Если обозначить через $\tilde{W}_n$ остаточный член ряда, т. е. положить

$$\tilde{W}_n = \tilde{U}_{n+1}(x, y, z) + \tilde{U}_{n+2}(x, y, z) + \ldots$$

то, подобно тому как было сделано выше, мы получим для этого остаточного члена следующую оценку:

$$|\tilde{W}_n| \leqslant \frac{m}{\underline{r}} \frac{\left(\frac{r}{\underline{r}}\right)^{n+1}}{1 - \frac{r}{\underline{r}}}.$$

В заключение этого параграфа приведем первые члены разложения силовой функции U для случая $r > \bar{r}$ в полярных сферических координатах.

Подставляя для этого в формулу (5.40) вместо x, y, z их выражения в сферических координатах, мы получим после некоторых упрощений

$$U = f\mu\left\{\frac{m}{r} + \frac{A+B-2C}{2r^3} P_2(\cos\theta) + \right.$$
$$\left. + \frac{3(B-A)}{4r^3}\sin^2\theta\cos 2\lambda + \ldots\right\}. \quad (5.46)$$

§ 3. Некоторые частные случаи разложения силовой функции

В предыдущем параграфе мы рассматривали задачу о разложении силовой функции притягивающего тела, форма и строение которого предполагались достаточно произвольными.

Точно так же и система координат, к которой относились притягивающее тело и притягиваемая точка, вообще оставалась какой угодно, и лишь в одном случае мы показали, как упрощается разложение, если за систему координат принять главные центральные оси инерции притягивающего тела.

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые важные частные случаи, в которых притягивающее тело обладает некоторой геометрической и механической симметрией, вследствие чего разложение силовой функции надлежащим выбором системы координат может быть значительно упрощено.

Пусть тело T таково, что его форма обладает тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии, общая точка пересечения которых является тогда также центром симметрии.

Например, из тел одного только измерения (материальная линия) такой симметрией обладают, очевидно, прямолинейный отрезок, окружность, эллипс, периметр квадрата или прямоугольника и т. д. Из тел двух измерений (материальная поверхность) такой симметрией обладают квадрат, прямоугольник, круглый или эллиптический диск, поверхность шара или эллипсоида и т. д. Из трехмерных тел такой симметрией обладают куб, шар, эллипсоид, круговой или эллиптический цилиндр и тому подобное.

Но если тело обладает только геометрической симметрией, а распределение плотностей в нем остается произвольным, то никакого упрощения мы вообще не получим. Поэтому допустим, что тело обладает не только геометрической, но и механической симметрией относительно тех же трех взаимно перпендикулярных плоскостей. Иными словами, предположим, что притягивающее вещество расположено симметрично относительно этих плоскостей, что будет, например, всегда в том случае, когда тело, обладающее геометрической симметрией, вдобавок однородно. Но и неоднородные тела могут обладать механической симметрией, примером чего может быть эллипсоидальное тело с эллипсоидальным распределением плотностей.

Итак, пусть имеем тело T, обладающее указанной геометрической и механической симметрией относительно трех взаимно перпендикулярных плоскостей. Тогда, по соображениям симметрии, очевидно, что общая точка пересечения этих плоскостей, т. е. центр симметрии тела, является также центром инерции тела, а линии пересечения плоскостей симметрии являются также главными центральными осями инерции тела.

Возьмем начало координат в центре инерции, а за координатные оси выберем упомянутые главные центральные оси инерции. Тогда плотность тела T (линейная, поверхностная или объемная) $\delta(x', y', z')$ будет, очевидно, удовлетворять следующему условию:

$$\delta(-x', -y', -z') = \delta(x', y', z'). \qquad (5.47)$$

Пусть вообще $\Phi(M)$ есть некоторая неотрицательная функция текущей точки $M(x', y', z')$ тела, также удовлетворяющая условию (5.47). Тогда, как нетрудно убедиться, все интегралы типа

$$\int\limits_{(T)} \Phi(M)\, x'\, dT, \quad \int\limits_{(T)} \Phi(M)\, x'y'\, dT, \quad \int\limits_{(T)} \Phi(M)\, x'y'z'\, dT \tag{5.48}$$

будут равны нулю. Доказательство может быть проведено совершенно так же, как аналогичное доказательство в § 5 главы III и повторять его мы не будем.

