\frac{3}{2}z'r'^2\right). \quad (5.32)$$

Наконец, для $n=4$ находим

$$\overline{P}_4(P,\ M)=r^4r'^4P_4(\cos\gamma)=r^4r'^4\left(\frac{35}{8}\cos^4\gamma-\frac{30}{8}\cos^2\gamma+\frac{3}{8}\right)=$$
$$=\frac{35}{8}(rr'\cos\gamma)^4-\frac{30}{8}(rr'\cos\gamma)^2r^2r'^2+\frac{3}{8}r^4r'^4$$

или

$$\overline{P}_4(P,\ M)=\frac{35}{8}(xx'+yy'+zz')^4-$$
$$-\frac{30}{8}(xx'+yy'+zz')^2(x^2+y^2+z^2)r'^2+$$
$$+\frac{3}{8}(x^2+y^2+z^2)^2\cdot r'^4,$$

а в развернутом виде имеем

$$\overline{P}_4(P,\ M)=x^4\left(\frac{35}{8}x'^4-\frac{30}{8}x'^2r'^2+\frac{3}{8}r'^4\right)+$$
$$+x^3y\left(\frac{35}{2}x'^3y'-\frac{15}{2}x'y'r'^2\right)+x^3z\left(\frac{35}{2}x'^3z'-\frac{15}{2}x'z'r'^2\right)+$$
$$+x^2y^2\left(\frac{105}{4}x'^2y'^2-\frac{15}{4}x'^2r'^2-\frac{15}{4}y'^2r'^2+\frac{3}{4}r'^4\right)+$$
$$+x^2z^2\left(\frac{105}{4}x'^2z'^2-\frac{15}{4}x'^2r'^2-\frac{15}{4}z'^2r'^2+\frac{3}{4}r'^4\right)+$$
$$+x^2yz\left(\frac{105}{2}x'^2y'z'-\frac{30}{4}y'z'r'^2\right)+xy^3\left(\frac{35}{2}x'y'^3-\frac{30}{4}x'y'r'^2\right)+$$

$$+xy^2z\left(\frac{105}{2}x'y'^2z'-\frac{30}{4}x'z'r'^2\right)+xyz^2\left(\frac{105}{2}x'y'z'^2-\frac{30}{4}x'y'r'^2\right)+$$
$$+xz^3\left(\frac{35}{2}x'z'^3-\frac{30}{4}x'z'r'^2\right)+y^4\left(\frac{35}{8}y'^4-\frac{30}{8}y'^2r'^2+\frac{3}{8}r'^4\right)+$$
$$+y^3z\left(\frac{35}{2}y'^3z'-\frac{30}{4}y'z'r'^2\right)+$$
$$+y^2z^2\left(\frac{105}{4}y'^2z'^2-\frac{30}{8}z'^2r'^2-\frac{30}{8}y'^2r'^2+\frac{3}{4}r'^4\right)+$$
$$+yz^3\left(\frac{35}{2}y'z'^3-\frac{30}{4}y'z'r'^2\right)+z^4\left(\frac{35}{8}z'^4-\frac{30}{8}z'^2r'^2+\frac{3}{8}r'^4\right). \tag{5.33}$$

Переходим теперь к вычислению многочленов U_n и $\widetilde{U}_n$. Так как

$$U_n(x,\ y,\ z)=\int\limits_{(T)}\overline{P}_n(P,\ M)\,dm,$$

то, полагая последовательно $n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$, мы найдем

$$U_0(x,\ y,\ z)=\int\limits_{(T)}dm=m, \tag{5.34}$$

где m есть вся масса притягивающего тела.

Далее,

$$U_1(x,\ y,\ z)=x\int\limits_{(T)}x'\,dm+y\int\limits_{(T)}y'\,dm+z\int\limits_{(T)}z'\,dm=$$
$$=m(x\overline{x}+y\overline{y}+z\overline{z}), \tag{5.35}$$

где $\overline{x},\ \overline{y},\ \overline{z}$ суть координаты центра инерции притягивающего тела T. Если, в частности, начало координат совпадает с центром инерции тела T, то $\overline{x}=\overline{y}=\overline{z}=0$ и формула (5.35) показывает, что в этом случае $U_1(x,\ y,\ z)\equiv 0$.

