§ 4. Простейшие примеры разложения силовой функции

Здесь мы будем рассматривать некоторые специальные случаи, когда оказывается возможным дать общие выражения для коэффициентов разложения силовой функции притягивающего тела в конечном виде, или, по крайней мере, в наиболее простой форме.

Такие примеры, естественно, приходится выбирать из тех случаев, когда тело T имеет возможно более простую (геометрически) форму и когда оно обладает возможно более простой структурой, например когда его плотность есть величина постоянная.

Кроме того, на форму разложения силовой функции и на выражения для коэффициентов этого разложения оказывает также влияние выбор системы координат, так что иногда бывает возможно подходящим выбором координатной системы добиться наипростейших формул.

Случаи, которые мы будем здесь рассматривать, имеют и методическое и важное прикладное значение, так как такие случаи часто встречаются в приложениях, например в разнообразных задачах небесной механики как классической, так и современной.

Пример 1. *Прямолинейный материальный отрезок.* Пусть притягивающее тело является прямолинейным материальным отрезком (или стержнем), вообще говоря, неоднородным. Тогда в обозначениях § 3 главы II мы имеем следующее выражение для силовой функции стержня на внешнюю точку в произвольно выбранной системе координат:

$$U = f\mu \int_{-l_1}^{l_2} \frac{\delta(s)\,ds}{\sqrt{R^2 + s^2 + 2R\nu s}}, \tag{5.60}$$

где плотность $\delta(s)$ есть заданная, интегрируемая в промежутке $(-l_1, +l_2)$ функция от расстояния s текущей точки M стержня до фиксированной его точки G, $R = \overline{PG}$ и $\nu = \cos(\overrightarrow{PG}, \overrightarrow{AB})$ (A — начало, B — конец стержня).

Используя производящую функцию многочленов Лежандра, мы без труда получим разложение силовой функции U в виде

$$U = \frac{f\mu}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n P_n(\nu)}{R^n}, \tag{5.61}$$

где коэффициенты определяются формулой

$$A_n = \int_{-l_1}^{l_2} \delta(s) s^n \, ds. \tag{5.62}$$

Ряд (5.61) сходится абсолютно и равномерно при $R > l$, где l есть наибольшее из двух чисел l_1 и l_2.

Если точка G есть середина отрезка $\overline{AB}$ и плотность $\delta(s)$ удовлетворяет условию

$$\delta(-s) = \delta(s),$$

то все коэффициенты с нечетными n равны нулю и разложение получает вид

$$U = \frac{f\mu}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{2n} P_{2n}(\nu)}{R^{2n}}, \tag{5.61'}$$

где

$$A_{2n} = \int_{-l}^{+l} \delta(s) s^{2n} \, ds, \tag{5.62'}$$

так как, очевидно, что в этом случае $l_1 = l_2 = l$. В частности, если плотность есть величина постоянная, то разложение силовой функции может быть написано в виде *)

$$U = \frac{f\mu m}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_{2n}(\nu)}{2n+1} \left(\frac{l}{R}\right)^{2n}, \tag{5.61''}$$

где $m = 2l\delta$ есть масса стержня.

Отметим еще, что, беря начало координат в точке G, а прямую $\overrightarrow{AB}$ принимая за ось аппликат, мы имеем

$$R = r, \quad \nu = \cos\theta,$$

и разложение (5.61″) принимает вид (5.54), что и понятно, так как прямолинейный стержень можно рассматривать как тело, обладающее осевой симметрией.

---

*) См. Г. Н. Дубошин, Об одном частном случае задачи о поступательно-вращательном движении двух тел, Астрон. журн. АН СССР, т. XXXVI, 1959.

Пример 2. *Однородная материальная окружность.* Пусть притягивающее тело есть однородная материальная окружность, или круговое кольцо Гаусса. Как уже отмечалось, такое тело обладает и геометрической, и механической симметрией относительно оси, проходящей через центр окружности, перпендикулярно к ее плоскости. Кроме того, очевидно, что можно считать такое тело обладающим также плоскостью симметрии, перпендикулярной к оси симметрии. Этой плоскостью просто является плоскость самой окружности.

Возьмем начало координат в любой точке оси окружности, и пусть a будет радиус окружности и h — расстояние от начала координат до центра окружности G.

Разложение силовой функции определится тогда формулами (5.54) и (5.55), а коэффициенты этих разложений определятся формулами (5.12) и (5.18) при $k=0$.

Так как

$$dm = \delta\, ds = a\delta\, d\lambda'$$

и для любой точки окружности

$$r' = \sqrt{a^2+h^2} = \text{const}, \quad \cos\theta' = \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}} = \text{const},$$

то, полагая для сокращения

$$R = \sqrt{a^2+h^2},$$

мы найдем из формул (5.12) и (5.18) после интегрирования по λ' в пределах от 0 до 2π

$$A_{n0} = 2\pi a\delta R^n P_n\left(\frac{h}{R}\right),$$

$$\tilde{A}_{n0} = 2\pi a\delta R^{-n-1} P_n\left(\frac{h}{R}\right).$$

Далее имеем, очевидно,

$$2\pi a\delta = m, \quad \overline{r} = \underline{r} = R,$$

где m — масса кольца, и разложение силовой функции напишется в виде:

для $r > R$

$$U(r,\ \theta) = \frac{f\mu m}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n\left(\frac{h}{R}\right)\left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\cos\theta) \tag{5.63}$$

и для $r < R$

$$U(r,\ \theta) = \frac{f\mu m}{R} \sum_{n=0}^{\infty} P_n\left(\frac{h}{R}\right)\left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos\theta). \qquad (5.64)$$

Формулы (5.63) и (5.64) определяют силовую функцию гауссова кольца во всем пространстве, за исключением точек, лежащих на поверхности сферы радиуса R с центром в начале координат. Если точка P лежит на самом кольце, т. е. если

$$r = R, \quad \cos\theta = \frac{h}{R},$$

то, так как силовая функция в этом случае обращается в бесконечность, ряды (5.63) и (5.64) заведомо расходятся.

Разложения (5.63) и (5.64) существенно упрощаются, если начало координат взять в центре кольца G.

В этом случае, как нетрудно видеть,

$$h = 0, \quad R = a.$$

Кроме того, формулы (4.36) дают

$$P_{2n+1}(0) = 0, \quad P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

и мы получаем следующие разложения:

для $r > a$

$$U(r,\ \theta) = \frac{f\mu m}{r} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n} P_{2n}(\cos\theta) \qquad (5.63')$$

и для $r < a$

$$U(r,\ \theta) = \frac{f\mu m}{a} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n} P_{2n}(\cos\theta). \qquad (5.64')$$

Эти две формулы определяют силовую функцию кольца также во всем пространстве, за исключением точек, лежащих на поверхности сферы радиуса a, центр которой совпадает с центром кольца.