В частности, интегралы

$$\int\limits_{(T)} x'\, dm = \int\limits_{(T)} \delta(x', y', z')\, x'\, dT, \quad \ldots$$

и

$$\int\limits_{(T)} x'y'\, dm = \int\limits_{(T)} \delta(x', y', z')\, x'y'\, dT, \quad \ldots$$

суть, очевидно, интегралы типа (5.48) и, следовательно, равны нулю. Поэтому, действительно, центр симметрии тела является одновременно его центром инерции, а оси симметрии — главными центральными осями инерции.

Рассмотрим теперь многочлены U_n и $\tilde{U}_n$, определяемые формулами (5.23) и (5.25) соответственно.

Коэффициенты этих многочленов определяются соответственно формулами (5.24) и (5.26), в которых величины $P_n^{(k_1, k_2, k_3)}$ суть однородные многочлены n-й степени относительно текущих координат x', y', z'. Эти многочлены могут быть представлены следующей общей формулой:

$$P_n^{(k_1, k_2, k_3)}(x', y', z') = \sum P_{n,\, k_1',\, k_2',\, k_3'}^{(k_1, k_2, k_3)}\, x'^{k_1'} y'^{k_2'} z'^{k_3'}, \tag{5.49}$$

где $P_{n,\, k_1',\, k_2',\, k_3'}^{(k_1, k_2, k_3)}$ суть числовые коэффициенты, а сумма распространяется на все целые неотрицательные числа k_1', k_2', k_3', удовлетворяющие условию

$$k_1' + k_2' + k_3' = n,$$

Тогда коэффициенты многочленов U_n и $\widetilde{U}_n$ определятся следующими формулами:

$$U_n^{(k_1, k_2, k_3)} = \sum P_{n, k_1', k_2', k_3'}^{(k_1, k_2, k_3)} \int\limits_{(T)} \delta(x', y', z') x'^{k_1'} y'^{k_2'} z'^{k_3'} dT \tag{5.50}$$

и

$$\widetilde{U}_n^{(k_1, k_2, k_3)} = \sum P_{n, k_1', k_2', k_3'}^{(k_1, k_2, k_3)} \int\limits_{(T)} \frac{\delta(x', y', z')}{r'^{2n+1}} x'^{k_1'} y'^{k_2'} z'^{k_3'} dT. \tag{5.51}$$

Так как плотность $\delta(x', y', z')$ удовлетворяет условию (5.47), а функция

$$\frac{1}{r'^{2n+1}} = \left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right)^{-n-\frac{1}{2}}$$

при любом n есть тоже функция типа $\Phi(M)$, то, если по крайней мере одно из трех чисел k_1', k_2', k_3' есть число нечетное, то соответствующий интеграл в формулах (5.50) и (5.51) будет одним из интегралов типа (5.48), а следовательно, будет равен нулю.

Отсюда следует, что если n есть число нечетное, то либо одно из k_1', k_2', k_3', либо все три обязательно будут также нечетными, а поэтому все интегралы в формулах (5.50) и (5.51) будут интегралами типа (5.48), а значит, все коэффициенты $U_n^{(k_1, k_2, k_3)}$ и $\widetilde{U}_n^{(k_1, k_2, k_3)}$ будут равны нулю. Следовательно, при нечетном n все многочлены U_n и $\widetilde{U}_n$ тождественно равны нулю и соответствующие разложения силовой функции напишутся в виде:

для $r > \overline{r}$

$$U(x, y, z) = f\mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_{2n}(x, y, z)}{r^{4n+1}} \tag{5.52}$$

и для $r < \underline{r}$

$$U(x, y, z) = f\mu \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{U}_{2n}(x, y, z). \tag{5.53}$$