Для $n=2$ находим

$$U_2(x,\ y,\ z)=\frac{x^2}{2}\int\limits_{(T)}(3x'^2-r'^2)\,dm+\frac{y^2}{2}\int\limits_{(T)}(3y'^2-r'^2)\,dm+$$
$$+\frac{z^2}{2}\int\limits_{(T)}(3z'^2-r'^2)\,dm+3xy\int\limits_{(T)}x'y'\,dm+$$
$$+3xz\int\limits_{(T)}x'z'\,dm+3yz\int\limits_{(T)}y'z'\,dm.$$

Введем в рассмотрение моменты инерции тела T относительно осей координат, а также центробежные моменты инерции, определяемые обычными формулами теоретической механики

$$A=\int\limits_{(T)}(y'^2+z'^2)\,dm,\quad B=\int\limits_{(T)}(z'^2+x'^2)\,dm,\quad C=\int\limits_{(T)}(x'^2+y'^2)\,dm$$

и

$$D=\int\limits_{(T)}x'y'\,dm,\quad E=\int\limits_{(T)}x'z'\,dm,\quad F=\int\limits_{(T)}y'z'\,dm.$$

Тогда выражение для U_2 напишется, как легко проверить, в следующем виде:

$$U_2(x,\ y,\ z)=\frac{x^2}{2}(B+C-2A)+\frac{y^2}{2}(C+A-2B)+\\ +\frac{z^2}{2}(A+B-2C)+3Dxy+3Exz+3Fyz. \qquad (5.36)$$

Если, в частности, направления осей координат совпадают с направлениями главных осей инерции тела T, то, как известно, $D=E=F=0$, и формула (5.36) примет более простой вид

$$U_2=\frac{x^2}{2}(B+C-2A)+\frac{y^2}{2}(C+A-2B)+\\ +\frac{z^2}{2}(A+B-2C). \qquad (5.36')$$

Многочлен U_2 можно еще представить в следующем виде:

$$U_2(x,\ y,\ z)=\frac{r^2}{2}[A+B+C-3J], \qquad (5.37)$$

где

$$J=A\left(\frac{x}{r}\right)^2+B\left(\frac{y}{r}\right)^2+C\left(\frac{z}{r}\right)^2-2D\frac{x}{r}\frac{y}{r}-2E\frac{x}{r}\frac{z}{r}-2F\frac{y}{r}\frac{z}{r}$$

есть момент инерции тела T относительно прямой OP, соединяющей начало координат с притягиваемой точкой P.

Далее, для $n=3$ имеем

$$U_3(x,\ y,\ z)=U_3^{(3,0,0)}x^3+U_3^{(2,1,0)}x^2y+U_3^{(2,0,1)}x^2z+\\ +U_3^{(1,2,0)}xy^2+U_3^{(1,1,1)}xyz+U_3^{(1,0,2)}xz^2+\\ +U_3^{(0,3,0)}y^3+U_3^{(0,2,1)}y^2z+U_3^{(0,1,2)}yz^2+U_3^{(0,0,3)}z^3, \qquad (5.38)$$

где коэффициенты, ввиду (5.32), определяются формулами

$$U_3^{(3,\,0,\,0)} = \frac{1}{2}\int\limits_{(T)} \left(5x'^2 - 3r'^2\right) x'\,dm,$$

$$U_3^{(2,\,1,\,0)} = \frac{1}{2}\int\limits_{(T)} \left(15x'^2 - 3r'^2\right) y'\,dm,$$

$$U_3^{(2,\,0,\,1)} = \frac{1}{2}\int\limits_{(T)} \left(15x'^2 - 3r'^2\right) z'\,dm,$$

$$U_3^{(1,\,2,\,0)} = \frac{1}{2}\int\limits_{(T)} \left(15y'^2 - 3r'^2\right) x'\,dm,$$