Если точка P попадает на само кольцо, то ряды (5.63′) и (5.64′) безусловно расходятся.

Отметим еще случай, когда притягиваемая точка лежит в плоскости кольца. Тогда $\cos\theta = 0$, и заменяя $P_{2n}(0)$ его выражением, мы получим:

для $r > a$

$$U(r) = \frac{f\mu m}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 \left(\frac{a}{r}\right)^{2n} \tag{5.63''}$$

и для $r < a$

$$U(r) = \frac{f\mu m}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 \left(\frac{r}{a}\right)^{2n}. \tag{5.64''}$$

Каждая из этих двух сумм представляет $\left(\text{с точностью до множителя } \frac{\pi}{2}\right)$ разложение полного эллиптического интеграла первого рода с модулем $\frac{a}{r}$ и $\frac{r}{a}$ соответственно, и мы приходим к уже известным формулам (3.10) и (3.11).

Пример 3. *Плоское круглое кольцо или диск.* Перейдем к разложению силовой функции двумерного притягивающего тела или простого слоя. Сначала рассмотрим слой, распределенный на плоском круглом кольце или, в частности, на плоском круглом диске. Очевидно, что в этом случае притягивающее тело обладает геометрической осевой симметрией относительно прямой, проходящей через центр кольца перпендикулярно к его плоскости. Мы ограничимся разложением силовой функции подобного простого слоя для случая, когда этот слой обладает также и механической симметрией относительно той же оси, для чего необходимо, чтобы плотность $\delta(M)$ слоя зависела только от расстояния точки M до центра G кольца. Пусть

$$\delta(M) = \delta(\rho')$$

есть произвольная интегрируемая функция от ρ' в промежутке (a_1, a_2), где a_1 обозначает внутренний, а a_2 — внешний радиус кольца. Возьмем начало координат в любой точке O оси симметрии. Тогда разложение силовой функции рассматриваемого простого слоя определится формулами (5.54) и (5.55), и нам остается только вычислить коэффициенты A_{n0} и $\tilde{A}_{n0}$ и подсчитать пределы $\bar{r}$ и $\underline{r}$.

Пусть h есть расстояние от начала координат до центра кольца G, который является, очевидно, также центром инерции для кольца. Тогда, как легко видеть,

$$\overline{r}=\sqrt{a_2^2+h^2},\quad \underline{r}=\sqrt{a_1^2+h^2}.$$

Для большего удобства вычисления коэффициентов примем за переменную интегрирования ρ'. Так как

$$dm=\delta(\rho')\rho'\,d\rho'\,d\lambda',\quad r'=\sqrt{\rho'^2+h^2},\quad \cos\theta'=\frac{h}{r'},$$

то мы получим из формул (5.12) и (5.18) для $k=0$, после выполнения интегрирования по λ', следующие выражения для коэффициентов:

$$A_{n0}=2\pi\int_{a_1}^{a_2} r'^n P_n\left(\frac{h}{r'}\right)\delta(\rho')\rho'\,d\rho' \tag{5.65}$$

и

$$\widetilde{A}_{n0}=2\pi\int_{a_1}^{a_2} r'^{-n-1} P_n\left(\frac{h}{r'}\right)\delta(\rho')\rho'\,d\rho'. \tag{5.66}$$

Если простой слой распределен на диске радиуса a, то $a_1=0$ и $a_2=a$, а

$$\overline{r}=\sqrt{a^2+h^2},\quad \underline{r}=h.$$

Выражения для коэффициентов несколько упрощаются, если за начало координат взята точка G — центр кольца. Действительно, тогда $h=0$, $r'=\rho'$, все коэффициенты с нечетными индексами обращаются в нуль, а коэффициенты с четными индексами определятся следующими формулами:

$$A_{2n,0}=2\pi(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\int_{a_1}^{a_2}\rho'^{2n+1}\delta(\rho')\,d\rho' \tag{5.65'}$$

и

$$\widetilde{A}_{2n,0}=2\pi(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\int_{a_1}^{a_2}\rho'^{-2n}\delta(\rho')\,d\rho'. \tag{5.66'}$$

Поэтому разложение силовой функции в рассматриваемом случае напишется следующим образом:

для $r > a_2$

$$U(r,\theta)=2\pi f\mu\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{P_{2n}(\cos\theta)}{r^{2n+1}}\int_{a_1}^{a_2}\rho'^{2n+1}\delta(\rho')\,d\rho' \tag{5.67}$$

и для $r < a_1$

$$U(r,\theta)=2\pi f\mu\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}r^nP_{2n}(\cos\theta)\int_{a_1}^{a_2}\rho'^{-2n}\delta(\rho')\,d\rho'. \tag{5.68}$$

Если кольцо превращается в диск, то имеем для $r > a$

$$U(r,\theta)=2\pi f\mu\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{P_{2n}(\cos\theta)}{r^{2n+1}}\int_{0}^{a}\rho'^{2n+1}\delta(\rho')\,d\rho'. \tag{5.69}$$

Ряды (5.67) и (5.68) определяют силовую функцию во всем пространстве, за исключением точек, принадлежащих шаровому слою с центром в точке G и с радиусами a_1 и a_2. Точно так же формула (5.69) определяет силовую функцию диска во всем пространстве, внешнем по отношению к сфере радиуса a, с центром в точке G. Интересно отметить, что каждый из этих рядов оказывается сходящимся на границе области сходимости *).

Действительно, положим в формуле (5.67) $r=a_2$ и $\cos\theta=0$, т. е. поместим притягиваемую точку P на внешний край кольца, несущего на себе простой слой.

Тогда имеем

$$U\left(a_2,\frac{\pi}{2}\right)=2\pi f\mu\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\frac{1}{a_2^{2n+1}}\int_{a_1}^{a_2}\rho'^{2n+1}\delta(\rho')\,d\rho'. \tag{5.67'}$$

Пусть $\bar{\delta}$ есть наибольшее значение функции $\delta(\rho')$ в промежутке (a_1, a_2). Тогда ряд в формуле (5.67′) сходится абсолютно,

*) См. Г. Н. Дубошин, Разложение силовой функции кольца, диска и сфероида, Вестник МГУ, № 1, 1948.

если сходится ряд

$$2\pi f\mu\delta a_2 \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 \frac{1-\alpha^{2n+2}}{2n+2}, \qquad (5.67'')$$

где $\alpha = \frac{a_1}{a_2} < 1$.