Многочлены U_{2n} и $\widetilde{U}_{2n}$ с четными индексами, разумеется, не равны нулю, но значительно упрощаются. Действительно, из формулы (5.22) следует, что при четном n во всех членах, куда входят x, y, z только в четных степенях, координаты

x', y', z' входят также только в четных степенях. Поэтому коэффициенты (5.50) и (5.51), для которых (при четном n) все три показателя k_1, k_2, k_3 суть числа четные, вообще отличны от нуля, а все остальные коэффициенты заведомо равны нулю. Следовательно, многочлены U_{2n} и $\widetilde{U}_{2n}$ содержат члены только с четными степенями координат x, y, z, и мы имеем, например,

$$U_2(x,\ y,\ z) = U_2^{(2,\ 0,\ 0)}x^2 + U_2^{(0,\ 2,\ 0)}y^2 + U_2^{(0,\ 0,\ 2)}z^2,$$

$$U_4(x,\ y,\ z) = U_4^{(4,\ 0,\ 0)}x^4 + U_4^{(2,\ 2,\ 0)}x^2y^2 + U_4^{(2,\ 0,\ 2)}x^2z^2 + \\ + U_4^{(0,\ 4,\ 0)}y^4 + U_4^{(0,\ 2,\ 2)}y^2z^2 + U_4^{(0,\ 0,\ 4)}z^2.$$

Перейдем теперь к рассмотрению другого важного частного случая, когда притягивающее тело обладает и геометрической, и механической симметрией относительно некоторой оси. Так, например, геометрической осевой симметрией обладает тело, внешняя поверхность которого есть поверхность вращения вокруг некоторой оси. Тело может быть также простым слоем, распределенным на поверхности вращения; из тел одномерных осесимметричным телом является только окружность. Если осесимметричное тело однородно, то оно обладает также механической симметрией относительно той же оси. Но осесимметричное тело может быть и неоднородным. Простейшим случаем тела, обладающего геометрической и механической симметрией, является, очевидно, однородная материальная окружность. Если тело есть простой слой, распределенный на поверхности вращения, то оно обладает указанной симметрией, если плотность остается неизменной вдоль любой параллели, но изменяется произвольным образом при переходе с одной параллели на другую. Наконец, объемное тело обладает указанной симметрией, если в каждом сечении, перпендикулярном к оси вращения, плотность тела зависит только от расстояния до этой оси.

Покажем, что разложение силовой функции тела, обладающего геометрической и механической симметрией относительно одной и той же оси, принимает чрезвычайно простой вид, если ось вращения принята за одну из координатных осей декартовой системы координат.

Итак, рассмотрим тело T (одномерное, двумерное или трехмерное), обладающее указанной геометрической и механической симметрией относительно некоторой оси, которую примем за ось аппликат нашей системы координат. За начало координат примем произвольную точку, лежащую на этой оси, и будем сначала пользоваться сферическими координатами r, θ и λ. Пусть, как обычно, M есть текущая точка тела, в которой сосредоточен элемент притягивающей массы $dm = \delta(M)\,dT$, где как и выше, dT обозначает пространственный элемент (линейный, поверхностный или объемный). Тогда плотность тела $\delta(M)$ не зависит от долготы λ' и есть, следовательно, некоторая заданная функция от двух других сферических координат; мы можем использовать для нее какое-либо из следующих обозначений:

$$\delta(M), \quad \delta(r', \theta'), \quad \delta(\rho', \theta'), \quad \delta(r', z'), \quad \delta(\rho', z').$$

Рассмотрим разложения (5.10) и (5.16) силовой функции произвольного притягивающего тела по сферическим функциям $Y_n(\theta, \lambda)$ и $\widetilde{Y}_n(\theta, \lambda)$ соответственно. Эти сферические функции определяются соответственно формулами (5.11) и (5.17), а их коэффициенты — формулами (5.12), (5.13) и (5.18), (5.19) соответственно.