$$U_3^{(1,\,1,\,1)} = 15\int\limits_{(T)} x'y'z'\,dm,$$

$$U_3^{(1,\,0,\,2)} = \frac{1}{2}\int\limits_{(T)} \left(15z'^2 - 3r'^2\right) x'\,dm,$$

$$U_3^{(0,\,3,\,0)} = \frac{1}{2}\int\limits_{(T)} \left(5y'^2 - 3r'^2\right) y'\,dm,$$

$$U_3^{(0,\,2,\,1)} = \frac{1}{2}\int\limits_{(T)} \left(15y'^2 - 3r'^2\right) z'\,dm,$$

$$U_3^{(0,\,1,\,2)} = \frac{1}{2}\int\limits_{(T)} \left(15z'^2 - 3r'^2\right) y'\,dm,$$

$$U_3^{(0,\,0,\,3)} = \frac{1}{2}\int\limits_{(T)} \left(5z'^2 - 3r'^2\right) z'\,dm.$$

Наконец, для $n = 4$ имеем

$$\begin{aligned} U_4(x,\,y,\,z) = {} & U_4^{(4,\,0,\,0)}x^4 + U_4^{(3,\,1,\,0)}x^3y + U_4^{(3,\,0,\,1)}x^3z + \\ & + U_4^{(2,\,2,\,0)}x^2y^2 + U_4^{(2,\,0,\,2)}x^2z^2 + U_4^{(2,\,1,\,1)}x^2yz + U_4^{(1,\,3,\,0)}xy^3 + \\ & + U_4^{(1,\,2,\,1)}xy^2z + U_4^{(1,\,1,\,2)}xyz^2 + U_4^{(1,\,0,\,3)}xz^3 + U_4^{(0,\,4,\,0)}y^4 + \\ & + U_4^{(0,\,3,\,1)}y^3z + U_4^{(0,\,2,\,2)}y^2z^2 + U_4^{(0,\,1,\,3)}yz^3 + U_4^{(0,\,0,\,4)}z^4, \end{aligned} \tag{5.39}$$

где коэффициенты, ввиду (5.33), определяются формулами

$$U_4^{(4,\,0,\,0)} = \frac{1}{8} \int\limits_{(T)} (35x'^4 - 30x'^2 r'^2 + 3r'^4)\, dm,$$

$$U_4^{(3,\,1,\,0)} = \frac{5}{2} \int\limits_{(T)} (7x'^2 - 3r'^2)\, x'y'\, dm,$$

$$U_4^{(3,\,0,\,1)} = \frac{5}{2} \int\limits_{(T)} (7x'^2 - 3r'^2)\, x'z'\, dm,$$

$$U_4^{(2,\,2,\,0)} = \frac{3}{4} \int\limits_{(T)} (35x'^2 y'^2 - 5x'^2 r'^2 - 5y'^2 r'^2 + r'^4)\, dm,$$

$$U_4^{(2,\,0,\,2)} = \frac{3}{4} \int\limits_{(T)} (35x'^2 z'^2 - 5x'^2 r'^2 - 5z'^2 r'^2 + r'^4)\, dm,$$

$$U_4^{(2,\,1,\,1)} = \frac{15}{2} \int\limits_{(T)} (7x'^2 - r'^2)\, y'z'\, dm,$$

$$U_4^{(1,\,3,\,0)} = \frac{5}{2} \int\limits_{(T)} (7y'^2 - 3r'^2)\, x'y'\, dm,$$

$$U_4^{(1,\,2,\,1)} = \frac{15}{2} \int\limits_{(T)} (7y'^2 - r'^2)\, x'z'\, dm,$$

$$U_4^{(1,\,1,\,2)} = \frac{15}{2} \int\limits_{(T)} (7z'^2 - r'^2)\, x'y'\, dm,$$

$$U_4^{(1,\,0,\,3)} = \frac{5}{2} \int\limits_{(T)} (7z'^2 - 3r'^2)\, x'z'\, dm,$$