Но ряд (5.67) можно рассматривать как разность двух рядов с общими членами

$$u_n = \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+2}, \qquad v_n = \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 \frac{\alpha^{2n+2}}{2n+2}.$$

Легко видеть, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \alpha^2 < 1,$$

откуда следует, что ряд с общим членом v_n сходящийся. Доказательство сходимости ряда с общим членом u_n несколько менее элементарно, так как для этого ряда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$

Но, с другой стороны,

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1\right] = -2,$$

откуда следует по признаку Раабе, что ряд с общим членом u_n сходится. Следовательно, ряд (5.67″) также сходится, а значит, сходится и ряд (5.67′), и формула (5.67′) дает значение силовой функции на внешнем краю кольца. Совершенно так же доказывается сходимость ряда (5.68) при $r = a_1$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, т. е. на внутреннем краю кольца и ряда (5.69) при $r = a$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, т. е. на краю диска.

Приведенные соображения позволяют построить разложение силовой функции кольца или диска также для случая, когда притягиваемая точка P составляет часть притягивающей массы.

Действительно, пусть притягиваемая точка P лежит внутри кольца на расстоянии ρ от его центра ($a_1 \leqslant \rho \leqslant a_2$). Тогда силовая функция в точке P есть, очевидно, сумма двух силовых функций, а именно силовой функции кольца с внутренним радиусом a_1 и внешним радиусом ρ на точку, лежащую на внешнем крае этого кольца, и силовой функции кольца с внутренним радиусом ρ и внешним радиусом a_2 на точку, лежащую на внутреннем крае. Поэтому первая часть силовой функции получится из формулы (5.67), в которой надо положить

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad r = \rho, \quad a_2 = \rho,$$

а вторая часть — из формулы (5.68), в которой нужно положить

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad r = \rho, \quad a_1 = \rho.$$

Делая это, получим выражение силовой функции простого слоя плотности $\delta(\rho')$ на точку P, лежащую внутри слоя, в следующем виде:

$$U(\rho) = 2\pi f \mu \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 U_{2n}(\rho), \tag{5.70}$$

где положено для сокращения

$$U_{2n}(\rho) = \int_{a_1}^{\rho} \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^{2n+1} \delta(\rho')\, d\rho' + \int_{\rho}^{a_2} \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^{2n} \delta(\rho')\, d\rho'.$$

Ряд (5.70) сходится, согласно установленному выше, для всякого значения ρ, удовлетворяющего неравенству

$$a_1 \leqslant \rho \leqslant a_2.$$

Полагая в формуле (5.70) $a_1 = 0$ и $a_2 = a$, мы получим разложение силовой функции простого слоя, лежащего на диске, на внутреннюю точку диска в виде

$$U(\rho) = 2\pi f \mu \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 \overline{U}_{2n}(\rho), \tag{5.71}$$

где

$$\overline{U}_{2n}(\rho) = \int_{0}^{\rho} \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^{2n+1} \delta(\rho')\, d\rho' + \int_{\rho}^{a} \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^{2n} \delta(\rho')\, d\rho'.$$

Ряд (5.71) сходится для всякого значения ρ в промежутке $(0, a)$.

Если плотность $\delta(M)$ есть величина постоянная, то все вышеприведенные формулы значительно упрощаются.

Например, положим $\delta = \text{const}$ в формулах (5.69) и (5.71), определяющих силовую функцию диска на внешнюю и внутреннюю точки. После простых преобразований мы получим разложение силовой функции однородного диска в виде:

для $r \geqslant a$

$$U(r, \theta) = \frac{f\mu m}{r} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{a}{r}\right)^{2n} P_{2n}(\cos\theta) \tag{5.69'}$$

и для $0 \leqslant \rho \leqslant a$, $\cos\theta = 0$

$$U(\rho) = -\frac{f\mu m}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n-1} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 \left(\frac{\rho}{a}\right)^{2n}. \tag{5.71'}$$

Пример 4. *Простой сферический слой.* Рассмотрим простой слой непрерывной плотности, распределенный на поверхности сферы радиуса a. Возьмем центр сферы за начало координат (причем эта точка не будет вообще центром инерции слоя), и пусть θ' и λ' будут сферические координаты текущей точки M этой сферы.

Допустим, что функция $\delta(M) = \delta(\theta', \lambda')$, т. е. плотность слоя, конечна, непрерывна и однозначна во всех точках сферы. Тогда эту функцию можно разложить в ряд по сферическим функциям, и мы будем иметь

$$\delta(\theta', \lambda') = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(\theta', \lambda'). \tag{5.72}$$

Здесь $y_n(\theta', \lambda')$ есть сферическая функция n-го порядка, определяемая общей формулой

$$y_n(\theta', \lambda') = \sum_{k=0}^{n} P_n^{(k)}(\cos\theta') \left[a_{nk}\cos k\lambda' + b_{nk}\sin k\lambda'\right],$$

где коэффициенты суть известные числа, имеющие следующие выражения:

$$a_{nk} = \frac{2n+1}{2\pi\delta_k} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \delta(\theta', \lambda') P_n^{(k)}(\cos\theta') \cos k\lambda' \sin\theta' \, d\theta' \, d\lambda' \tag{5.73}$$

и

$$b_{nk} = \frac{2n+1}{2\pi\delta_k} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \delta(\theta', \lambda') P_n^{(k)}(\cos\theta') \sin k\lambda' \sin\theta' \, d\theta' \, d\lambda'. \tag{5.74}$$

В частности, если плотность $\delta(M)$ зависит только от координаты θ', то все a_{nk} и b_{nk} равны нулю для $k = 1, 2, 3, \ldots$, а

$$a_{n0} = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} \delta(\theta') P_n(\cos\theta') \sin\theta' \, d\theta' =$$

$$= \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} \delta(\nu') P_n(\nu') \, d\nu'$$

и, следовательно, плотность слоя $\delta(M)$ представится следующим разложением по многочленам Лежандра:

$$\delta(M) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n0} P_n(\cos\theta') = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n0} P_n(\nu').$$

Составим разложение силовой функции простого сферического слоя плотности $\delta(\theta', \lambda')$ на точку P массы μ, определяемую полярными сферическими координатами r, θ, λ.