Выражения для коэффициентов сферических функций определяются, таким образом, интегралами, взятыми по всей массе притягивающего тела, а так как тело T обладает геометрической симметрией относительно оси аппликат, то одно из интегрирований в выражениях для коэффициентов есть обязательно интегрирование по долготе λ' и производится в пределах от $\lambda' = 0$ до $\lambda' = 2\pi$. Но плотность $\delta(M)$, входящая множителем в dm, не зависит от λ', а поэтому интегрирования по λ' сводятся к вычислению интегралов

$$\int_0^{2\pi} \cos k\lambda'\,d\lambda', \qquad \int_0^{2\pi} \sin k\lambda'\,d\lambda',$$

которые все равны нулю для $k = 1, 2, 3, \ldots$, а для $k = 0$ первый из них равен 2π.

Следовательно, все коэффициенты A_{nk}, B_{nk}, $\widetilde{A}_{nk}$, $\widetilde{B}_{nk}$ равны нулю, за исключением A_{n0} и $\widetilde{A}_{n0}$, которые вообще отличны от нуля и являются некоторыми, характерными для тела T постоянными.

Теперь разложения (5.10) и (5.16) напишутся в следующем виде:

для $r > \bar{r}$

$$U(r,\ \theta) = f\mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{n0} P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}} \tag{5.54}$$

и для $r < \underline{r}$

$$U(r,\ \theta) = f\mu \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{A}_{n0} r^n P_n(\cos\theta). \tag{5.55}$$

Эти разложения не зависят от долготы λ притягиваемой точки, что, впрочем, можно было предвидеть заранее по соображениям симметрии.

Формулы (5.54) и (5.55) легко переписать в прямоугольных координатах, заменяя просто $\cos\theta$ на z/r.

Делая это и воспользовавшись формулой (4.29) для многочленов Лежандра, мы опять получим для силовой функции разложения вида (5.20) и (5.21), которые в настоящем случае запишем так:

для $r > \bar{r}$

$$U(r,\ z) = f\mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{n0}}{r^{n+1}} P_n\left(\frac{z}{r}\right) = f\mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_n(r,\ z)}{r^{2n+1}}, \tag{5.54'}$$

где

$$U_n(r,\ z) = A_{n0} \sum_{s=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} P_{ns} z^{n-2s} r^{2s}$$

и для $r < \underline{r}$

$$U(r,\ z) = f\mu \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{A}_{n0} r^n P_n\left(\frac{z}{r}\right) = f\mu \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{U}_n(r,\ z), \tag{5.55'}$$

где

$$\tilde{U}_n(r,\ z) = \tilde{A}_{n0} \sum_{s=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} P_{ns} z^{n-2s} r^{2s}.$$

Разложения (5.54) и (5.55) справедливы для любого тела, обладающего геометрической и механической симметрией относительно одной и той же оси. Если же тело T обладает вдобавок симметрией относительно некоторой плоскости, перпендикулярной к этой оси, то разложения надлежащим выбором начала координат можно еще более упростить.

Действительно, всякое осесимметричное тело обладает, очевидно, бесчисленным множеством плоскостей симметрии, которые все проходят через ось симметрии. Поэтому существует также бесчисленное множество пар взаимно перпендикулярных плоскостей симметрии, а если тело T обладает вдобавок плоскостью симметрии, перпендикулярной к оси симметрии, то это тело имеет тогда три взаимно перпендикулярные плоскости симметрии, и мы имеем случай, рассмотренный выше.

В этом случае точка пересечения оси симметрии с плоскостью симметрии является также центром инерции тела, а поэтому, выбирая начало координат в этой точке, мы должны получить разложение силовой функции в виде (5.52) и (5.53) соответственно, откуда следует, что все постоянные A_{n0} и $\tilde{A}_{n0}$ с нечетными индексами должны быть равны в этом случае нулю, что мы покажем также и непосредственно.

Укажем формулы для вычисления коэффициентов A_{n0} и $\tilde{A}_{n0}$ отдельно для случая, когда притягивающее тело T есть простой слой, и отдельно для трехмерного тела.