$$U_4^{(0,\,4,\,0)} = \frac{1}{8} \int\limits_{(T)} (35y'^4 - 30y'^2 r'^2 + 3r'^4)\, dm,$$

$$U_4^{(0,\,3,\,1)} = \frac{5}{2} \int\limits_{(T)} (7y'^2 - 3r'^2)\, y'z'\, dm,$$

$$U_4^{(0,\,2,\,2)} = \frac{3}{4} \int\limits_{(T)} (35y'^2 z'^2 - 5z'^2 r'^2 - 5y'^2 r'^2 + r'^4)\, dm.$$

$$U_4^{(0,1,3)} = \frac{5}{2} \int\limits_{(T)} (7z'^2 - 3r'^2) y'z' \, dm,$$

$$U_4^{(0,0,4)} = \frac{1}{8} \int\limits_{(T)} (35z'^4 - 30z'^2 r'^2 + 3r'^4) \, dm.$$

Вычисленные многочлены позволяют написать следующее приближенное выражение для силовой функции:

$$U = f\mu \left\{ \frac{m}{r} + \frac{U_1(x, y, z)}{r^3} + \frac{U_2(x, y, z)}{r^5} + \right.$$
$$\left. + \frac{U_3(x, y, z)}{r^7} + \frac{U_4(x, y, z)}{r^9} + \ldots \right\}.$$

Если же начало координат взять в центре инерции тела, а за координатные оси принять главные центральные оси инерции, то будем иметь следующее выражение:

$$U = f\mu \left\{ \frac{m}{r} + \frac{A + B + C - 3J}{2r^3} + \frac{U_3(x, y, z)}{r^7} + \frac{U_4(x, y, z)}{r^9} + \ldots \right\}.$$

Заметим, что на практике большей частью можно ограничиться только двумя первыми членами ряда и писать

$$U = f\mu \left\{ \frac{m}{r} + \frac{A + B + C - 3J}{2r^3} + \ldots \right\}. \tag{5.40}$$

В двух последних формулах буквы A, B, C обозначают главные центральные моменты инерции тела T (одномерного, двумерного или трехмерного), а

$$J = A\left(\frac{x}{r}\right)^2 + B\left(\frac{y}{r}\right)^2 + C\left(\frac{z}{r}\right)^2.$$

Нетрудно получить оценку для остаточного члена ряда, стоящего в фигурных скобках. Действительно, полагая

$$W_n = \frac{U_{n+1}}{r^{2n+3}} + \frac{U_{n+2}}{r^{2n+5}} + \ldots$$

и используя оценку остаточного члена разложения обратного расстояния, отмеченную в § 1, мы выведем без труда

$$|W_n| \leqslant \frac{m}{r} \frac{\left(\frac{\bar{r}}{r}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\bar{r}}{r}}.$$

В частности, для формулы (5.40) имеем оценку

$$|W_2| \leqslant \frac{m}{r} \frac{\left(\frac{\bar{r}}{r}\right)^3}{1 - \frac{\bar{r}}{r}}.$$

Перейдем теперь к рассмотрению многочленов $\tilde{U}_n$, определяемых формулой

$$\tilde{U}_n(x, y, z) = \int\limits_{(T)} \frac{\bar{P}_n(P, M)\,dm}{r'^{2n+1}},$$

полагая в которой последовательно $n = 0, 1, 2, 3, 4$, мы получаем

$$\tilde{U}_0(x, y, z) = \int\limits_{(T)} \frac{dm}{r'} = \text{const}. \tag{5.41}$$

Заметим, что выражение (5.41), помноженное на $f\mu$, даст значение силовой функции в начале координат, так что

$$U(0, 0, 0) = f\mu \tilde{U}_0.$$

Далее, имеем

$$\tilde{U}_1(x, y, z) = \tilde{U}_1^{(1,0,0)}x + \tilde{U}_1^{(0,1,0)}y + \tilde{U}_1^{(0,0,1)}z, \tag{5.42}$$

где

$$\tilde{U}_1^{(1,0,0)} = \int\limits_{(T)} \frac{x'\,dm}{r'^3}, \qquad \tilde{U}_1^{(0,1,0)} = \int\limits_{(T)} \frac{y'\,dm}{r'^3},$$

$$\tilde{U}_1^{(0,0,1)} = \int\limits_{(T)} \frac{z'\,dm}{r'^3},$$

причем эти выражения, помноженные на $f\mu$, дадут значения составляющих силы притяжения, действующей на материальную точку массы μ, помещенную в начале координат.