Так как в рассматриваемом случае, очевидно, $\bar{r} = \underline{r} = a$, то для $r > a$ мы будем иметь разложение

$$U(r, \theta, \lambda) = f\mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n(\theta, \lambda)}{r^{n+1}}; \tag{5.75}$$

для $r < a$ соответственно будем иметь

$$U(r, \theta, \lambda) = f\mu \sum_{n=0}^{\infty} r^n \widetilde{Y}_n(\theta, \lambda). \tag{5.76}$$

Коэффициенты A_{nk} и B_{nk} сферической функции $Y_n(\theta, \lambda)$ определяются общими формулами (5.12) и (5.13), где в нашем случае интегралы берутся по поверхности сферы радиуса a. Поэтому в общих формулах нужно положить

$$r' = a, \quad dm = a^2 \delta(\theta', \lambda') \sin\theta' \, d\theta' \, d\lambda',$$

что дает

$$A_{nk}=$$
$$=\frac{2}{\delta_k}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}a^{n+2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}P_n^{(k)}(\cos\theta')\,\delta(\theta',\lambda')\cos k\lambda'\sin\theta'\,d\theta'\,d\lambda'$$

и

$$B_{nk}=$$
$$=\frac{2}{\delta_k}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}a^{n+2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}P_n^{(k)}(\cos\theta')\,\delta(\theta',\lambda')\sin k\lambda'\sin\theta'\,d\theta'\,d\lambda'.$$

Сравнивая эти выражения с выражениями (5.73) и (5.74) для коэффициентов разложения плотности, мы имеем

$$A_{nk}=\frac{4\pi a^{n+2}}{2n+1}a_{nk},\qquad B_{nk}=\frac{4\pi a^{n+2}}{2n+1}b_{nk}.$$

Точно так же, применяя общие формулы (5.18) и (5.19) для коэффициентов $\widetilde{A}_{nk}$ и $\widetilde{B}_{nk}$ сферической функции $\widetilde{Y}_n(\theta,\lambda)$ и сравнивая затем полученные выражения с выражениями (5.73) и (5.74), найдем

$$\widetilde{A}_{nk}=\frac{4\pi a^{-n+1}}{2n+1}a_{nk},\qquad \widetilde{B}_{nk}=\frac{4\pi a^{-n+1}}{2n+1}b_{nk}.$$

Теперь по формулам (5.11) и (5.17) получим, имея в виду выражения для $y_n(\theta,\lambda)$

$$Y_n(\theta,\lambda)=4\pi a^2\frac{a^n}{2n+1}y_n(\theta,\lambda)$$

и

$$\widetilde{Y}_n(\theta,\lambda)=4\pi a^2\frac{a^{-n-1}}{2n+1}y_n(\theta,\lambda);$$

таким образом разложения силовой функции рассматриваемого слоя представятся в следующем виде:

для $r>a$

$$U(r,\theta,\lambda)=\frac{4\pi f\mu a^2}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y_n(\theta,\lambda)}{2n+1}\left(\frac{a}{r}\right)^n, \tag{5.75'}$$

для $r<a$

$$U(r,\theta,\lambda)=\frac{4\pi f\mu a^2}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y_n(\theta,\lambda)}{2n+1}\left(\frac{r}{a}\right)^n. \tag{5.76'}$$

Так как масса m слоя определяется очевидной формулой

$$m = a^2 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \delta(\theta', \lambda') \sin\theta' \, d\theta' \, d\lambda',$$

то, вводя «среднюю» плотность $\bar{\delta}$ по формуле

$$\bar{\delta} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \delta(\theta', \lambda') \sin\theta' \, d\theta' \, d\lambda',$$

мы имеем

$$m = 4\pi a^2 \bar{\delta},$$

и разложения силовой функции слоя могут быть написаны в виде:

для $r > a$

$$U(r, \theta, \lambda) = \frac{f\mu m}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{y}_n(\theta, \lambda) \left(\frac{a}{r}\right)^n, \qquad (5.75'')$$

для $r < a$

$$U(r, \theta, \lambda) = \frac{f\mu m}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{y}_n(\theta, \lambda) \left(\frac{r}{a}\right)^n, \qquad (5.76'')$$

где положено для сокращения

$$\bar{y}_n(\theta, \lambda) = \frac{y_n(\theta, \lambda)}{(2n+1)\bar{\delta}}.$$

Нетрудно видеть, что ряды (5.75′) и (5.76′) остаются сходящимися и в том случае, когда притягиваемая точка попадает на поверхность сферы, несущей слой. В этом случае оба ряда дают одно и то же значение силовой функции

$$U(a, \theta, \lambda) = 4\pi f\mu a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n(\theta, \lambda)}{2n+1} = \frac{f\mu m}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{y}_n(\theta, \lambda). \qquad (5.77)$$

Если плотность $\delta(M)$ слоя зависит только от θ', то разложения силовой функции принимают соответственно вид:

для $r > a$

$$U(r, \theta) = \frac{f\mu m}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_{n0} P_n(\cos\theta) \left(\frac{a}{r}\right)^n, \qquad (5.75''')$$

для $r < a$

$$U(r, \theta) = \frac{f\mu m}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_{n0} P_n(\cos\theta) \left(\frac{r}{a}\right)^n \tag{5.76'''}$$

и для $r = a$

$$U(a, \theta) = \frac{f\mu m}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_{n0} P_n(\cos\theta), \tag{5.77''}$$

где коэффициенты $\bar{a}_{n0}$, как легко проверить, определяются формулой

$$\bar{a}_{n0} = \frac{\int\limits_0^{\pi} \delta(\theta') P_n(\cos\theta') \sin\theta' \, d\theta'}{\int\limits_0^{\pi} \delta(\theta') \sin\theta' \, d\theta'} = \frac{\int\limits_{-1}^{+1} \delta(\nu') P_n(\nu') \, d\nu'}{\int\limits_{-1}^{+1} \delta(\nu') \, d\nu'}.$$

Мы знаем, что нормальная производная от силовой функции простого слоя претерпевает разрыв первого рода, когда притягиваемая точка проходит через поверхность, несущую слой. Из полученных разложений нетрудно найти значения этой нормальной производной и определить величину скачка. В самом деле, дифференцируя формулы (5.75′) и (5.76′) по r, мы имеем

$$\frac{dU}{dn_+} = \frac{\partial U_e}{\partial r} = -\frac{4\pi f \mu a^2}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)\, y_n(\theta, \lambda)}{2n+1} \left(\frac{a}{r}\right)^n \qquad (r > a),$$

$$\frac{dU}{dn_-} = \frac{\partial U_i}{\partial r} = +\frac{4\pi f \mu a}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\, y_n(\theta, \lambda)}{2n+1} \left(\frac{r}{a}\right)^n \qquad (r < a),$$

где во избежание путаницы через U_e обозначена силовая функция слоя в области $r > a$, а через U_i — в области $r < a$.