Итак, пусть тело T есть простой слой, лежащий на поверхности вращения вокруг оси Oz, и пусть $r' = f(\theta')$ есть уравнение производящей кривой, или меридианного сечения тела. Поверхностная плотность слоя $\delta(M)$ не должна зависеть от долготы λ' и есть, следовательно, функция только от угла θ'. Эту плотность можно также рассматривать как функцию только от $\nu' = \cos\theta'$, или как функцию от r', или как функцию от $\rho'^2 + z'^2$, так что мы можем использовать для нее одно из обозначений

$$\delta(M), \quad \delta(\theta'), \quad \delta(\nu'), \quad \delta(r'), \quad \delta(\rho'^2 + z'^2).$$

Имея теперь в виду, что элемент площади поверхности вращения можно определить формулой

$$d\sigma = 2\pi\rho'\, ds',$$

где

$$\rho' = r' \sin\theta'; \quad ds' = d\theta' \sqrt{r'^2 + \left(\frac{dr'}{d\theta'}\right)^2},$$

мы получим без труда

$$A_{n0}=2\pi\int_{\alpha}^{\beta} r'^{n+1}P_n(\cos\theta')\,\delta(\theta')\sin\theta'\sqrt{r'^2+\left(\frac{dr'}{d\theta'}\right)^2}\,d\theta' \tag{5.56}$$

и

$$\tilde{A}_{n0}=2\pi\int_{\alpha}^{\beta} r'^{-n}P_n(\cos\theta')\,\delta(\theta')\sin\theta'\sqrt{r'^2+\left(\frac{dr'}{d\theta'}\right)^2}\,d\theta', \tag{5.57}$$

где α и β суть значения угла θ', соответствующие концевым точкам дуги производящей кривой.

Можно, конечно, получить и другие формулы для вычисления тех же самых коэффициентов, в зависимости от того, какая переменная принята за переменную интегрирования. Беря, например, за переменную интегрирования величину $\nu'=\cos\theta'$, мы будем иметь следующие формулы:

$$A_{n0}=2\pi\int_{\cos\beta}^{\cos\alpha} r'^{n+1}P_n(\nu')\,\delta(\nu')\sqrt{r'^2+(1-\nu'^2)\left(\frac{dr'}{d\nu'}\right)^2}\,d\nu' \tag{5.56'}$$

и

$$\tilde{A}_{n0}=2\pi\int_{\cos\beta}^{\cos\alpha} r'^{-n}P_n(\nu')\,\delta(\nu')\sqrt{r'^2+(1-\nu'^2)\left(\frac{dr'}{d\nu'}\right)^2}\,d\nu'. \tag{5.57'}$$

Пусть теперь поверхность, несущая простой слой, симметрична относительно плоскости, перпендикулярной к оси вращения. Примем за начало координат точку пересечения оси вращения и плоскости симметрии, и пусть в этой системе координат плотность слоя $\delta(M)$ удовлетворяет условию

$$\delta(\pi-\theta')=\delta(\theta').$$

Тогда притягивающее тело обладает не только геометрической, но и механической симметрией и все коэффициенты с нечетными значками должны быть равны нулю.

Действительно, в этом случае

$$\beta=\pi-\alpha,\quad r'(\pi-\theta')=r'(\theta'),$$

и так как $P_n(\cos\theta')$ при нечетных n содержат только нечетные степени $\cos\theta'$, то формулы (5.56) и (5.57) дают непосредственно $A_{2n+1,0} = \tilde{A}_{2n+1,0} = 0$.

Рассмотрим теперь случай трехмерного тела, обладающего геометрической и механической осевой симметрией.

Пусть $r = f(\theta)$ есть уравнение производящей кривой внешней поверхности тела, α и β — значения полярного угла θ, соответствующего концам дуги этой кривой и $\delta(r', \theta')$ — объемная плотность тела.