Заметим вообще, что из формул (5.21) и (5.25) следует, что

$$f\mu\,\tilde{U}_n^{(k_1, k_2, k_3)} = \frac{1}{k_1!k_2!k_3!} \left[\frac{\partial^{k_1+k_2+k_3} U}{\partial x^{k_1}\,\partial y^{k_2}\,\partial z^{k_3}} \right]_{\substack{x=0\\ y=0\\ z=0}}.$$

Действительно, ряд (5.21) есть не что иное, как разложение силовой функции $U(x, y, z)$ в ряд Тэйлора в окрестности начала координат. Поэтому формулы, которые здесь приводятся, могут быть получены и непосредственным вычислением коэффициентов ряда Тэйлора для функции U.

Возвращаясь к вычислению многочленов $\tilde{U}_n$, мы имеем

$$\tilde{U}_2(x, y, z) = \tilde{U}_2^{(2,0,0)}x^2 + \tilde{U}_2^{(0,2,0)}y^2 + \tilde{U}_2^{(0,0,2)}z^2 + \\ + \tilde{U}_2^{(1,1,0)}xy + \tilde{U}_2^{(1,0,1)}xz + \tilde{U}_2^{(0,1,1)}yz, \quad (5.43)$$

где

$$\tilde{U}_2^{(2,0,0)} = \frac{1}{2}\int\limits_{(T)} \frac{(3x'^2 - r'^2)\,dm}{r'^5},$$

$$\tilde{U}_2^{(0,2,0)} = \frac{1}{2}\int\limits_{(T)} \frac{(3y'^2 - r'^2)\,dm}{r'^5},$$

$$\tilde{U}_2^{(0,0,2)} = \frac{1}{2}\int\limits_{(T)} \frac{(3z'^2 - r'^2)\,dm}{r'^5}, \qquad \tilde{U}_2^{(1,1,0)} = 3\int\limits_{(T)} \frac{x'y'\,dm}{r'^5},$$

$$\tilde{U}_2^{(1,0,1)} = 3\int\limits_{(T)} \frac{x'z'\,dm}{r'^5}, \qquad \tilde{U}_2^{(0,1,1)} = 3\int\limits_{(T)} \frac{y'z'\,dm}{r'^5}.$$

Затем, для $n = 3$ получаем

$$\tilde{U}_3(x, y, z) = \tilde{U}_3^{(3,0,0)}x^3 + \tilde{U}_3^{(2,1,0)}x^2y + \tilde{U}_3^{(2,0,1)}x^2z + \\ + \tilde{U}_3^{(1,2,0)}xy^2 + \tilde{U}_3^{(1,1,1)}xyz + \tilde{U}_3^{(1,0,2)}xz^2 + \tilde{U}_3^{(0,3,0)}y^3 + \\ + \tilde{U}_3^{(0,2,1)}y^2z + \tilde{U}_3^{(0,1,2)}yz^2 + \tilde{U}^{(0,0,3)}z^3, \quad (5.44)$$

где

$$\tilde{U}_3^{(3,0,0)} = \frac{1}{2}\int\limits_{(T)} \frac{(5x'^2 - 3r'^2)\,x'\,dm}{r'^7},$$

$$\tilde{U}_3^{(2,1,0)} = \frac{3}{2}\int\limits_{(T)} \frac{(5x'^2 - r'^2)\,y'\,dm}{r'^7},$$

$$\tilde{U}_3^{(2,0,1)} = \frac{3}{2}\int\limits_{(T)} \frac{(5x'^2 - r'^2)\,z'\,dm}{r'^7},$$