Полагая в предыдущих формулах $r = a$, мы имеем

$$\left(\frac{\partial U_e}{\partial r}\right)_{r=a} = -4\pi f \mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)\, y_n(\theta, \lambda)}{2n+1}$$

и

$$\left(\frac{\partial U_i}{\partial r}\right)_{r=a} = +4\pi f \mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n y_n(\theta, \lambda)}{2n+1},$$

откуда находим

$$\left(\frac{\partial U_e}{\partial r}\right)_{r=a}+\left(\frac{\partial U_i}{\partial r}\right)_{r=a}=-4\pi f\mu\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y_n(\theta,\lambda)}{2n+1}$$

и

$$\left(\frac{\partial U_e}{\partial r}\right)_{r=a}-\left(\frac{\partial U_i}{\partial r}\right)_{r=a}=-4\pi f\mu\sum_{n=0}^{\infty}y_n(\theta,\lambda)$$

или, ввиду формул (5.72) и (5.77),

$$\left(\frac{\partial U_e}{\partial r}\right)_{r=a}+\left(\frac{\partial U_i}{\partial r}\right)_{r=a}=-\frac{1}{a}U(a,\theta,\lambda)$$

и

$$\left(\frac{\partial U_e}{\partial r}\right)_{r=a}-\left(\frac{\partial U_i}{\partial r}\right)_{r=a}=-4\pi f\mu\delta(\theta,\lambda).$$

Второе из этих равенств и дает величину разрыва, или «скачка», нормальной производной от силовой функции простого сферического слоя.

Пример 5. *Эллипсоид вращения.* Пусть притягивающее тело T ограничено поверхностью эллипсоида вращения (сжатого или вытянутого), образованного вращением эллипса с полуосями a и c ($a \geqslant c$) вокруг его большой или малой оси. Тогда тело T обладает, очевидно, геометрической симметрией и относительно оси вращения, и относительно плоскости, проходящей через центр эллипсоида, перпендикулярно к оси вращения. Эту плоскость обыкновенно называют *экваториальной плоскостью эллипсоида.*

Возьмем центр эллипсоида за начало координат, а ось аппликат направим по оси вращения поверхности. Тогда две другие координатные оси расположатся как-нибудь в экваториальной плоскости тела T.

Если не делать никаких упрощающих предположений о структуре тела T, т. е. о распределении плотностей в нем, то разложение силовой функции эллипсоида на внешнюю точку будет иметь общий вид (5.10), а коэффициенты сферических функций $Y_n(\theta, \lambda)$ определятся общими формулами (5.12) и (5.13), в которых нужно положить

$$dm=\delta(M)\,r'^2\sin\theta'\,dr'\,d\theta'\,d\lambda',$$

и интегралы брать по всему объему эллипсоида.

Мы ограничимся здесь рассмотрением более простого случая, когда поверхности равной плотности в теле T суть также поверхности вращения (не обязательно эллипсоиды!) вокруг оси вращения эллипсоида, являющегося внешней поверхностью тела T. Тогда тело будет обладать не только геометрической, но и механической симметрией относительно упомянутой оси вращения и разложение силовой функции тела T на внешнюю точку P напишется в виде

$$U(r,\ \theta)=f\mu\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_{n0}P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}, \tag{5.78}$$

причем ряд сходится равномерно и абсолютно в области $r>\bar{r}$; в нашем случае, очевидно, $\bar{r}=a$.

Остается вычислить коэффициенты A_{n0} этого разложения. Так как в рассматриваемом нами случае плотность $\delta(M)$ не зависит от долготы λ' текущей точки тела M, то формула (5.12) после интегрирования по λ' в пределах от нуля до 2π даст

$$A_{n0}=2\pi\int_0^{\pi}P_n(\cos\theta')\sin\theta'\,d\theta'\int_0^{R(\theta')}\delta(r',\ \theta')\,r'^{n+2}\,dr', \tag{5.79}$$

где верхний предел внутреннего интеграла берется из уравнения внешней поверхности тела (поверхности эллипсоида вращения), или, что то же, из уравнения производящего эллипса, которое может быть написано в виде

$$r=R(\theta).$$

Так как плотность $\delta(M)$ можно рассматривать также как функцию от r' и $\nu'=\cos\theta'$, а уравнение производящего эллипса также можно написать в виде

$$r=R(\nu),$$

то вместо формулы (5.79) мы можем написать следующую:

$$A_{n0}=2\pi\int_{-1}^{+1}P_n(\nu')\,d\nu'\int_0^{R(\nu')}\delta(r',\ \nu')\,r'^{n+2}\,dr'. \tag{5.80}$$

Если плотность тела удовлетворяет добавочному условию

$$\delta(r',\ -\nu')=\delta(r',\ \nu'),$$

то тело обладает также механической симметрией относительно экваториальной плоскости и центр эллипсоида будет в этом случае также центром инерции тела. Тогда, как мы знаем из предыдущего, все коэффициенты с нечетными значками n будут равны нулю и разложение силовой функции примет вид

$$U(r, \theta) = f\mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{2n,0} P_{2n}(\cos\theta)}{r^{2n+1}}, \tag{5.78'}$$

где, очевидно,

$$A_{2n,0} = 2\pi \int_0^{\pi} P_{2n}(\cos\theta') \sin\theta' \, d\theta' \int_0^{R(\theta')} \delta(r', \theta') r'^{2n+2} dr' \tag{5.79'}$$

или

$$A_{2n,0} = 2\pi \int_{-1}^{+1} P_{2n}(\nu') d\nu' \int_0^{R(\nu')} \delta(r', \nu') r'^{2n+2} dr'. \tag{5.80'}$$

Особенно интересен случай, когда тело T есть однородный эллипсоид вращения, так как в этом случае все интегралы вычисляются и коэффициенты представляются простыми конечными формулами. Покажем это сначала для случая однородного сжатого эллипсоида вращения.

Так как ось вращения эллипсоида принята за ось Oz, то уравнение внешней поверхности тела T имеет вид

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Преобразуя это уравнение к сферическим координатам, имеем

$$r^2\left(\frac{\sin^2\theta}{a^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2}\right) = 1,$$

откуда, полагая

$$a^2 - c^2 = c^2 l^2, \quad \cos\theta = \nu,$$

получим

$$r = \frac{a}{\sqrt{1 + l^2\nu^2}} = R(\nu).$$

Воспользуемся теперь формулой (5.80′). Полагая здесь $\delta = \mathrm{const}$ и выполняя внутреннее интегрирование, имеем

$$A_{2n,0} = \frac{2\pi\delta}{2n+3} \int_{-1}^{+1} R^{2n+3}(\nu') P_{2n}(\nu') \, d\nu',$$

или

$$A_{2n,\,0}=\frac{2\pi\delta a^{2n+3}}{2n+3}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{P_{2n}(\nu')\,d\nu'}{(1+l^2\nu'^2)^{n+\frac{3}{2}}}.$$

Но интеграл, входящий в последнюю формулу, вычисляется по формуле Лежандра (4.89), в которой надо положить $p=l^2$.