Так как элемент массы можно определить по формуле

$$d\tau = \delta(r', \theta')\, r'^2 \sin\theta'\, dr'\, d\theta'\, d\lambda',$$

то формулы (5.12) и (5.18) после выполнения интегрирования по долготе λ' напишутся в виде

$$A_{n0} = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \int_{0}^{f(\theta')} r'^{n+2} P_n(\cos\theta')\, \delta(r', \theta') \sin\theta'\, dr'\, d\theta' \tag{5.58}$$

и

$$\tilde{A}_{n0} = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \int_{0}^{f(\theta')} r'^{-n+1} P_n(\cos\theta')\, \delta(r', \theta') \sin\theta'\, dr'\, d\theta'. \tag{5.59}$$

Выбирая переменные интегрирования как-нибудь иначе, мы получим некоторые другие, иногда более удобные, формулы для этих коэффициентов.

Возьмем, например, вместо сферических координат r, θ, λ цилиндрические ρ, z, λ. Пусть $\rho = R(z)$ есть уравнение производящей кривой внешней поверхности тела, c, d — аппликаты концов дуги этой кривой и $\delta(\rho', z')$ — плотность тела. Тогда имеем следующие формулы:

$$A_{n0} = 2\pi \int_{c}^{d} \int_{0}^{R(z')} r'^{n} P_n\left(\frac{z'}{r'}\right) \delta(\rho', z')\, \rho'\, d\rho'\, dz' \tag{5.58'}$$

и

$$\tilde{A}_{n0} = 2\pi \int_{c}^{d} \int_{0}^{R(z')} r'^{-n-1} P_n\left(\frac{z'}{r'}\right) \delta(\rho', z')\, \rho'\, d\rho'\, dz'. \tag{5.59'}$$

Пусть теперь тело T обладает вдобавок симметрией относительно некоторой плоскости, перпендикулярной к оси симметрии. Тогда точка пересечения этой плоскости с осью симметрии является центром инерции тела, а две главные оси инерции лежат в этой плоскости симметрии.

Возьмем эту точку за начало координат. Тогда будем, очевидно, иметь

$$f(\pi-\theta')=f(\theta'),\quad \delta(r',\ \pi-\theta')=\delta(r',\ \theta'),\quad \beta=\pi-\alpha,$$

или

$$R(-z')=R(z'),\quad \delta(\rho',\ -z')=\delta(\rho',\ z'),\quad c=-d,$$

и формулы (5.58), (5.59) или формулы (5.58′), (5.59′) дадут непосредственно $A_{2n+1,0}=\tilde{A}_{2n+1,0}=0$, как это и должно быть.

Примечание. Мы рассмотрели в этом параграфе случай, когда притягивающее тело имеет либо три взаимно перпендикулярные плоскости геометрической и механической симметрии, либо когда тело имеет ось симметрии, а стало быть, бесчисленное множество пар взаимно перпендикулярных плоскостей симметрии.

Вообще возможен и такой случай, когда тело имеет всего только одну плоскость симметрии. В этом случае разложение силовой функции не допускает существенного упрощения. Можно только отметить, что если такую плоскость симметрии взять за одну из координатных плоскостей, например за плоскость xOy, то силовая функция сделается четной функцией относительно координаты z, и следовательно, разложение силовой функции будет содержать только четные степени аппликаты.

Поэтому разложения типа (5.20) и (5.21) здесь остаются в силе, только многочлены U_n и $\tilde{U}_n$ будут удовлетворять условиям

$$U_n(x,\ y,\ -z)=U_n(x,\ y,\ z),$$
$$\tilde{U}_n(x,\ y,\ -z)=\tilde{U}_n(x,\ y,\ z).$$

Полезно еще заметить, что если тело имеет единственную плоскость геометрической и механической симметрии, то центр инерции тела обязательно находится в этой плоскости и может быть принят за начало координат.

Тогда многочлен $U_1(x,\ y,\ z)$ будет равен тождественно нулю и это будет единственное упрощение, возможное в отмечаемом случае.