$$\tilde{U}_3^{(1,2,0)} = \frac{3}{2}\int\limits_{(T)} \frac{(5y'^2 - r'^2)\,x'\,dm}{r'^7},$$

$$\tilde{U}_3^{(1,\,1,\,1)} = 15 \int\limits_{(T)} \frac{x'y'z'\,dm}{r'^7},$$

$$\tilde{U}_3^{(1,\,0,\,2)} = \frac{3}{2} \int\limits_{(T)} \frac{(5z'^2 - r'^2)\,x'\,dm}{r'^7},$$

$$\tilde{U}_3^{(0,\,3,\,0)} = \frac{1}{2} \int\limits_{(T)} \frac{(5y'^2 - 3r'^2)\,y'\,dm}{r'^7},$$

$$\tilde{U}_3^{(0,\,2,\,1)} = \frac{3}{2} \int\limits_{(T)} \frac{(5y'^2 - r'^2)\,z'\,dm}{r'^7},$$

$$\tilde{U}_3^{(0,\,1,\,2)} = \frac{3}{2} \int\limits_{(T)} \frac{(5z'^2 - r'^2)\,y'\,dm}{r'^7},$$

$$\tilde{U}_3^{(0,\,0,\,3)} = \frac{1}{2} \int\limits_{(T)} \frac{(5z'^2 - 3r'^2)\,z'\,dm}{r'^7}.$$

Наконец, для $n = 4$ найдем

$$\begin{aligned} \tilde{U}_4(x,\,y,\,z) = {} & \tilde{U}^{(4,\,0,\,0)}x^4 + \tilde{U}_4^{(3,\,1,\,0)}x^3y + \tilde{U}_4^{(3,\,0,\,1)}x^3z + \\ & + \tilde{U}_4^{(2,\,2,\,0)}x^2y^2 + \tilde{U}_4^{(2,\,0,\,2)}x^2z^2 + \tilde{U}_4^{(2,\,1,\,1)}x^2yz + \tilde{U}_4^{(1,\,3,\,0)}xy^3 + \\ & + \tilde{U}_4^{(1,\,2,\,1)}xy^2z + \tilde{U}_4^{(1,\,1,\,2)}xyz^2 + \tilde{U}_4^{(1,\,0,\,3)}xz^3 + \tilde{U}_4^{(0,\,0,\,4)}y^4 + \\ & + \tilde{U}_4^{(0,\,3,\,1)}y^3z + \tilde{U}_4^{(0,\,2,\,2)}y^2z^2 + \tilde{U}_4^{(0,\,1,\,3)}yz^3 + \tilde{U}_4^{(0,\,0,\,4)}z^4, \end{aligned} \quad (5.45)$$

где

$$\tilde{U}_4^{(4,\,0,\,0)} = \frac{1}{8} \int\limits_{(T)} \frac{(35x'^4 - 30x'^2r'^2 + 3r'^4)\,dm}{r'^9},$$

$$\tilde{U}_4^{(3,\,1,\,0)} = \frac{5}{2} \int\limits_{(T)} \frac{(7x'^2 - 3r'^2)\,x'y'\,dm}{r'^9},$$

$$\tilde{U}_4^{(3,\,0,\,1)} = \frac{5}{2} \int\limits_{(T)} \frac{(7x'^2 - 3r'^2)\,x'z'\,dm}{r'^9},$$

$$\tilde{U}_4^{(2,\,2,\,0)} = \frac{3}{4} \int\limits_{(T)} \frac{(35x'^2y'^2 - 5x'^2r'^2 - 5y'^2r'^2 + r'^4)\,dm}{r'^9},$$

$$\widetilde{U}_4^{(2,0,2)} = \frac{3}{4} \int\limits_{(T)} \frac{(35x'^2z'^2 - 5x'^2r'^2 - 5z'^2r'^2 + r'^4)\,dm}{r'^9},$$

$$\widetilde{U}_4^{(2,1,1)} = \frac{15}{2} \int\limits_{(T)} \frac{(7x'^2 - r'^2)\,y'z'\,dm}{r'^9},$$