Делая это, мы найдем следующее выражение:

$$A_{2n,\,0}=\frac{4\pi\delta a^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)}\,\frac{(-l^2)^n}{(1+l^2)^{n+\frac{1}{2}}},$$

которое легко преобразуется к виду

$$A_{2n,\,0}=4\pi\delta a^2c\,\frac{(-1)^n\,l^{2n}c^{2n}}{(2n+1)(2n+3)}. \qquad (5.81)$$

Замечая еще, что масса сжатого эллипсоида вращения определяется формулой

$$m=\frac{4}{3}\pi\delta a^2c,$$

мы можем также написать

$$A_{2n,\,0}=3m\,\frac{(-1)^n\,l^{2n}c^{2n}}{(2n+1)(2n+3)}, \qquad (5.81')$$

вследствие чего разложение силовой функции однородного сжатого эллипсоида вращения на внешнюю точку примет следующую примечательную форму *):

$$U(r,\,\vartheta)=\frac{f\mu m}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3(-1)^n l^{2n}}{(2n+1)(2n+3)}\left(\frac{c}{r}\right)^{2n}P_{2n}(\cos\theta). \qquad (5.82)$$

Аналогично найдется и разложение силовой функции однородного вытянутого эллипсоида вращения. Так как ось вращения есть ось Oz, то уравнение внешней поверхности тела напишется в виде

$$\frac{x^2+y^2}{c^2}+\frac{z^2}{a^2}=1,$$

*) Иным способом эта формула была выведена А. А. Орловым, см. А. А. Орлов, Об одном способе разложения силовой функции сжатого эллипсоида вращения в ряд по полиномам Лежандра, Труды ГАИШ, т. XXIV, 1954.

откуда, переходя к сферическим координатам и полагая

$$a^2 - c^2 = e^2a^2, \quad \nu = \cos\theta,$$

имеем

$$r = \frac{c}{\sqrt{1 - e^2\nu^2}} = R(\nu).$$

Применяя опять формулу (5.80), мы, так же как и для сжатого эллипсоида, найдем

$$A_{2n,\,0} = \frac{2\pi\delta c^{2n+3}}{2n+3} \int\limits_{-1}^{+1} \frac{P_{2n}(\nu')\,d\nu'}{(1 - e^2\nu'^2)^{n+\frac{3}{2}}}.$$

Воспользовавшись снова формулой Лежандра (4.89), мы получим после упрощений

$$A_{2n,\,0} = 3m\,\frac{e^{2n}a^{2n}}{(2n+1)(2n+3)}, \tag{5.83}$$

где m есть масса однородного вытянутого эллипсоида

$$m = \frac{4}{3}\pi\,\delta c^2 a.$$

Поэтому разложение силовой функции однородного вытянутого эллипсоида на внешнюю точку напишется в виде

$$U(r,\ \theta) = \frac{f\mu m}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3e^{2n}}{(2n+1)(2n+3)}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n} P_{2n}(\cos\theta). \tag{5.84}$$

Примечание 1. Все ряды, рассмотренные в этом примере, заведомо сходятся абсолютно и равномерно в области $r > \bar{r}$, а так как уже было отмечено, что для эллипсоида $\bar{r} = a$, то все рассмотренные ряды заведомо сходятся в области, где $r > a$, т. е. вне сферы радиуса a, описанной из центра эллипсоида.

Однако область сходимости этих рядов может быть и более широкой. Действительно, рассмотрим ряд (5.82). Так как $|P_{2n}(\cos\theta)| \leqslant 1$, то этот ряд будет абсолютно сходящимся для всякого значения r, при котором сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{l^{2n}}{(2n+1)(2n+3)}\left(\frac{c}{r}\right)^{2n}.$$

Но последний, как нетрудно убедиться, сходится, если выполняется условие $r^2 \geqslant l^2c^2$, и расходится, если $r^2 < l^2c^2$.

Следовательно, ряд (5.82) сходится абсолютно также в области $r \geqslant \sqrt{a^2 - c^2}$, т. е. вне сферы, описанной из центра эллипсоида радиусом, равным половине фокального расстояния меридианного сечения эллипсоида (производящего эллипса). В этой области находятся также некоторые внутренние точки эллипсоида, но, разумеется, в этих точках ряд (5.82) не представляет силовую функцию, хотя и остается сходящимся.

Интересно отметить, что если полуоси эллипсоида, являющегося внешней поверхностью притягивающего тела, таковы, что выполняется условие $a \leqslant \sqrt{2}\, c$, то ряд (5.82) сходится абсолютно в области $r \geqslant c$ и, следовательно, представляет силовую функцию однородного сжатого эллипсоида во всем пространстве, за исключением внутренней области.

В точках внешней поверхности тела T силовая функция представляется $\left(\text{при условии } a \leqslant \sqrt{2}\, c\right)$ рядом

$$U = \frac{3f\mu m \sqrt{1 + l^2 \cos^2\theta}}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{2n} (1 + l^2 \cos^2\theta)^n}{(2n+1)(2n+3)} P_{2n}(\cos\theta). \tag{5.82'}$$

Точно так же доказывается, что ряд (5.84) сходится при $r \geqslant \sqrt{a^2 - c^2}$, а при выполнении условия $a \leqslant \sqrt{2}\, c$ этот ряд сходится в области $r \geqslant c$ и представляет силовую функцию однородного вытянутого эллипсоида вращения во всем пространстве, за исключением внутренней области.

В точках внешней поверхности силовая функция этого эллипсоида $\left(\text{при условии } a \leqslant \sqrt{2}\, c\right)$ представляется рядом

$$U = \frac{3f\mu m \sqrt{1 - e^2 \cos^2\theta}}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{l^{2n} (1 - e^2 \cos^2\theta)^n}{(2n+1)(2n+3)} P_{2n}(\cos\theta). \tag{5.84'}$$

Доказанное остается справедливым и для неоднородного эллипсоидального тела, поверхности равной плотности которого суть поверхности вращения вокруг оси вращения эллипсоида, симметричные относительно его экваториальной плоскости. Действительно, силовая функция такого тела определяется формулой (5.78), коэффициенты которой даются формулой (5.79) или (5.80). Так как плотность $\delta(M)$ ограничена внутри эллипсоида — внешней поверхности тела, то существует такое положительное число $\bar{\delta}$, что

$$\delta(M) \leqslant \bar{\delta}.$$

Поэтому коэффициенты ряда (5.78) численно не превышают коэффициентов такого же ряда, определяющего силовую функцию однородного эллипсоида с плотностью $\bar{\delta}$.