$$\widetilde{U}_4^{(1,3,0)} = \frac{5}{2} \int\limits_{(T)} \frac{(7y'^2 - 3r'^2)\,x'y'\,dm}{r'^9},$$

$$\widetilde{U}_4^{(1,2,1)} = \frac{15}{2} \int\limits_{(T)} \frac{(7y'^2 - r'^2)\,x'z'\,dm}{r'^9},$$

$$\widetilde{U}_4^{(1,1,2)} = \frac{15}{2} \int\limits_{(T)} \frac{(7z'^2 - r'^2)\,x'y'\,dm}{r'^9},$$

$$\widetilde{U}_4^{(1,0,3)} = \frac{5}{2} \int\limits_{(T)} \frac{(7z'^2 - 3r'^2)\,x'z'\,dm}{r'^9},$$

$$\widetilde{U}_4^{(0,4,0)} = \frac{1}{8} \int\limits_{(T)} \frac{(35y'^4 - 30y'^2r'^2 + 3r'^4)\,dm}{r'^9},$$

$$\widetilde{U}_4^{(0,3,1)} = \frac{5}{2} \int\limits_{(T)} \frac{(7y'^2 - 3r'^2)\,y'z'\,dm}{r'^9},$$

$$\widetilde{U}_4^{(0,2,2)} = \frac{3}{4} \int\limits_{(T)} \frac{(35y'^2z'^2 - 5z'^2r'^2 - 5y'^2r'^2 + r'^4)\,dm}{r'^9},$$

$$\widetilde{U}_4^{(0,1,3)} = \frac{5}{2} \int\limits_{(T)} \frac{(7z'^2 - 3r'^2)\,y'z'\,dm}{r'^9},$$

$$\widetilde{U}_4^{(0,0,4)} = \frac{1}{8} \int\limits_{(T)} \frac{(35z'^4 - 30z'^2r'^2 + 3r'^4)\,dm}{r'^9}.$$

Разложение силовой функции для случая, когда $r < \underline{r}$, с точностью до членов четвертого порядка напишется теперь в виде

$$U(x, y, z) = f\mu\,\{\widetilde{U}_0 + \widetilde{U}_1(x, y, z) + \widetilde{U}_2(x, y, z) + \widetilde{U}_3(x, y, z) + \widetilde{U}_4(x, y, z) + \ldots\}.$$

Если обозначить через $\widetilde{W}_n$ остаточный член ряда, т. е. положить

$$\widetilde{W}_n = \widetilde{U}_{n+1}(x, y, z) + \widetilde{U}_{n+2}(x, y, z) + \ldots$$

то, подобно тому как было сделано выше, мы получим для этого остаточного члена следующую оценку:

$$|\widetilde{W}_n| \leqslant \frac{m}{\underline{r}} \frac{\left(\frac{r}{\underline{r}}\right)^{n+1}}{1 - \frac{r}{\underline{r}}}.$$

В заключение этого параграфа приведем первые члены разложения силовой функции U для случая $r > \overline{r}$ в полярных сферических координатах.

Подставляя для этого в формулу (5.40) вместо x, y, z их выражения в сферических координатах, мы получим после некоторых упрощений

$$U = f\mu \left\{ \frac{m}{r} + \frac{A+B-2C}{2r^3} P_2(\cos\theta) + \right.$$
$$\left. + \frac{3(B-A)}{4r^3} \sin^2\theta \cos 2\lambda + \ldots \right\}. \quad (5.46)$$

§ 3. Некоторые частные случаи разложения силовой функции

В предыдущем параграфе мы рассматривали задачу о разложении силовой функции притягивающего тела, форма и строение которого предполагались достаточно произвольными.

Точно так же и система координат, к которой относились притягивающее тело и притягиваемая точка, вообще оставалась какой угодно, и лишь в одном случае мы показали, как упрощается разложение, если за систему координат принять главные центральные оси инерции притягивающего тела.

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые важные частные случаи, в которых притягивающее тело обладает некоторой геометрической и механической симметрией, вследствие чего разложение силовой функции надлежащим выбором системы координат может быть значительно упрощено.