Но мы только что показали, что разложение силовой функции однородного эллипсоида всегда сходится абсолютно при $r \geqslant \sqrt{a^2 - c^2}$, а если выполнено условие $a \leqslant \sqrt{2}\,c$, то при $r \geqslant c$ (независимо от того, имеем ли мы сжатый или вытянутый эллипсоид). Поэтому ряд (5.78′) также сходится абсолютно при тех же условиях.

Если мы имеем тело, ограниченное поверхностью сжатого эллипсоида вращения, то для характеристики формы такого тела удобно ввести величину, называемую «сжатием» и определяемую формулой

$$\alpha = \frac{a - c}{a} = 1 - \frac{c}{a}.$$

Поэтому условие $a \leqslant \sqrt{2}\,c$ может быть также записано в следующем виде:

$$\alpha \leqslant 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}2928932.$$

Известно, что каждая из больших планет солнечной системы по внешнему виду представляет с большой точностью эллипсоид вращения, полярная ось которого меньше экваториальной. Сжатие каждой из этих планет весьма мало и во всяком случае меньше указанного предела. Отсюда сейчас же следует, что если какую-либо из этих планет можно рассматривать как эллипсоидальное тело, плотность которого в любой внутренней точке не зависит от долготы этой точки и, кроме того, есть четная функция относительно косинуса дополнения до широты, то силовая функция такой планеты во всем внешнем пространстве представляется рядом (5.78′).

В частности, так как для Земли $\alpha = \frac{1}{297}$, то при изучении движений искусственных спутников можно пользоваться рядом (5.78) во всем внешнем пространстве.

Примечание 2. Мы получили простые разложения силовой функции эллипсоидального тела только для того случая, когда притягиваемая точка находится во внешнем относительно тела пространстве. Для некоторых задач может представить значительный интерес также тот случай, когда притягиваемая точка находится внутри тела. Если это тело имеет постоянную плотность, то о разложении силовой функции не может быть и речи, так как в этом случае такая функция имеет вид просто многочлена второй степени. Но если тело неоднородно, то разложение силовой функции может понадобиться.

В общем случае такое разложение не может быть получено при помощи метода, рассмотренного в этой главе, и для его осуществления должны быть применены иные приемы.

Один из таких приемов указан В. К. Абалакиным для разложения силовой функции трехосного эллипсоида, обладающего эллипсоидальным распределением плотностей, для случая, когда притягиваемая точка лежит внутри тела*).

Размеры книги не позволяют нам рассматривать здесь другие приемы разложения силовой функции, отличные от классических, тем более, что число подобных приемов может быть весьма велико и к тому же они не дают вообще простых и удобных формул.

Заметим, впрочем, что если речь идет о разложении силовой функции эллипсоидального тела, обладающего эллипсоидальным распределением плотностей, то исходным пунктом для подобного разложения может служить представление силовой функции в виде однократного интеграла, рассмотренное в § 5 главы III.

Пример 6. *Однородный сфероид.* Рассмотрим сферу S радиуса a. Возьмем начало координат в центре O сферы и пусть M будет какая-либо ее точка с координатами θ и λ. Отложим по радиусу сферы отрезок $\overline{MM'}$, величина которого зависит от координат точки M. Геометрическое место концов M' всех этих отрезков есть некоторая поверхность S', уравнение которой в сферических координатах может быть

*) В. К. Абалакин, О движении материальной точки внутри неоднородного гравитирующего трехосного эллипсоида, Бюллетень ТИА, т. VII, № 5, 1959.

написано, очевидно, в следующей форме:

$$r = a[1 + u(\theta, \lambda)], \tag{5.85}$$

где $u(\theta, \lambda)$ есть некоторая заданная функция координат точки M. Мы будем предполагать, что $u(\theta, \lambda)$ есть конечная, однозначная и непрерывная функция от θ и λ, определенная на всей сфере S.

Тогда эта функция может быть разложена в равномерно сходящийся ряд сферических функций, который мы напишем в виде

$$u(\theta, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\theta, \lambda), \tag{5.86}$$

где $u_n(\theta, \lambda)$ есть сферическая функция n-го порядка.

Если мы заполним теперь область, заключенную внутри поверхности S', притягивающей материей с постоянной плотностью δ, то получим некоторое однородное тело T, которое будем называть «сфероидом», если все отрезки $\overline{MM'}$ весьма малы по сравнению с радиусом a сферы. Если эти отрезки настолько малы, что возможно пренебречь их степенями выше первой, то можно построить весьма простое разложение силовой функции такого однородного сфероида не только для случая внешней точки, но и для внутренней точки.

Рассмотрим сначала случай, когда притягиваемая точка P массы μ находится вне тела T.

Тогда разложение силовой функции тела T определится формулой (5.10), где Y_n суть сферические функции n-го порядка, коэффициенты которых даются общими формулами (5.12) и (5.13). Для упрощения вычисления заметим, что тело T может быть рассматриваемо как соединение однородного шара радиуса a и однородного слоя переменной толщины, заключенного между поверхностями S и S'. Поэтому силовая функция тела T может быть представлена как сумма силовой функции однородного шара на внешнюю точку и силовой функции упомянутого слоя. Так как силовая функция однородного шара хорошо известна, то достаточно применить формулы (5.12) и (5.13) для вычисления коэффициентов разложения силовой функции слоя. Обозначая эти коэффициенты через A'_{nk} и B'_{nk}, мы будем иметь

$$A'_{nk}=\frac{2}{\delta_k}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\delta\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}P_n^{(k)}(\cos\theta')\sin\theta'\cos k\lambda'\,d\theta'\,d\lambda'\int\limits_a^{a(1+u)}r'^{n+2}\,dr' \tag{5.87}$$

и

$$B'_{nk}=\frac{2}{\delta_k}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\delta\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}P_n^{(k)}(\cos\theta')\sin\theta'\sin k\lambda'\,d\theta'\,d\lambda'\int\limits_a^{a(1+u)}r'^{n+2}\,dr'. \tag{5.88}$$

Выполняя здесь интегрирование по r', найдем

$$\int\limits_a^{a(1+u)}r'^{n+2}\,dr'=\frac{a^{n+3}}{n+3}\left[(1+u)^{n+3}-1\right].$$

Разлагая $(1+u)^{n+3}$ по формуле бинома Ньютона и пренебрегая всеми степенями u выше первой, мы получим

$$\int\limits_a^{a(1+u)}r'^{n+2}\,dr'\cong a^{n+3}u(\theta',\lambda'),$$

а тогда формулы (5.87) и (5.88) будут тождественны формулам, определяющим коэффициенты разложения силовой функции простого сферического слоя плотности $\delta a u(\theta', \lambda')$ в примере 4. Поэтому разложение силовой функции однородного сфероида на внешнюю точку получится как сумма силовой функции однородного шара и силовой функции, определяемой разложением (5.75′), где нужно только положить

$$y_n(\theta,\lambda)=\delta a u_n(\theta,\lambda).$$

Полагая еще

$$\bar r=a[1+\max u(\theta,\lambda)],$$

мы будем иметь, следовательно, разложение силовой функции однородного сфероида для $r>\bar r$ в виде

$$U(r,\theta,\lambda)=\frac{4\pi f\mu\delta a^3}{3r}+\frac{4\pi f\mu\delta a^3}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(\theta,\lambda)}{2n+1}\left(\frac{a}{r}\right)^n. \tag{5.89}$$

Заметим еще, что с принятой степенью точности масса m сфероида равна массе шара радиуса a и плотности δ.

Действительно, мы имеем

$$m=\delta\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{a(1+u)} r'^2\sin\theta'\,d\theta'\,d\lambda'\,dr'=\frac{\delta a^3}{3}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(1+u)^3\sin\theta'\,d\theta'\,d\lambda'.$$

Так как, по условию, всеми степенями u выше первой можно пренебречь, то

$$m=\frac{\delta a^3}{3}\iint_{(\Omega)}(1+3u)\,d\sigma=\frac{\delta a^3}{3}\iint_{(\Omega)}(1+3u_1+3u_2+\ \ldots)\,d\sigma,$$

где интеграл берется по сфере Ω единичного радиуса. Но по свойствам сферических функций

$$\iint_{(\Omega)} u_n\,d\sigma=0 \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots),$$

а поэтому

$$m=\frac{\delta a^3}{3}\iint_{(\Omega)} d\sigma=\frac{4\pi a^3\delta}{3},$$

и разложение (5.89) можно написать в более компактном виде следующим образом:

$$U(r,\ \theta,\ \lambda)=\frac{3f\mu m}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_n(\theta,\ \lambda)}{2n+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}, \tag{5.89'}$$

где положено дополнительно

$$u_0(\theta,\ \lambda)=\frac{1}{3}.$$

Интересно отметить, что ряд (5.89) сходится и на поверхности S', а поэтому представляет силовую функцию сфероида во всем внешнем пространстве. Действительно, полагая в (5.89) $r=a(1+u)$, мы имеем с принятой степенью точности

$$U[a(1+u),\ \theta,\ \lambda]=$$
$$=\frac{3f\mu m}{a}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_n(\theta,\ \lambda)}{2n+1}-u(\theta,\ \lambda)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)\,u_n(\theta,\ \lambda)}{2n+1}\right\}.$$

Так как ряд (5.86) сходится на сфере S, то и оба ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n(\theta, \lambda)}{2n+1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)\, u_n(\theta, \lambda)}{2n+1}$$

также сходятся равномерно на всей сфере S.

Пусть теперь точка P лежит внутри тела T, точнее, внутри шара, являющегося главной частью тела T.

Тогда силовая функция сфероида на точку P складывается из силовой функции однородного шара на внутреннюю точку и из силовой функции слоя на точку, лежащую во внутренней полости слоя (но вне масс, образующих слой!).

Первая часть силовой функции известна, а вторая найдется по формуле (5.16), и задача опять приводится к вычислению коэффициентов сферических функций $\widetilde{Y}_n(\theta, \lambda)$ по формулам (5.18) и (5.19). Обозначая эти коэффициенты через $\widetilde{A}'_{nk}$ и $\widetilde{B}'_{nk}$, мы имеем

$$\widetilde{A}'_{nk} = \\ = \frac{2}{\delta_k} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \delta \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} P_n^{(k)}(\cos\theta') \sin\theta' \cos k\lambda' \, d\theta' \, d\lambda' \int_a^{a(1+u)} r'^{-n+1} \, dr' \tag{5.90}$$

и

$$\widetilde{B}'_{nk} = \\ = \frac{2}{\delta_k} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \delta \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} P_n^{(k)}(\cos\theta') \sin\theta' \sin k\lambda' \, d\theta' \, d\lambda' \int_a^{a(1+u)} r'^{-n+1} \, dr'. \tag{5.91}$$

Интегрирование по r' с принятой степенью точности дает

$$\int_a^{a(1+u)} r'^{-n+1} \, dr' = a^{-n+2} \frac{[(1+u)^{-n+2} - 1]}{-n+2} \cong a^{-n+2} u(\theta', \lambda').$$

Следовательно, коэффициенты $\widetilde{A}'_{nk}$, $\widetilde{B}'_{nk}$, определяемые формулами (5.90) и (5.91), являются коэффициентами разложения силовой функции простого сферического слоя, плотности $a\delta u(\theta', \lambda')$.

Таким образом, силовая функция однородного сфероида на точку P в области $r < a$ определится следующей формулой:

$$U(r, \theta, \lambda) = \frac{2\pi f \mu \delta}{3}(3a^2 - r^2) + \frac{4\pi f \mu \delta a^3}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(\theta, \lambda)}{2n+1}\left(\frac{r}{a}\right)^n. \quad (5.92)$$

Вводя в эту формулу массу тела m и полагая еще

$$u_0(\theta, \lambda) = \frac{1}{2},$$

мы напишем формулу (5.92) в следующем виде:

$$U(r, \theta, \lambda) = \frac{f\mu m}{a}\left\{-\frac{r^2}{a^2} + 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n(\theta, \lambda)}{2n+1}\left(\frac{r}{a}\right)^n\right\}. \quad (5.92')$$

Нетрудно проверить, так же как это было сделано выше для случая внешней точки, что ряд (5.92) остается сходящимся и на поверхности S' и, следовательно, определяет силовую функцию однородного сфероида во всех точках внутри области S'.

Примечание. Мы рассмотрели только простейший случай, когда сфероид имеет постоянную плотность. Лаплас рассматривал и более общий случай—неоднородного сфероида, когда поверхности равной плотности, так же как и внешняя поверхность тела, мало отличаются от концентрических сфер.

Разумеется, что разложение силовой функции подобного сфероида должно иметь вид (5.10) или (5.16), и вопрос опять заключается только в вычислении коэффициентов этих разложений. Так как эти вычисления не приводят к таким же простым формулам, как для однородного сфероида, то мы приводить их здесь не будем.

§ 5. Разложение силовой функции взаимного притяжения двух конечных тел

Рассмотрим два тела T_1 и T_2, совершенно произвольных по своей внешней форме и внутреннему строению. Пусть M_i ($i = 1, 2$) есть текущая точка тела T_i, в которой сосредоточена элементарная притягивающая масса

$$dm_i = \delta_i\, dT_i,$$

где δ_i — плотность тела T_i (линейная, поверхностная или объемная), а dT_i обозначает пространственный элемент тела